

Mathematik (AHS)

Jänner 2016

Teil-2-Aufgaben

Bundesinstitut



Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Gegeben sind eine (normierte) quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Polynomfunktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$.

Aufgabenstellung:

- a) Lässt sich die Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ in der Form $(x - z) \cdot \left(x - \frac{1}{z}\right) = 0$ mit $z \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$ schreiben, dann spricht man von einer reziproken quadratischen Gleichung.

Geben Sie mithilfe von Gleichungen an, wie die Parameter p und q jeweils von z abhängen!

Bestimmen Sie die Werte für z , für die die reziproke quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Geben Sie für jeden dieser Werte von z jeweils die lokalen Minimumstellen von f an!

- b) Wählt man in der gegebenen Funktionsgleichung den Wert $q = -1$, dann erhält man eine Polynomfunktion zweiten Grades f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x - 1$.

A* Begründen Sie rechnerisch, warum die Gleichung $f(x) = 0$ genau zwei verschiedene Lösungen in \mathbb{R} haben muss!

Begründen Sie, warum die Funktion f eine positive und eine negative Nullstelle haben muss!

- c) Für $q = p - \frac{1}{3}$ erhält man eine Funktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + p - \frac{1}{3}$.

Bestimmen Sie für diese Funktion f denjenigen Wert für p , für den $\int_{-1}^1 f(x) dx = -6$ gilt!

Geben Sie an, ob für dieses p die Gleichung $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ eine wahre Aussage ergibt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

* Die mit A gekennzeichneten Aufgabenstellungen dienen im Rahmen der schriftlichen Klausur als Ausgleichspunkte und werden bei einer Durchführung als Klausur zum Ausgleich (für die laut LBVO „wesentlichen Bereiche“) herangezogen.

Aufgabe 2

Design-Center Linz

Das Design-Center ist eines der modernen Wahrzeichen der Stadt Linz. Erbaut wurde es von Juli 1991 bis Ende Oktober 1993. Im Jänner 1994 wurde es als Veranstaltungs- und Messezentrum in Betrieb genommen.

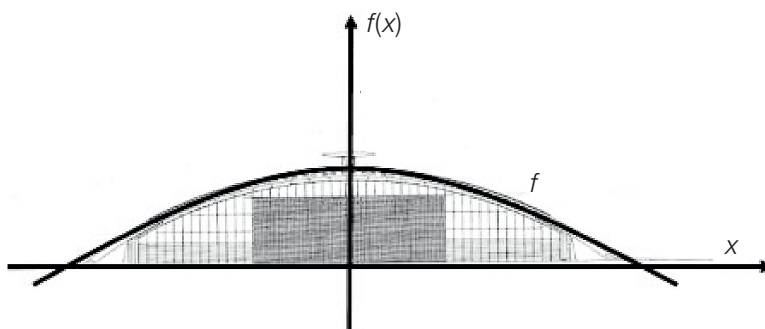
Die Träger der Konstruktion lassen sich in guter Näherung durch Parabelbögen beschreiben. Die Spannweite der Bögen beträgt ungefähr 72 m, die maximale Höhe der Bögen liegt bei ca. 13 m. Die Grundfläche des Design-Centers ist ein Rechteck mit 200 m Länge und 72 m Breite.

Bildquelle: http://www.linz.at/images/dc_druck.jpg
[09.09.2015]



Aufgabenstellung:

- a) Zur Modellierung der parabelförmigen Träger wurde, wie in der folgenden Grafik dargestellt, ein Koordinatensystem durch die Frontansicht des Design-Centers gelegt:



☐ A) Geben Sie eine Gleichung der Polynomfunktion zweiten Grades f an, welche diese Parabel beschreibt!

Geben Sie an, was durch $200 \cdot 2 \cdot \int_0^{36} f(x) dx$ in Bezug auf das Design-Center berechnet wird!

- b) Die Baukosten für das Design-Center betrugen zur Zeit der Baufertigstellung (1993) umgerechnet ca. € 66 Mio.

Der Baukostenindex ist ein Maß für die Entwicklung derjenigen Kosten, die Bauunternehmern bei der Ausführung von Bauleistungen durch Veränderungen der Kostengrundlagen (Material und Arbeit) entstehen. Er gibt z. B. an, wie stark die Kosten für Hochbauten pro Jahr steigen. Berechnen Sie unter der Annahme, dass der Baukostenindex für Österreich 3,5 % pro Jahr beträgt, die Höhe der Baukosten für das Design-Center, wenn es erst 10 Jahre später gebaut worden wäre!

Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die Entwicklung des Baukostenindex der Gesamtbaukosten für den Wohnhaus- und Siedlungsbau im Zeitraum von fünf aufeinanderfolgenden Jahren.

Jahr	Baukostenindex
2010	+3,2 %
2011	+2,3 %
2012	+2,1 %
2013	+1,9 %
2014	+1,1 %

Quelle: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/wirtschaft/preise/baukostenindex/index.html [30.10.2015]

Jemand interessiert sich für den durchschnittlichen Baukostenindex in diesen fünf Jahren. Zur Abschätzung führt er die folgende Rechnung aus:

$$\frac{3,2 + 2,3 + 2,1 + 1,9 + 1,1}{5} = 2,12$$

Die Vorgehensweise ist für die Berechnung des durchschnittlichen Baukostenindex allerdings nicht ganz korrekt. Geben Sie an, wie diese Berechnung korrekt zu erfolgen hätte!

Aufgabe 3

Schiefer Turm von Pisa

Der Schiefe Turm von Pisa zählt zu den bekanntesten Gebäuden der Welt.

Historisch nicht verbürgt sind Galileo Galileis (1564 – 1642) Fallversuche aus verschiedenen Höhen des Schiefen Turms von Pisa. Tatsache ist jedoch, dass Galilei die Gesetze des freien Falls erforscht hat. Die Fallzeit eines Körpers aus der Höhe h_0 ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes (im Vakuum) unabhängig von seiner Form und seiner Masse.

Modellhaft kann die Höhe des fallenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die Funktion h mit der Gleichung $h(t) = h_0 - 5t^2$ beschrieben werden. Die Höhe $h(t)$ wird in Metern und die Zeit t in Sekunden gemessen.

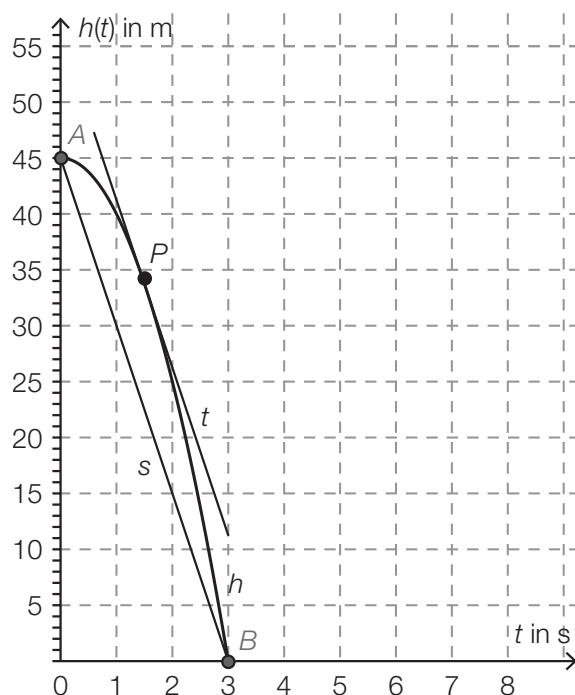
Aufgabenstellung:

- a) Ein Körper fällt im Vakuum aus einer Höhe $h_0 = 45$ m.

A Berechnen Sie seine Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t_1 des Aufpralls!

Begründen Sie, warum der Betrag der Geschwindigkeit dieses Körpers im Intervall $[0; t_1]$ monoton steigt!

- b) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Funktion h für $h_0 = 45$ m dargestellt. Bestimmen Sie die Steigung der Sekante s durch die Punkte $A = (0|45)$ und $B = (3|0)$ und deuten Sie diesen Wert im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!



Die Tangente t im Punkt $P = (1,5 | h(1,5))$ ist parallel zur Sekante s . Interpretieren Sie diese Tatsache im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Aufgabe 4

Reaktionstest

Bei einem Reaktionstest am Computer werden der getesteten Person am Bildschirm nacheinander 20 Muster gezeigt, die klassifiziert werden müssen. Protokolliert werden die für die 20 Reaktionen insgesamt benötigte Reaktionszeit t sowie die Anzahl f der dabei auftretenden fehlerhaften Klassifikationen.

In der nachstehenden Tabelle sind die Ergebnisse eines Reaktionstests am Computer einer Testperson in einer Serie von zehn Testdurchgängen angegeben.

Nummer der Testdurchführung	t (in Sekunden)	f
1*	$t_1 = 22,3$	$f_1 = 3$
2	$t_2 = 24,6$	$f_2 = 2$
3	$t_3 = 21,8$	$f_3 = 3$
4	$t_4 = 23,5$	$f_4 = 1$
5	$t_5 = 32,8$	$f_5 = 5$
6	$t_6 = 21,7$	$f_6 = 4$
7	$t_7 = 22,6$	$f_7 = 3$
8	$t_8 = 22,8$	$f_8 = 2$
9	$t_9 = 35,4$	$f_9 = 3$
10	$t_{10} = 22,5$	$f_{10} = 1$

* Erläuterung: Die Person benötigte bei der ersten Testdurchführung 22,3 Sekunden, drei ihrer Klassifikationen waren falsch.

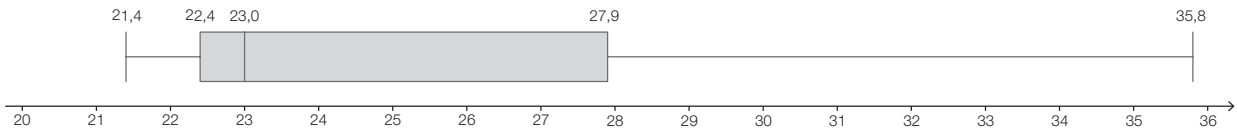
Aufgabenstellung:

- a) ☐ Berechnen Sie das arithmetische Mittel \bar{t} der zehn Reaktionszeiten t_1, t_2, \dots, t_{10} sowie die Standardabweichung s_t dieser zehn Werte!

Die getestete Person absolviert zwei weitere Testdurchgänge und erreicht dabei die Zeiten t_{11} und t_{12} . Das arithmetische Mittel der neuen Datenreihe $t_1, t_2, \dots, t_{10}, t_{11}, t_{12}$ wird mit \bar{t}_{neu} bezeichnet, die entsprechende Standardabweichung mit s_{neu} . Geben Sie Werte für t_{11} und t_{12} so an, dass $t_{11} \neq t_{12}$, $\bar{t}_{\text{neu}} = \bar{t}$ und $s_{\text{neu}} < s_t$ gilt!

- b) Im Laufe einer Diskussion vertritt eine Person die Meinung, dass das arithmetische Mittel der 10 Reaktionszeiten die gegebene Datenliste nicht optimal beschreibt. Geben Sie ein mögliches Argument an, das diese Meinung stützt, und nennen Sie ein alternatives statistisches Zentralmaß!

Die Datenreihe der 500 Reaktionszeiten von insgesamt 50 Testpersonen wird durch das nachstehende Kastenschaubild dargestellt.



Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage jedenfalls korrekt ist: „Höchstens 125 der 500 Reaktionszeiten betragen höchstens 22,4 s.“ Begründen Sie Ihre Entscheidung!

- c) Die Zufallsvariable H ordnet jedem Testdurchgang, bei dem einer bestimmten Person 20 Bilder vorgelegt werden, die Anzahl der dabei auftretenden fehlerhaften Reaktionen zu.

Nennen Sie unter Bezugnahme auf den dargelegten Sachverhalt die Voraussetzungen, die für den Reaktionstest als erfüllt angesehen werden müssen, damit die Zufallsvariable H durch eine Binomialverteilung beschrieben werden kann!

Berechnen Sie $P(H > 2)$, wenn die getestete Person mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,15$ fehlerhaft reagiert!

Aufgabe 5

Überraschungseier

Ein italienischer Süßwarenhersteller erzeugt das Produkt *Kinder Überraschung* (auch als „Überraschungsei“ bekannt). Das Ei soll aus 20 g Schokolade bestehen. Im Inneren des Eies befindet sich in einer gelben Kapsel ein Spielzeug. Diese Kapsel hat näherungsweise die Form eines Drehzylinders, auf dessen Grund- und Deckfläche Halbkugeln aufgesetzt werden. Das Volumen der Kapsel beträgt ungefähr 36 cm^3 und deren Oberfläche 55 cm^2 .



Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Überraschungsei.jpg> [01.06.2015] (Urheber: A. Kniessel, Lizenz: CC BY-SA 3.0)

Aufgabenstellung:

- a) Bei der Qualitätskontrolle gelten Schokoladeneier, deren Masse um mehr als 0,5 g vom Sollwert 20 g abweichen, als Ausschuss. Bei einer Kontrolle wurden nach dem Zufallsprinzip 500 Schokoladeneier einer Produktionsserie ausgewählt und überprüft. Dabei wurden 15 als Ausschuss aussortiert.

Geben Sie ein symmetrisches 90-%-Konfidenzintervall für den relativen Anteil p an Ausschusseiern in der gesamten Produktionsserie an!

Geben Sie an, durch welche Maßnahme man die Breite des Konfidenzintervalls bei vorgegebenem Konfidenzniveau (Sicherheit) verringern kann!

- b) Der Hersteller überlegt, die gelbe Kapsel in Zukunft nur in Form eines Drehzylinders ohne aufgesetzte Halbkugeln zu produzieren. Das Volumen V der Kapsel soll dabei unverändert bleiben, ebenso wie die Form des Schokoladeneies. Die Oberfläche $O(r)$ des angedachten Drehzylinders kann in Abhängigkeit vom Radius r durch die Funktion O mit der Gleichung $O(r) = 2r^2\pi + 2 \cdot V \cdot r^{-1}$ beschrieben werden. Der Radius r darf dabei nur Werte im Bereich $(0 \text{ cm}; 1,9 \text{ cm}]$ annehmen, damit der Zylinder in das Schokoladenei passt.

Berechnen Sie die minimal mögliche Oberfläche der geplanten zylindrischen Kapsel!

Weisen Sie durch Differenzialrechnung nach, dass an der berechneten Stelle tatsächlich ein Minimum vorliegt!