Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

14. januar 2020

Uporabna matematika

TAK (HAK)

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge dela A in naloge dela B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na voljo imate skupno *270 minut* čistega delovnega časa.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni list, ki Vam je dan na razpolago. Svoje ime in letnik oz. Vaš razred vpišite na čelno stran zvezka z nalogami v za to predvideni polji, ter Vaše ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri reševanju vsake delne naloge na delovni list navedite njeno oznako (npr. 3d1).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Uporaba potrjenih zvezkov formul oz. zbirke formul za SRDP iz Uporabne matematike in elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije) je dovoljena, če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in ni možen dostop do lastnih podatkov v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je v izpitnem prostoru na razpolago za vpogled.

Smernice za reševanje

– Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljena funkcija tehnologije).
– Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
– Rezultate je potrebno nedvoumno izpostaviti.
– Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami, če je to v navodilu za postopek izrecno zahtevano.
– Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati ter označiti.
– Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
– Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
– Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z Vašim imenom.
– Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, kjer je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite želeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Velja naslednji ključ ocenjevanja:

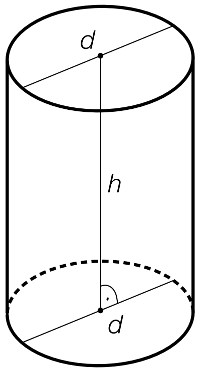
44–48 točk	zelo dobro	Sehr gut
38–43 točk	dobro	Gut
31–37 točk	povoljno (zadovoljivo)	Befriedigend
23–30 točk	zadostno	Genügend
0–22 točk	nezadostno	Nicht genügend

Veliko uspeha!

Naloga 1

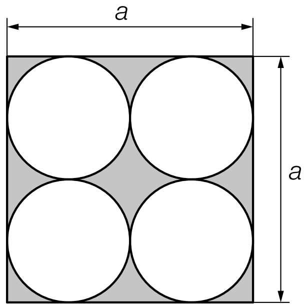
Posode za tekočino

a) V nadaljevanju narisana valjasta posoda, z višino h = 16 dm, vsebuje 1 200 L, pri napolnitvi do 10 cm pod zgornji rob.



1) Izračunajte premer posode d. *[1 točka]*

b) Neki prostor ima kvadratno osnovno ploskev z dolžino osnovnice a. V njem so uskladiščene 4 valjaste posode z enakimi zunanjimi premeri (glejte naslednjo sliko, pogled od zgoraj).



1) Nastavite enačbo za izračun ploščine sivo označene ploskve A, s pomočjo dolžine osnovnice a.

A = ____ *[1 točka]*

c) Neka posoda za tekočino se polni. Pri tem je moč količino tekočine v posodi, v odvisnosti od časa polnjenja, približno opisati s funkcijo F.

$F(t) = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$

t ... čas polnjenja v min
$F(t)$ ... količina tekočine v posodi ob času polnjenja t v L

Enačbo $900 = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$ rešimo za t.

1) Opišite pomen rešitve v dani vsebinski povezavi. *[1 točka]*

Naloga 2

Najljubša barva

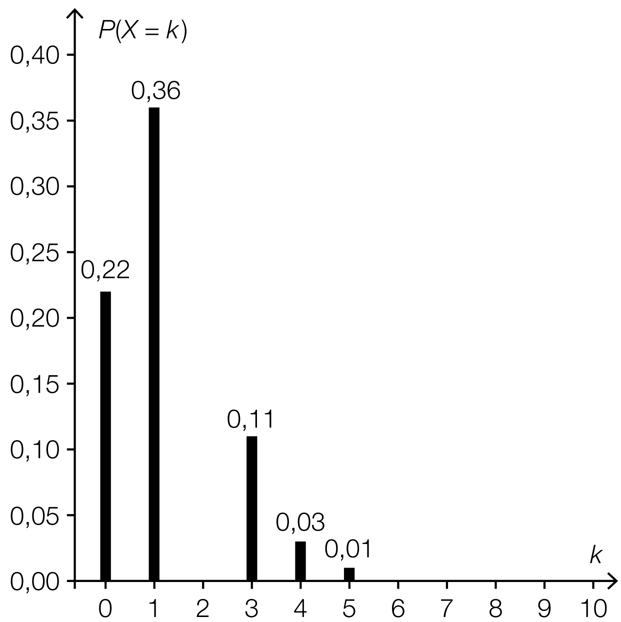
a) Verjetnost, da neka naključno izbrana oseba kot najljubšo barvo označi roza barvo, znaša 13 %.
25 naključno izbranih oseb vprašamo po njihovi najljubši barvi.

1) Izračunajte verjetnost, da natanko 3 osebe izmed 25 oseb označijo roza kot najljubšo barvo. *[1 točka]*

b) Verjetnost, da neka naključno izbrana oseba kot najljubšo barvo označi oranžno barvo, znaša 7 %.
Med *n* vprašanimi osebami naj bo z verjetnostjo najmanj 90 % vsaj 1 oseba, ki oranžno barvo označi kot najljubšo barvo.

1) Izračunajte število *n* tistih oseb, ki jih najmanj moramo vprašati v ta namen. *[1 točka]*

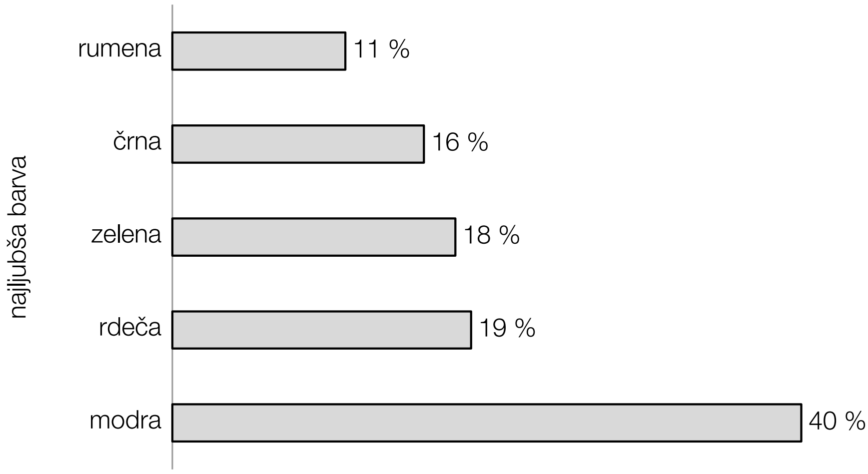
c) Binomska slučajna spremenljivka *X* opisuje število tistih oseb med 10 vprašanimi, ki kot najljubšo barvo označijo lila. Verjetnostna funkcija te slučajne spremenljivke je predstavljena na naslednji sliki.



Verjetnost da, med 10 vprašanimi, največ 3 vprašani označijo lila kot najljubšo barvo, znaša 96 %.

1) Na gornji sliki vrišite manjkajoči stolpec za $P(X = 2)$. *[1 točka]*

d) Učence/-ke neke šole so vprašali po njihovi najljubši barvi. Na naslednji sliki je predstavljeno, koliko odstotkov vprašanih je katero od barv označilo kot najljubšo barvo.



1) Opišite, po čem lahko razpoznamo, da je bilo moč označiti tudi več kot eno najljubšo barvo. *[1 točka]*

Naloga 3

Pohodništvo

a) Da bi določili čas hoje za neki pohod, je moč uporabiti naslednje pravilo čez palec:
»Višinsko razliko v metrih delimo s 400, vodoravno razliko v kilometrih delimo s 4.
Če oba ta dva rezultata seštejemo, dobimo čas hoje v urah.«

1) To pravilo čez palec prevedite v formulo za čas hoje t. Pri tem uporabite naslednje oznake:

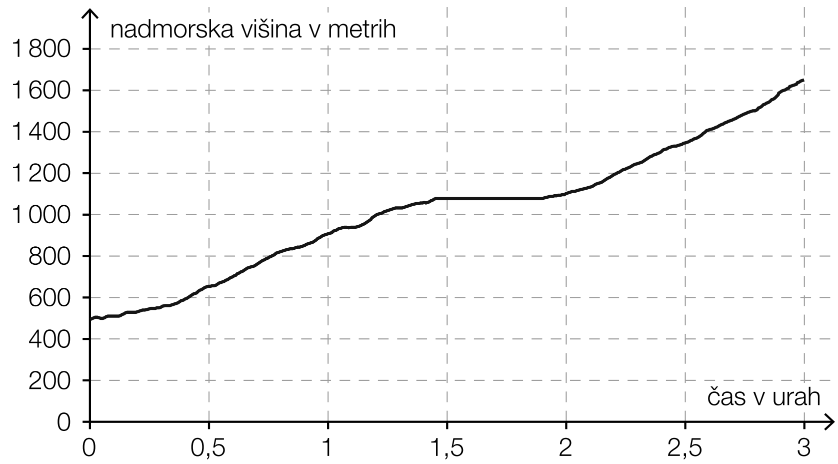
h ... višinska razlika v m
x ... vodoravna razlika v km
t ... čas hoje v h

t = ____ *[1 točka]*

Pri nekem pohodu nekdo prehodi vodoravno razliko 6,7 km in za to potrebuje čas hoje 3h 15 min.

2) S pomočjo danega pravila čez palec izračunajte pri tem premagano višinsko razliko. *[1 točka]*

b) Na naslednji sliki je predstavljen višinski potek med nekim 3-urnim pohodom.

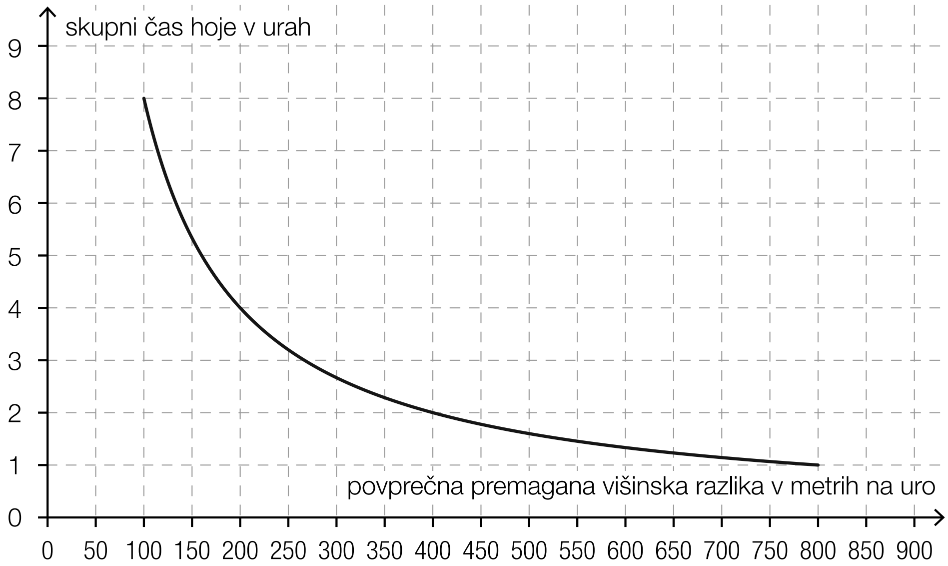


1) Določite povprečno hitrost spreminjanja nadmorske višinske razlike v odvisnosti od časa, za celoten pohod. Rezultat navedite s pripadajočimi enotami. *[1 točka]*

Nekdo zatrjuje: »Po približno 1,5 ure smo počili. Na grafu se to razpozna tako, da graf med počitkom poteka vodoravno.«

2) Utemeljujte, zakaj ta trditev ni nujno pravilna. *[1 točka]*

c) Pri vzponu na neki določeni hrib je skupni čas hoje obratno sorazmeren povprečni premagani višinski razliki v metrih na uro (glej naslednjo sliko).

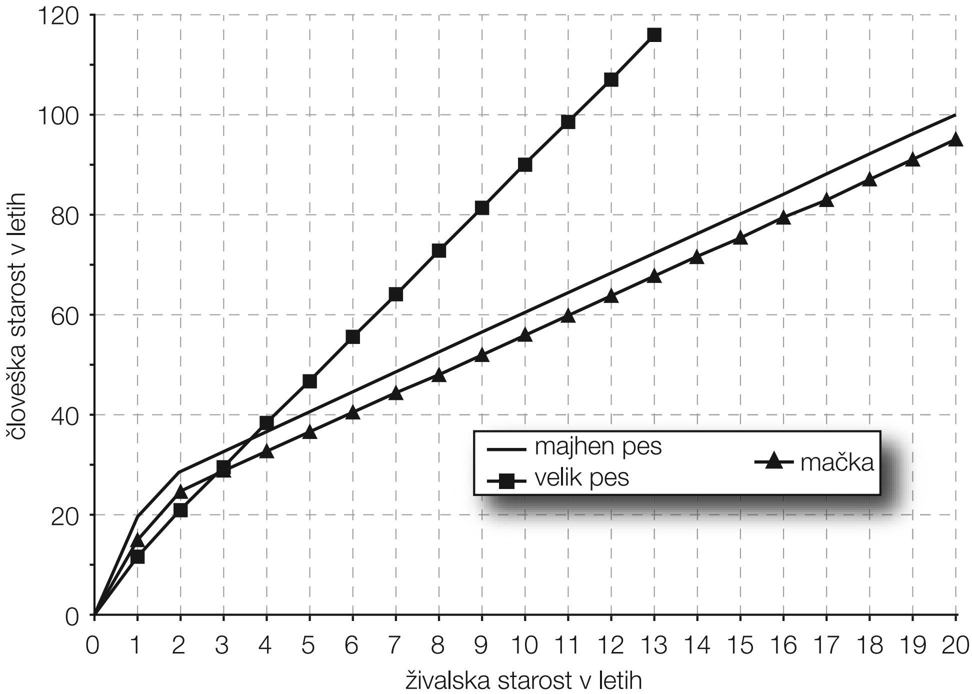


1) Iz gornje slike odčitajte, katero višinsko razliko je potrebno skupno premagati pri tem vzponu. *[1 točka]*

Naloga 4

Razvoj mačk in psov

a) Številne živali se starajo hitreje kot ljudje. Neki 9 let star veliki pes je na primer približno toliko »star« kot 80-letni človek. Za nekatere domače živali je povezava med živalsko starostjo in človeško starostjo predstavljena na naslednji sliki.



Za mačko je moč povezavo med živalsko starostjo v letih in človeško starostjo v letih v nekem določenem območju opisati z linearno funkcijo K:

$K(t) = k \cdot t + d$

t ... živalska starost v letih pri $t \geq 2$
$K(t)$ ... človeška starost v letih, ki ustreza živalski starosti t mačke

1) Ob pomoči 2 točk iz gornjega grafikona, nastavite enačbo linearne funkcije K za $t \geq 2$. *[1 točka]*

Za majhnega psa je moč to povezavo modelirati z linearno funkcijo H:

$H(t) = k_1 \cdot t + d_1$

t ... živalska starost v letih pri $t \geq 2$
$H(t)$ ... človeška starost v letih, ki ustreza živalski starosti t majhnega psa

2) Navedite, katera povezava obstaja med parametroma k in k_1. Utemeljite svoj odgovor s pomočjo gornje slike. *[1 točka]*

b) Pri neki študiji je bila telesna masa odraslih mačk neke določene rase privzeta kot normalno porazdeljena, s pričakovano vrednostjo $\mu = 3{,}6$ kg in standardnim odklonom $\sigma = 0{,}7$ kg. Najtežjih 10 % odraslih mačk je bilo v tej študiji označenih kot pretežke.

1) Določite tisto telesno maso, od katere dalje je bila odrasla mačka v tej študiji označena kot pretežka. *[1 točka]*

Naloga 5

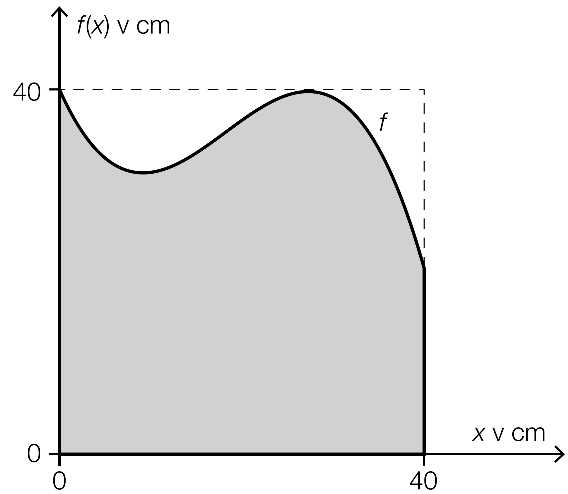
Drevesna hiška

Neka družina načrtuje postaviti leseno drevesno hiško. Drevo za to stoji na vodoravnem delu vrta.

a) Postavljena je 3,2 m dolga lestev, ki sega od tal natanko do vhoda v drevesno hiško na višini 2,8 m.

1) Izračunajte tisti kot, pod katerim je lestev nagnjena glede na vodoravna tla. *[1 točka]*

b) Okna drevesne hiške naj bi imela posebno obliko (glej sivo označeno ploskev na naslednji sliki).



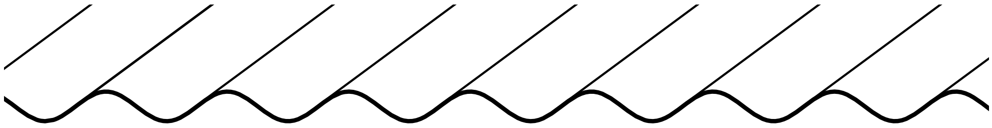
Gornjo mejno črto okna je moč približno opisati z grafom funkcije f.

$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ pri $0 \leq x \leq 40$

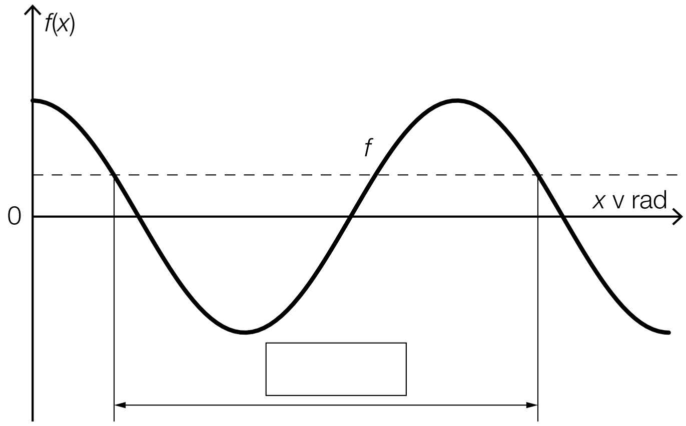
x, $f(x)$ ... koordinate v cm

1) Izračunajte za koliko odstotkov je okenska ploskev v predstavljeni obliki manjša kot okenska ploskev kvadratnega okna s stranico 40 cm. *[2 točki]*

c) Drevesna hiška bo pokrita z valovitimi ploščami iz umetne mase.

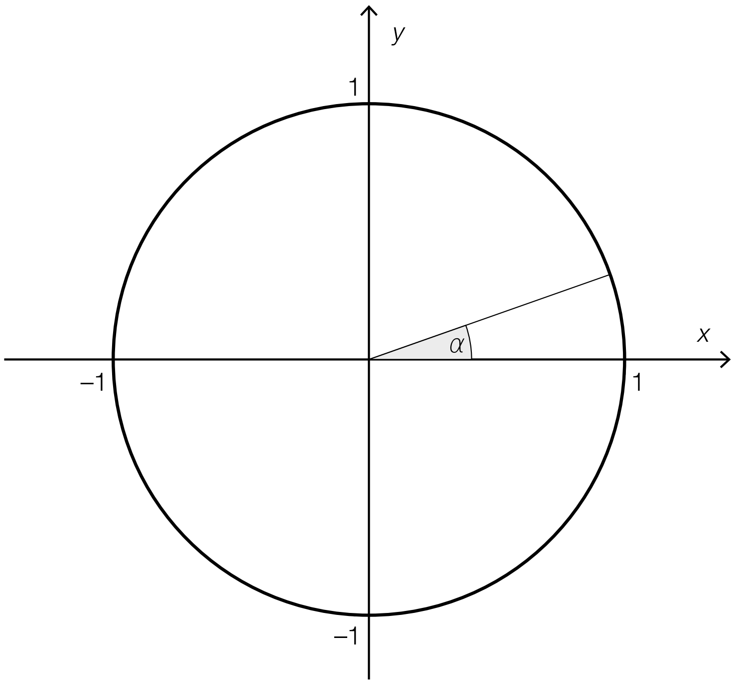


Prečnemu preseku je za osnovo graf funkcije f, pri $f(x) = \cos(x)$. Le-ta je predstavljen na naslednji sliki.



1) Na gornji sliki vpišite manjkajoče število v za to predvideno polje. *[1 točka]*

Na naslednji sliki je predstavljen neki kot α v enotskem krogu.



2) V gornji enotski krog vrišite tisti kot β, za katerega velja:
$\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ pri $\beta \neq \alpha$ in $0° \leq \beta \leq 360°$. *[1 točka]*

Naloga 6

Kontrola hitrosti

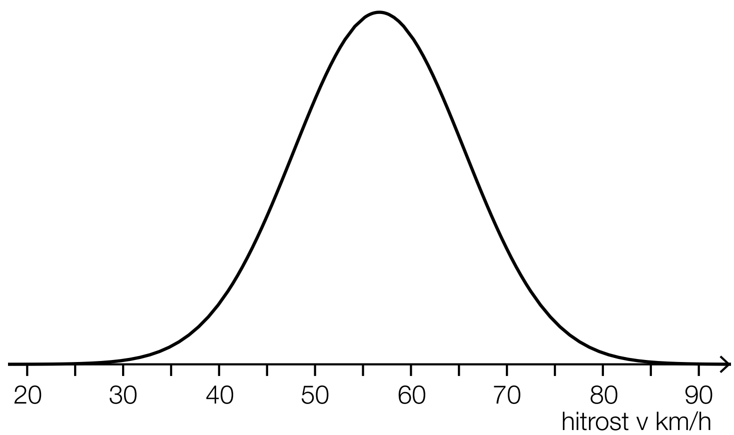
a) Verjetnost, da je na nekem določenem odseku Zahodne avtoceste na poti vozilo s prekoračeno hitrostjo, znaša 4 %.
Preverja se naključni vzorec 1 500 vozil.
Binomsko porazdeljena slučajna spremenljivka X podaja število tistih vozil, ki so tam na poti s prekoračeno hitrostjo.

1) Nastavite formulo za izračun verjetnosti, da je s prekoračeno hitrostjo na poti natanko a vozil tega naključnega vzorca.

$P(X = a) =$ ________________________________ *[1 točka]*

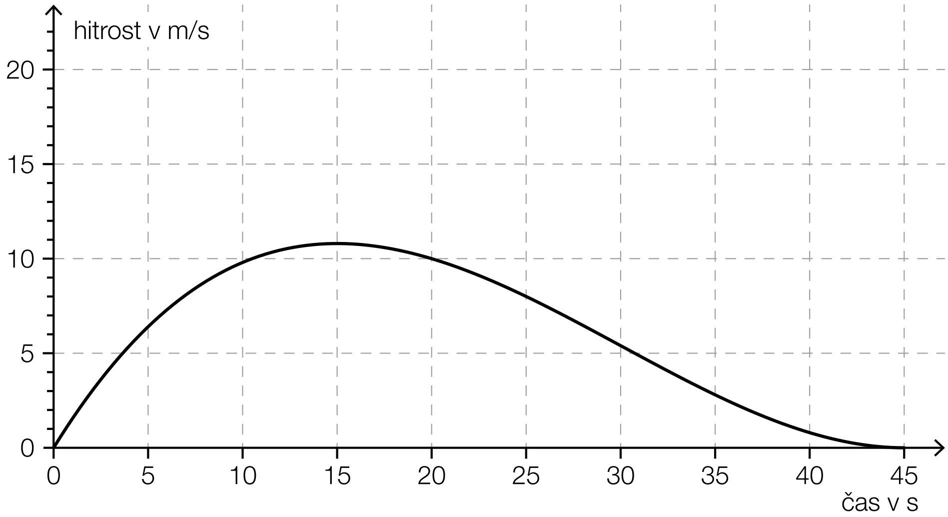
b) Privzema se, da so hitrosti vozil na nekem določenem mestu, kjer je dovoljena najvišja hitrost 50 km/h, približno normalno porazdeljene.

Na naslednji sliki je predstavljen graf pripadajoče funkcije gostote verjetnosti.



1) Na gornji sliki ponazorite verjetnost, da znaša hitrost več kot 15 km/h nad dovoljeno najvišjo hitrostjo 50 km/h. *[1 točka]*

c) V nadaljevanju predstavljeni graf približno prikazuje potek hitrosti nekega vozila, ki vozi v območju mesta.



1) Približno določite dolžino poti, opravljene v časovnem intervalu [0; 45]. *[1 točka]*

2) Odčitajte najvišjo hitrost avtomobila. Rezultat navedite v km/h. *[1 točka]*

Naloga 7 (del B)

Proizvodnja sira

Vodja proizvodnje neke majhne sirarne je podrobneje raziskal dnevne proizvodne stroške za eno določeno vrsto sira.

a) Za funkcijo mejnih stroškov K', ki pripada funkciji stroškov K, velja:

$K'(x) = 0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5$

x … proizvodna količina v kg
$K'(x)$ … mejni stroški pri proizvodni količini x v €/kg

Pri proizvodni količini 5 kg nastanejo skupni stroški 120 €.

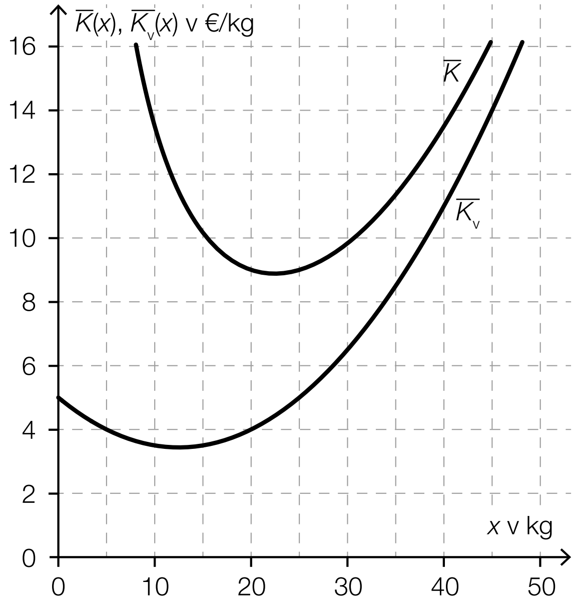
1) Nastavite enačbo pripadajoče funkcije stroškov K. *[1 točka]*

2) Izračunajte obračaj stroškov. *[1 točka]*

3) V dani vsebinski povezavi interpretirajte rezultat naslednjega izračuna.

$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$ *[1 točka]*

b) Na naslednji sliki sta predstavljena grafa funkcije stroškov na enoto $\overline{K}$ in funkcije variabilnih stroškov na enoto $\overline{K}_v$.



1) Iz zgornje slike odčitajte optimum obratovanja. Navedite pripadajočo enoto. *[1 točka]*

2) Iz zgornje slike odčitajte kratkoročno najnižjo ceno. Navedite pripadajočo enoto. *[1 točka]*

c) Dobiček je moč opisati z neko polinomsko funkcijo G.

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... prodajna količina v kg
$G(x)$ ... dobiček pri prodajni količini x v €

Pri prodajni količini 5 kg nastane 35 € izgube.
Pri prodajni količini 25 kg znaša dobiček 200 €.
Maksimalni dobiček je dosežen pri prodajni količini 30 kg in znaša 215 €.

1) Nastavite sistem enačb s katerim je moč določiti koeficiente za G. *[2 točki]*

2) Izračunajte te koeficiente. *[1 točka]*

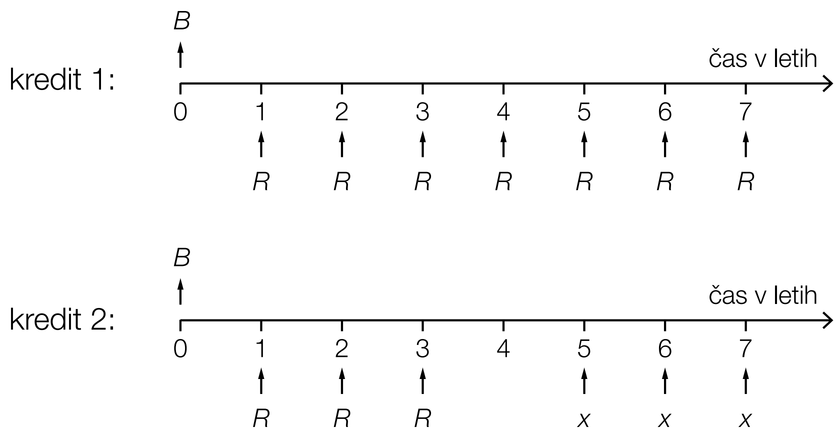
Naloga 8 (del B)

Kredit in hranilna knjižica

Pojma *kredit* in *hranilna knjižica* se v tej nalogi uporabljata v poenostavljeni obliki, brez upoštevanja pristojbin in davkov.

a) Časovni osi v nadaljevanju opisujeta vračilo 2 kreditov, ki sta po 7 letih popolnoma odplačana.

Pri obeh kreditih sta obrestni meri, višini kredita B in višini obrokov R vsakič enako visoki.



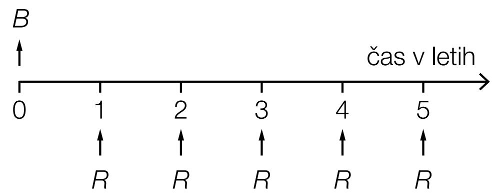
1) Utemeljite, da mora biti višina obroka x višja kot je višina obroka R. *[1 točka]*

Višina kredita B znaša 10.000 €. Obrestna mera znaša 3 % p. a.

2) Izračunajte višino obroka R. *[1 točka]*

3) Za kredit 2 izračunajte višino ostanka dolga v časovnem trenutku $t = 4$ leta. *[1 točka]*

b) Kredit v višini B se obrestuje z letno obrestno mero i.
Višina letnih obrokov znaša R.



Po tem, ko je odplačan prvi obrok R, znaša ostanek dolga B_1.

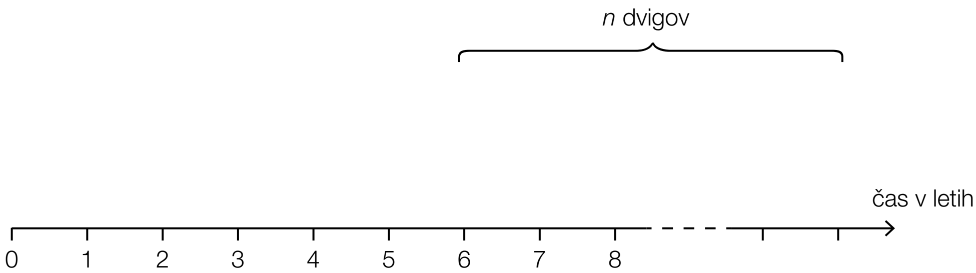
1) Nastavite formulo za izračun B_1 iz B, R in i.

B_1 = ____ *[1 točka]*

c) Nekdo vplačuje na hranilno knjižico v 4 zaporednih letih, vsakič ob začetku leta, znesek v višini 300 €. Obrestna mera znaša 1,5 % p. a.

Začenši 3 leta po zadnjem vplačilu, dvigne, vsakič letno, znesek v višini 150 €.
Skupno se zgodi n dvigov. Zadnji dvig pri tem sestoji iz 150 € in preostalega zneska x pri
0 € < x < 150 €.

1) Izpopolnite naslednjo časovno os tako, da bo prikazovala opisano vsebino. *[1 točka]*



Izvede se naslednji izračun:

$K = 300 \cdot 1{,}015^6 + 300 \cdot 1{,}015^5 + 300 \cdot 1{,}015^4 + 300 \cdot 1{,}015^3 \approx 1\,283{,}33$

2) Opišite pomen K v dani vsebinski povezavi. *[1 točka]*

3) Izračunajte število dvigov n. *[1 točka]*

Naloga 9 (del B)

Številčno stanje motornih vozil

Naslednja preglednica podaja številčno stanje motornih vozil v Avstriji, za izbrana leta v časovnem obdobju od 1992 do 2012, vsakič ob koncu leta.

konec leta ...	številčno stanje motornih vozil v milijonih
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Vir podatkov: Statistik Austria (izd.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Dunaj: Verlag Österreich 2014, str. 446.

a) Časovni razvoj številčnega stanja motornih vozil naj bo s podatki iz zgornje preglednice opisan z neko linearno regresijsko funkcijo K.

1) Ugotovite enačbo te linearne regresijske funkcije. Izberite $t = 0$ za konec leta 1992. *[1 točka]*

2) Interpretirajte vrednost vzpona te funkcije v dani vsebinski povezavi. *[1 točka]*

3) Izračunajte, po kolikšnem času je po tem modelu računati z 8 milijoni vozil. *[1 točka]*

b) Da bi časovni razvoj številčnega stanja motornih vozil opisali z nekim drugim matematičnim modelom, so bili, izhajajoč iz podatkov gornje preglednice, izvedeni naslednji izračuni.

$\sqrt[20]{\frac{6,3}{4,5}} = 1,0169...$

$1,0169... - 1 = 0,0169... \approx 1,7\ \%$

1) Interpretirajte pomen izračunanega števila 1,7 % v dani vsebinski povezavi. *[1 točka]*

Nekdo poleg tega računa:

$2 = 1,0169...^t$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,0169...)} = 41,20... \approx 41,2$

2) Interpretirajte pomen izračunanega števila 41,2 v dani vsebinski povezavi. *[1 točka]*

c) Številčno stanje motornih vozil ne more rasti neomejeno.

Časovni razvoj številčnega stanja motornih vozil je moč v nekem modelu omejene rasti opisati s funkcijo K_B:

$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... čas v letih, $t = 0$ za konec leta 1992
$K_B(t)$ ... številčno stanje motornih vozil ob času t v milijonih

Graf funkcije K_B naj poteka skozi podatkovni točki za leti 1992 in 2012.

1) Nastavite sistem enačb, s pomočjo katerega je moč izračunati parametra b in λ za funkcijo K_B. *[1 točka]*
2) Izračunajte parametra b in λ. *[1 točka]*
3) S pomočjo tega modela izračunajte prognozo za številčno stanje motornih vozil ob koncu leta 2020. *[1 točka]*

d) V nekem logističnem modelu je časovni razvoj številčnega stanja motornih vozil opisan s funkcijo K_L:

$$K_L(t) = \frac{22{,}5}{3 + 2 \cdot e^{-0{,}06264 \cdot t}}$$

t ... čas v letih, $t = 0$ za konec leta 1992
$K_L(t)$ ... številčno stanje motornih vozil ob času t v milijonih

1) Matematično utemeljite, da se po tem modelu številčno stanje motornih vozil dolgoročno približuje vrednosti 7,5 milijonov. *[1 točka]*