Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

5. maj 2020

Uporabna matematika

TAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge dela A in naloge dela B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na voljo imate skupno *270 minut* čistega delovnega časa.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni list, ki Vam je dan na razpolago. Svoje ime in letnik oz. Vaš razred vpišite na čelno stran zvezka z nalogami v za to predvideni polji, ter Vaše ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri reševanju vsake delne naloge na delovni list navedite njeno oznako (npr. 3d1).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Dovoljena je uporaba Zbirke formul za »SRDP« iz uporabne matematike, ki je potrjena za klavzurno delo (izpit) s strani pristojnega člana vlade. Nadalje je dovoljena uporaba elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije), če ni dana možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnih omrežij itd.) in ni možen dostop do lastnih podatkov v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je v izpitnem prostoru na razpolago za vpogled.

Smernice za reševanje

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljena funkcija tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno izpostaviti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami, če je to v navodilu za postopek izrecno zahtevano.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z Vašim imenom.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, kjer je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite želeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Velja naslednji ključ ocenjevanja:

44–48 točk	zelo dobro	Sehr gut
38–43 točk	dobro	Gut
31–37 točk	povoljno (zadovoljivo)	Befriedigend
23–30 točk	zadostno	Genügend
0–22 točk	nezadostno	Nicht genügend

Veliko uspeha!

Naloga 1

Eifflov stolp

Eifflov stolp je simbol Pariza.

a) Kovinska konstrukcija Eifflovega stolpa ima maso 7 300 ton, to je

$7{,}3 \cdot 10^{\boxed{}}$ kilogramov.

1) V zgornji okvirček vnesite manjkajoči eksponent. *[1 točka]*

Masa m je produkt gostote ϱ in prostornine V, torej $m = \varrho \cdot V$.
Kovina Eifflovega stolpa ima gostoto 7 800 kg/m^3.
Osnovna ploskev Eifflovega stolpa je kvadratna in ima dolžino stranice 125 m.

Predstavljajte si, da bi se kovinska konstrukcija Eifflovega stolpa stopila in se zlila v neki kvader z enako osnovno ploskvijo.

2) Izračunajte višino tega kvadra v centimetrih. *[2 točki]*

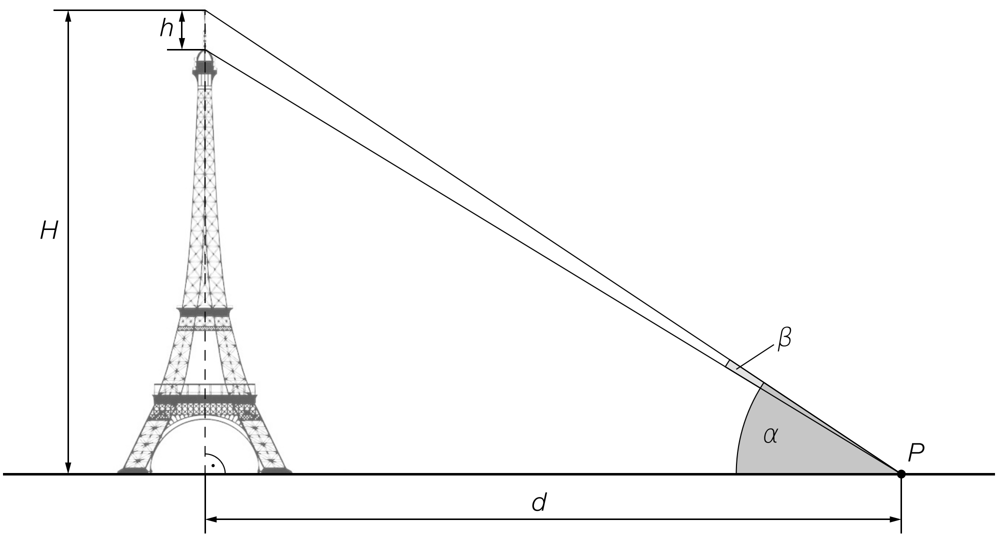
b) Leta 1950 je Eifflov stolp obiskalo okoli 1 027 000 oseb, leta 1980 pa okoli 3 594 000 oseb.

Za časovno obdobje od 1950 do 1980 je moč število oseb, ki so na leto obiskale Eifflov stolp, približno opisati z neko linearno funkcijo b.

t … čas v letih pri $t = 0$ za leto 1950
$b(t)$ … število oseb, ki so na leto obiskale Eifflov stolp, ob času t

1) Sestavite enačbo funkcije b. Izberite $t = 0$ za leto 1950. *[1 točka]*

c) Iz točke P vidimo najvišjo točko H metrov visokega Eifflovega stolpa pod višinskim kotom α in h metrov visoko konico pod vidnim kotom β (glej naslednjo sliko).



1) V naslednjem stavku dopolnite vrzeli v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezen del stavka tako, da nastane pravilna izjava. *[besedilo z luknjami]* *[1 točka]*

Višina ___①___ je podana z izrazom ___②___.

①	
H	☐
h	☐
$H - h$	☐

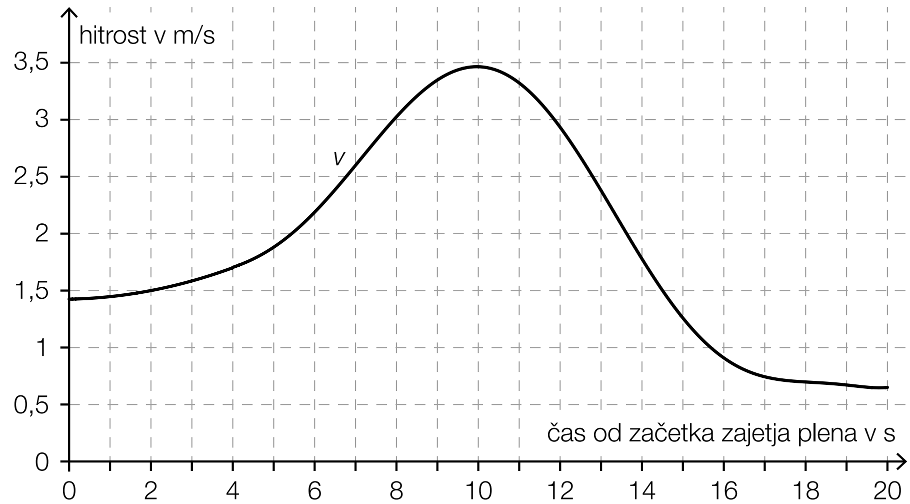
②	
$d \cdot \tan(\alpha + \beta)$	☐
$d \cdot \tan(\alpha - \beta)$	☐
$d \cdot \tan(\beta)$	☐

Naloga 2

Način prehranjevanja brazdastih kitov

Ko brazdasti kit sunkoma zajame plen, zajame s široko odprtim gobcem veliko količino vode in plena, ki se v njej nahaja. Raziskovalci/-ke so opazovali/-e ta način prehranjevanja. S pomočjo senzorjev so ugotovili hitrost brazdastega kita ob zajetju plena, velikost odprtine gobca in skupno prostornino vode, ki jo pri tem zajame.

a) Hitrost brazdastega kite ob zajetju plena, ki traja skupno 20 s, je moč približno opisati s funkcijo *v* (glej naslednjo sliko).



1) Ocenite dolžino tiste poti, ki je opravljena med zajetjem plena.

$s \approx$ ____________________ m *[1 točka]*

Neki raziskovalec trdi:
»Brazdasti kit pri tem zajetju doseže maksimalno hitrost 15 km/h.«

2) Dokažite, da je ta trditev napačna. *[1 točka]*

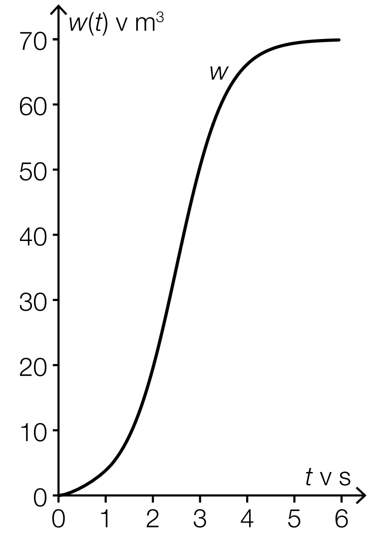
b) Velikost odprtine gobca brazdastega kita pri enem zajetju plena, je moč približno opisati s funkcijo *m*:

$$m(t) = \frac{1}{175} \cdot (-17 \cdot t^4 + 204 \cdot t^3 - 922{,}5 \cdot t^2 + 1\,863 \cdot t) \text{ pri } 0 \leq t \leq 6$$

t ... čas od začetka odprtja gobca v s
$m(t)$ ... velikost odprtine gobca ob času t v m^2

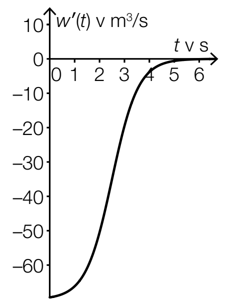
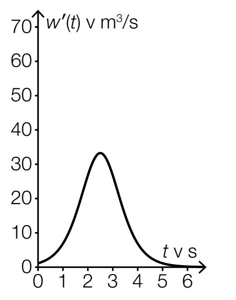
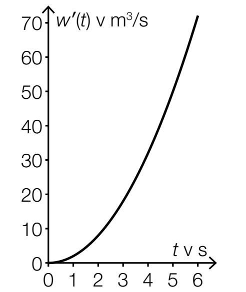
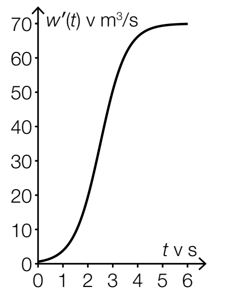
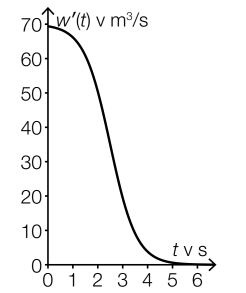
1) Določite maksimalno velikost odprtine gobca. *[1 točka]*

c) Funkcija *w* približno opisuje celotno prostornino vode, ki jo brazdasti kit zajame med enim zajetjem plena (glej naslednjo sliko).



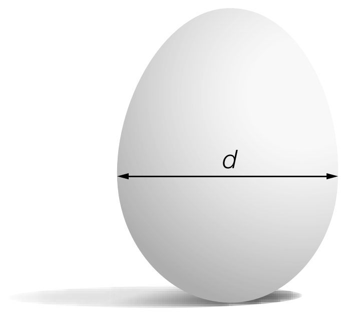
t ... čas od začetka zajetja vode v s
$w(t)$ ... celotna zajeta prostornina vode do časa *t* v m^3

1) S križcem označite graf pripadajoče funkcije odvoda w'. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

	☐		☐
	☐		☐
	☐		

Naloga 3

Čas kuhanja jajc



Fizik Werner Gruber je eksperimentiral s kokošjimi jajci.
Ugotovil je, da je čas kuhanja jajc med drugim odvisen od:

- premera jajca d (glej desno sliko)
- temperature skladiščenja x pred kuhanjem

Vir podatkov: Gruber, Werner: *Die Genussformel. Kulinarische Physik.* Salzburg: Ecowin 2008, str. 79–84.

a) Neko jajce bi radi mehko skuhali. Čas kuhanja je moč, v odvisnosti od premera d, pod določenimi pogoji, približno opisati s kvadratno funkcijo W:

$W(d) = a \cdot d^2$

d ... premer jajca v mm
$W(d)$ ... čas kuhanja pri premeru d v min
a ... pozitivni parameter

Pri premeru 45 mm znaša čas kuhanja 5 min.

1) Določite parameter a. *[1 točka]*

Mehko skuhamo dve jajci z različnima premeroma. Premer jajca B je za 10 % večji od premera jajca A.

2) Pokažite, da je čas kuhanja jajca B za več kot 10 % daljši od časa kuhanja jajca A. *[1 točka]*

b) Kvadratna funkcija Z približno opisuje čas kuhanja mehko kuhanega jajca v odvisnosti od skladiščne temperature:

$Z(x) = -0{,}024 \cdot x^2 - 2{,}16 \cdot x + 252$

x ... skladiščna temperatura v °C
$Z(x)$ ... čas kuhanja pri skladiščni temperaturi x v s

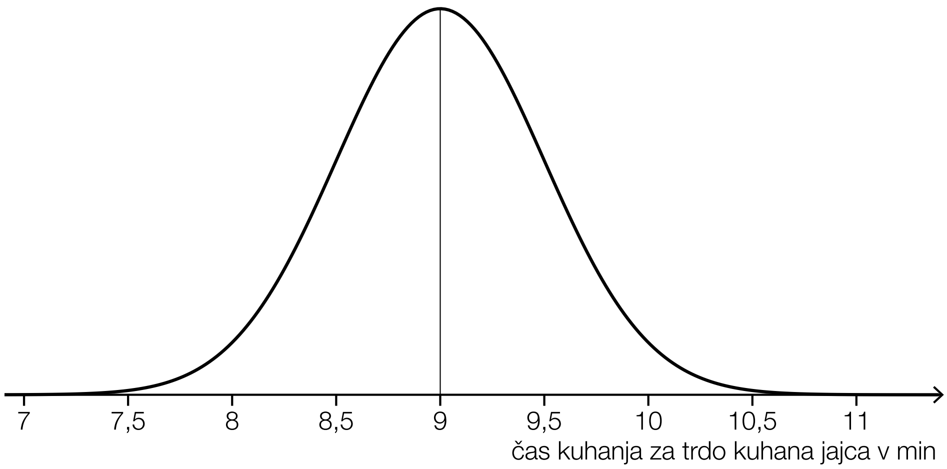
Neko jajce je, namesto pri temperaturi 4 °C (temperatura v hladilniku), skladiščeno pri temperaturi 20 °C (sobna temperatura).

1) Ugotovite, za koliko sekund je s tem krajši čas kuhanja. *[1 točka]*

c) Čas kuhanja za mehko kuhana jajca je pod določenimi pogoji približno normalno porazdeljen s pričakovano vrednostjo $\mu = 5{,}5$ min in standardnim odklonom $\sigma = 0{,}35$ min.

1) Ugotovite tisti simetrični interval okrog pričakovane vrednosti, v katerem za neko slučajno izbrano jajce čas kuhanja leži z verjetnostjo 90 %. *[1 točka]*

Čas kuhanja za trdo kuhana jajca je pod določenimi pogoji približno normalno porazdeljen s pričakovano vrednostjo $\mu = 9$ min in standardnim odklonom $\sigma = 0{,}5$ min. Graf pripadajoče funkcije gostote verjetnosti je predstavljen na naslednji sliki.



X ... čas kuhanja za trdo kuhana jajca v min

2) S križcem označite izjavo, ki <u>ne ustreza</u> tej funkciji gostote verjetnosti. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

$P(X \geq 9) = 0{,}5$	☐
$P(X \geq 10) = P(X \leq 8)$	☐
$P(8{,}5 \leq X \leq 9{,}5) \approx 0{,}68$	☐
$P(8 \leq X \leq 10) = 1 - P(X \geq 10)$	☐
$P(7 \leq X \leq 11) \approx 1$	☐

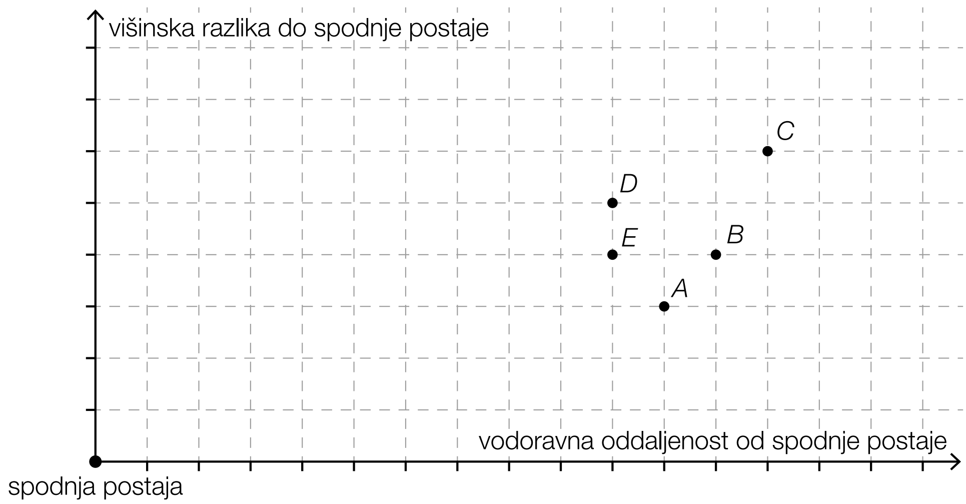
Naloga 4

Tirne vzpenjače

Vagoni tirnih vzpenjač vozijo po tirih in lahko premagujejo velike vzpone.

a) Neka določena tirna vzpenjača ima konstanten vzpon 40 %. Potek proge tirov te vzpenjače naj bi predstavili v spodnjem koordinatnem sistemu.

Obe osi koordinatnega sistema imata enaki velikosti enote.
Spodnja postaja vzpenjače leži v koordinatnem izhodišču.
Samo ena točka izmed *A*, *B*, *C*, *D* in *E* pride v poštev za zgornjo postajo vzpenjače.

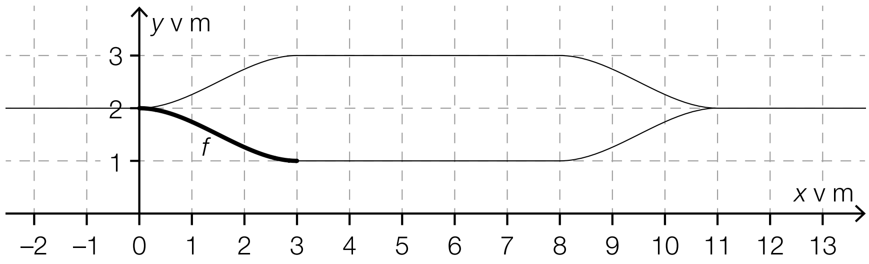


1) S križcem označite tisto točko, ki pride v poštev za zgornjo postajo. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	☐

2) Izračunajte, katero višinsko razliko premaga vagon te vzpenjače, če od spodnje postaje do zgornje postaje opravi pot 180 m. *[1 točka]*

b) Pri večini tirnih vzpenjač je na sredini proge izogibališče, na katerem se lahko navzdol vozeči vagon izogne navzgor vozečemu vagonu.
Na naslednji sliki je tako izogibališče modelno prikazano.



Graf funkcije f se na mestih 0 in 3 nezlomljeno priključi narisanim delom premice.
»Nezlomljeno« pomeni, da imata funkciji na teh mestih, na kateri se njuna grafa med seboj združita, enaki funkcijski vrednosti in enaka naklona.

Za funkcijo f velja:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x, $f(x)$ … koordinate v m

Koeficiente a, b, c in d je moč izračunati s pomočjo sistema linearnih enačb. Nastavek za dve od potrebnih enačb se glasi:

$27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{}$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{}$

1) S pomočjo gornje slike izpopolnite obe enačbi, s tem ko vsakič vpišete manjkajoče število v zato predviden okvirček. *[2 točki]*

2) Iz gornje slike odčitajte vrednost koeficienta d. *[1 točka]*

c) Promet vodilnega podjetja na svetovnem tržišču tirnih vzpenjač je v poslovnem letu 2015/16 znašal okroglo 834 milijonov evrov in je bil s tem za 5,04 % nad prometom v poslovnem letu 2014/15.

1) Izračunajte promet v poslovnem letu 2014/15, v milijonih evrov. *[1 točka]*

Naloga 5

Psi-testi

Pred mnogimi leti je družba za znanstveno raziskovanje paraznanosti GWUP (*Gesellschaft zur wissenschaftlichen Untersuchung von Parawissenschaften e. V.*) razpisala denarno nagrado za dokaz neke paranormalne (nadnaravne) sposobnosti.
Zatrjevane sposobnosti testirane osebe se pri tem preverjajo z različnimi testi.

a) Neka testirana oseba mora na osnovi svojih paranormalnih sposobnosti navesti, pod katero od 10 škatel je skrit kozarec vode. Poskus se izvede 13-krat, pri čemer se kozarec vode vsakič na novo skrije. Da uspešno opravi testno fazo, mora biti pri 13 izvedbah poskusa doseženih 7 ali več zadetkov.

Privzema se, da testirana oseba nima paranormalnih sposobnosti in zato pri vsaki izvedbi poskusa zadene z verjetnostjo 10 %.

1) Izračunajte pričakovano vrednost za število zadetkov. *[1 točka]*

2) Pokažite, da je bolj verjetno, da ta testirana oseba doseže vsaj en zadetek, kot pa da ne doseže sploh nobenega zadetka. *[1 točka]*

3) Ugotovite verjetnost, da testirana oseba testno fazo opravi. *[1 točka]*

b) Neka testirana oseba mora na osnovi svojih paranormalnih sposobnosti navesti, če v nekem kablu teče el. tok ali ne. Ta poskus se izvede 50-krat. Da opravi testno fazo, mora biti pri 50 izvedbah poskusa doseženih 40 ali več zadetkov.

Privzema se, da testirana oseba nima paranormalnih sposobnosti in zato pri vsaki izvedbi poskusa zadene z verjetnostjo 50 %.

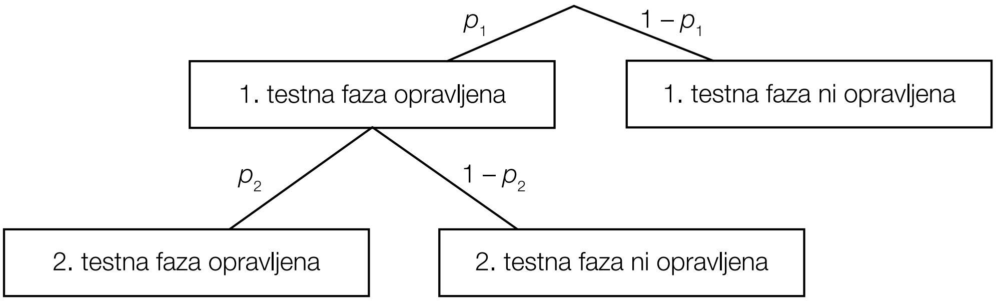
1) Obema dogodkoma priredite vsakič ustrezno verjetnost izmed A do D. *[2 proti 4]* *[1 točka]*

Testirana oseba doseže najmanj 40 zadetkov.	
Testirana oseba doseže največ 20 zadetkov.	

A	$\sum_{k=20}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
B	$\sum_{k=0}^{20} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
C	$\sum_{k=0}^{40} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
D	$\sum_{k=40}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$

c) Če testirana oseba opravi 1. testno fazo, mora ta testirana oseba, da bi dobila denarno nagrado, prav tako opraviti še 2. testno fazo.

Ta vsebinska povezava je predstavljena v naslednjem drevesnem diagramu.



1) S pomočjo p_1 in p_2 sestavite formulo za izračun verjetnosti, da testirana oseba ne dobi denarne nagrade.

P(„testirana oseba ne dobi denarne nagrade“) = ________________ *[1 točka]*

Naloga 6 (del B)

Socialni transferji

Socialni transferji so denarna sredstva, ki jih država nudi (daje) osebam v določenih življenjskih situacijah.

V naslednji preglednici so navedeni socialni transferji v Avstriji za izbrana leta v časovnem obdobju od 1990 do 2015 (vrednosti zaokrožene).

leto	socialni transferji v milijardah evrov
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Vir podatkov: Statistik Austria (izd.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Dunaj: Verlag Österreich 2016, str. 224.

a) Socialne transferje v letih od 1990 približno opišimo z neko linearno funkcijo v odvisnosti od časa t.

1) Določite enačbo pripadajoče linearne regresijske funkcije S_1.
Izberite $t = 0$ za leto 1990. *[1 točka]*

2) V dani vsebinski povezavi interpretirajte vrednost naklona (smernega koeficienta) funkcije S_1. *[1 točka]*

3) S pomočjo S_1 določite prognozo za socialne transferje v letu 2020. *[1 točka]*

b) 1) V dani vsebinski povezavi interpretirajte rezultat naslednjega izračuna:
$\sqrt[5]{\frac{87,8}{71,2}} - 1 \approx 0,043$ *[1 točka]*

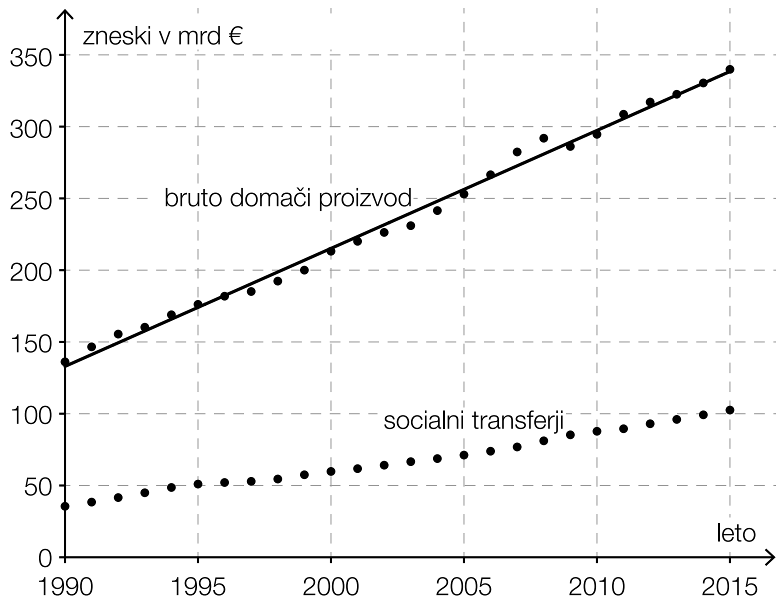
Neka znanstvenica družboslovnih znanosti izhaja iz predpostavke, da socialni transferji v Avstriji od leta 2015 letno narastejo za 2,5 % glede na vsakokratno predhodno leto.

Opišimo ta model s funkcijo S_2.

t ... čas od 2015 v letih
$S_2(t)$ ... socialni transferji v času t v milijardah evrov

2) Nastavite enačbo funkcije S_2.
Izberite $t = 0$ za leto 2015. *[1 točka]*

c) Na naslednji sliki sta predstavljena bruto domači proizvod in socialni transferji v Avstriji v časovnem obdobju od 1990 do 2015.
Nadalje je vrisana regresijska premica za bruto domači proizvod za to obdobje.

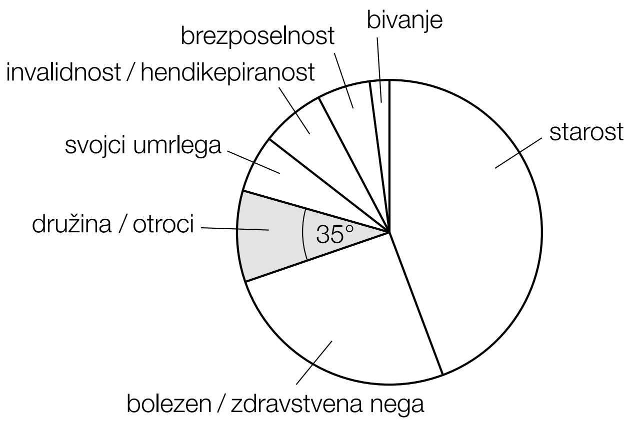


1) Določite vrednost vzpona regresijske premice za bruto domači proizvod. *[1 točka]*

Socialna kvota je razmerje med socialnimi transferji in bruto domačim proizvodom.

2) Ugotovite socialno kvoto za leto 2015. *[1 točka]*

d) Porazdelitev socialnih transferjev, skupno 102,5 milijard evrov za leto 2015, je predstavljena na naslednji sliki. Označeno je področje »družina / otroci«.



1) Ugotovite znesek, ki je bil v letu 2015 potrošen za področje »družina / otroci«. *[1 točka]*

Naloga 7 (del B)

Proizvodnja sadnih sokov

Neko podjetje proizvaja sadni sok *Mangomix*.

a) Stroške pri proizvodnji sadnega soka *Mangomix* je moč opisati s funkcijo stroškov po zakonu donosnosti K:

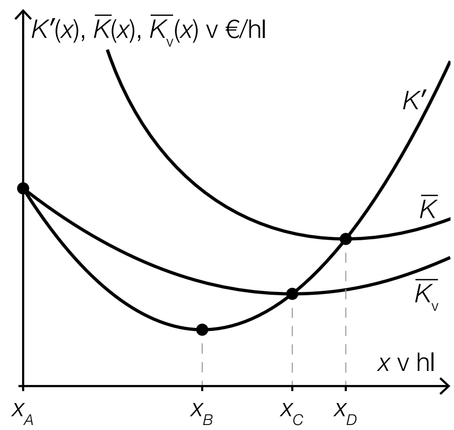
$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1\,215$

x ... količina proizvodnje v hl
$K(x)$ ... stroški pri količini proizvodnje x v €

O stroškovni funkciji je znano:
I: Mejni stroški pri količini proizvodnje 25 hl znašajo 30 €/hl.
II: $K''(25) = 0$

1) Sestavite enačbo, ki opisuje pogoj I. *[1 točka]*
2) V dani vsebinski povezavi interpretirajte pomen števila 25 v enačbi II. *[1 točka]*
3) Izračunajte koeficienta a in b. *[1 točka]*

b) Na naslednji sliki so za sadni sok *Mangomix* predstavljeni grafi mejne funkcije stroškov K', funkcije povprečnih stroškov $\overline{K}$ in funkcije povprečnih variabilnih stroškov $\overline{K}_v$.
Na vodoravni osi so označene štiri količine proizvodnje x_A do x_D.



1) Obema pojmoma vsakič priredite ustrezno količino proizvodnje izmed A do D. *[2 proti 4]* *[1 točka]*

obračaj stroškov	
minimum obratovanja	

A	količina proizvodnje x_A
B	količina proizvodnje x_B
C	količina proizvodnje x_C
D	količina proizvodnje x_D

c) Izkupiček pri prodaji sadnega soka *Mangomix* je moč opisati s kvadratno funkcijo E:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ pri $x \geq 0$

x ... količina prodaje v hl
$E(x)$ ... izkupiček pri količini prodaje x v €

1) V naslednjem stavku dopolnite vrzeli v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezen del stavka tako, da nastane pravilna izjava. *[besedilo z luknjami]*. *[1 točka]*

Koeficient a mora biti ______①______, ker za graf funkcije E velja, da ______②______.

①	
pozitiven	☐
negativen	☐
enak nič	☐

②	
gre skozi izhodišče	☐
nima obračaja (prevoja)	☐
je navzdol odprt	☐

2) Dokažite, da je maksimalni izkupiček dosežen pri količini prodaje $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$. *[1 točka]*

d) Mejni dobiček za sadni sok *Mangomix* je moč opisati s funkcijo G':

$G'(x) = -0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$

x ... količina prodaje v hl
$G'(x)$ ... mejni dobiček pri količini prodaje x v €/hl

1) Ugotovite tisto količino prodaje, pri kateri je dosežen maksimalni dobiček. *[1 točka]*

Fiksni stroški znašajo 1.215 €.

2) Sestavite enačbo pripadajoče funkcije dobička G, ob upoštevanju fiksnih stroškov. *[1 točka]*

Ugotoviti je treba tisto območje za količino prodaje, v katerem znaša dobiček najmanj 1.000 €.

3) Ugotovite to območje. *[1 točka]*

Naloga 8 (del B)

Parkirna garaža

Neko gradbeno podjetje gradi parkirno garažo.
Pedpostavlja se obdobje uporabe 40 let.
Gradbeno podjetje računa z obračunsko obrestno mero 4 % p. a.

a) Gradbeno podjetje računa z letnimi postnumerandnimi obratovalnimi stroški v višini vsakič 64.000 €.

1) Izračunajte začetno vrednost obratovalnih stroškov za celotno obdobje uporabe. *[1 točka]*

b) Stroški vzdrževanja (v €) se načrtujejo kot W_1 po desetih letih, W_2 po dvajsetih letih in W_3 po tridesetih letih.

1) S pomočjo W_1, W_2 in W_3 sestavite formulo za izračun začetne vrednosti B skupnih stroškov vzdrževanja.

B = ____ *[1 točka]*

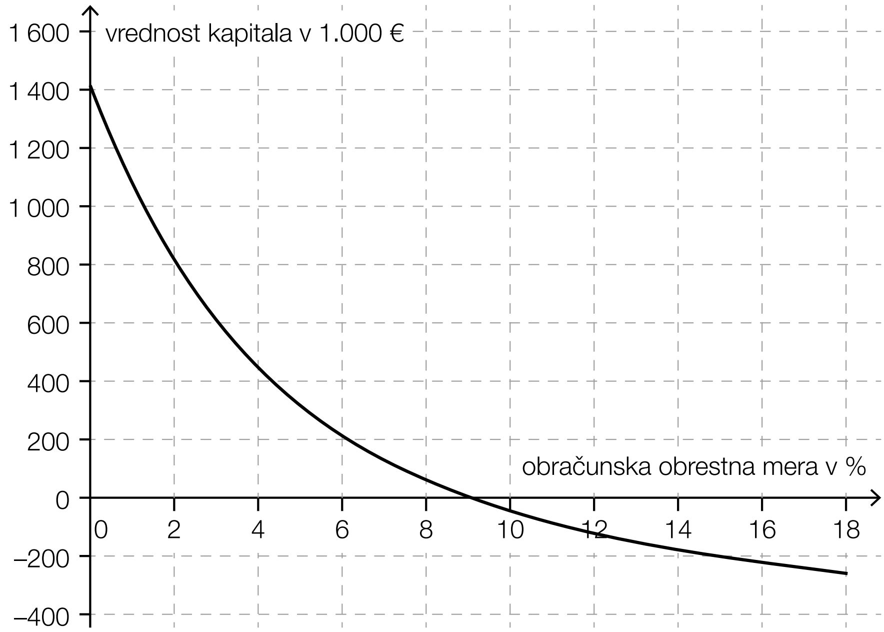
W_1 in W_2 se načrtujeta na vsakič po 60.000 €. Začetna vrednost B znaša 92.582,56 €.

2) Izračunajte W_3. *[1 točka]*

c) Mesečna najemnina za eno parkirno mesto v parkirni garaži se načrtuje na 105 €.
Parkirna garaža ima 120 parkirnih mest.
Gradbeno podjetje računa z mesečnim prihodkom najemnin v višini 10.080 €.
Stopnja obremenitve navaja koliko odstotkov garažnih parkirnih mest je oddanih v najem.

1) Ugotovite stopnjo obremenitve parkirne garaže, s katero računa gradbeno podjetje. *[1 točka]*

d) Na naslednji sliki je za parkirno garažo predstavljena vrednost kapitala (v 1.000 €), v odvisnosti od obračunske obrestne mere (v odstotkih):



1) Iz gornje slike odčitajte vrednost kapitala za obračunsko obrestno mero 4 %. Rezultat navedite v evrih.

vrednost kapitala: ____________________ € *[1 točka]*

Gradbeno podjetje zniža stroške nabave parkirne garaže za 200.000 €.

2) Utemeljite, zakaj s tem interna obrestna mera naraste na več kot 10 %. *[1 točka]*