Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

16. september 2020

Uporabna matematika

TAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge dela A in naloge dela B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na voljo imate skupno *270 minut* čistega delovnega časa.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni list, ki Vam je dan na razpolago. Svoje ime in letnik oz. Vaš razred vpišite na čelno stran zvezka z nalogami v za to predvideni polji, ter Vaše ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri reševanju vsake delne naloge na delovni list navedite njeno oznako (npr. 3d1).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Dovoljena je uporaba Zbirke formul za »SRDP« iz uporabne matematike, ki je potrjena za klavzurno delo (izpit) s strani pristojnega člana vlade. Nadalje je dovoljena uporaba elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije), če ni dana možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnih omrežij itd.) in ni možen dostop do lastnih podatkov v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je v izpitnem prostoru na razpolago za vpogled.

Smernice za reševanje

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljena funkcija tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno izpostaviti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami, če je to v navodilu za postopek izrecno zahtevano.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z Vašim imenom.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, kjer je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v željeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite željeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Velja naslednji ključ ocenjevanja:

44–48 točk	zelo dobro	Sehr gut
38–43 točk	dobro	Gut
31–37 točk	povoljno (zadovoljivo)	Befriedigend
23–30 točk	zadostno	Genügend
0–22 točk	nezadostno	Nicht genügend

Veliko uspeha!

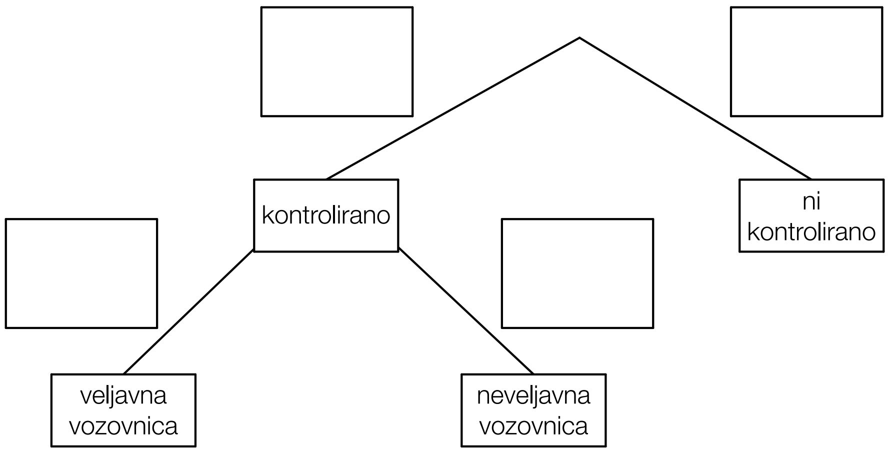
Naloga 1

Vozovnice

a) V letu 2016 je bilo z *Wiener Linien* prepeljanih skupno 954,2 milijonov potnikov.
Pri 6,6 milijonih potnikov so bile kontrolirane vozovnice.
1,7 % od teh 6,6 milijonov potnikov ni imelo veljavne vozovnice.

Spodnji drevesni diagram naj prikazuje gornjo povezavo.

1) V ta drevesni diagram vstavite manjkajoče verjetnosti. *[1 točka]*



V nekem preprostem modelu izhajamo iz tega, da te verjetnosti tudi v naslednjih letih ostajajo enake.

2) Izračunajte verjetnost, da je slučajno izbrani potnik kontroliran in nima veljavne vozovnice. *[1 točka]*

b) Glede na izkušnje je človek pri neki vožnji na določeni progi podzemne železnice (*U-Bahn-Linie*) kontroliran z verjetnostjo 2,5 %.

Neka oseba se 300 krat pelje po tej progi podzemne železnice.

1) Obema verjetnostma priredite vsakič ustrezni dogodek izmed A do D. *[2 proti 4]* *[1 točka]*

$\binom{300}{2} \cdot 0{,}975^{298} \cdot 0{,}025^{2}$	
$1 - \binom{300}{1} \cdot 0{,}975^{299} \cdot 0{,}025^{1} - \binom{300}{0} \cdot 0{,}975^{300} \cdot 0{,}025^{0}$	

A	Osebo se natanko dvakrat kontrolira.
B	Osebe se natanko dvakrat ne kontrolira.
C	Osebe se vsaj dvakrat ne kontrolira.
D	Osebo se vsaj dvakrat kontrolira.

c) Za neko javno prevozno sredstvo se je nekega dne prodalo 150 000 vozovnic.
Vozovnica s polno ceno stane 2,60 €, znižana vozovnica pa 1,20 €.
S prodajo x vozovnic s polno ceno in y vozovnic po znižani ceni, se je tega dne prejelo skupno 337.500 €.

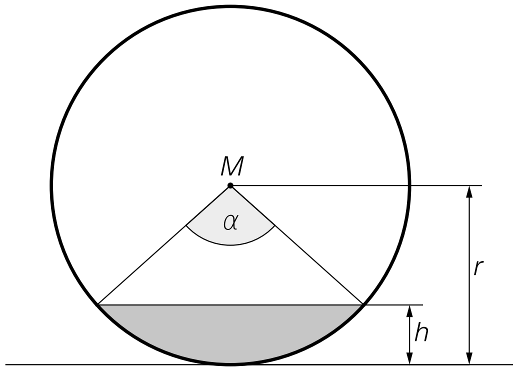
1) Nastavite sistem enačb za izračun x in y. *[1 točka]*

2) Izračunajte x in y. *[1 točka]*

Naloga 2

Okrog ogrevanja

a) Naslednja slika prikazuje vodoravno postavljeni oljni rezervoar valjaste oblike, v pogledu od spredaj. Točka M je središče predstavljenega kroga s polmerom r.



1) S pomočjo r in α nastavite formulo za izračun polnilne višine h.

$h =$ ____ *[1 točka]*

Za prostornino V nekega 2 m dolgega oljnega rezervoarja velja:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot 2$

2) Izračunajte za koliko odstotkov bi bila prostornina večja, če bi bil polmer večji za 20 %. *[1 točka]*

b) Neko ogrevanje prične ob 15. uri greti neki bivalni prostor. Od tega trenutka dalje je moč temperaturo prostora opisati s funkcijo T.

$T(t) = 24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... trajanje gretja v h pri $t = 0$ za ob 15. uri
$T(t)$ ... temperatura prostora pri trajanju gretja t v °C

1) Določite temperaturo prostora ob 15. uri. *[1 točka]*

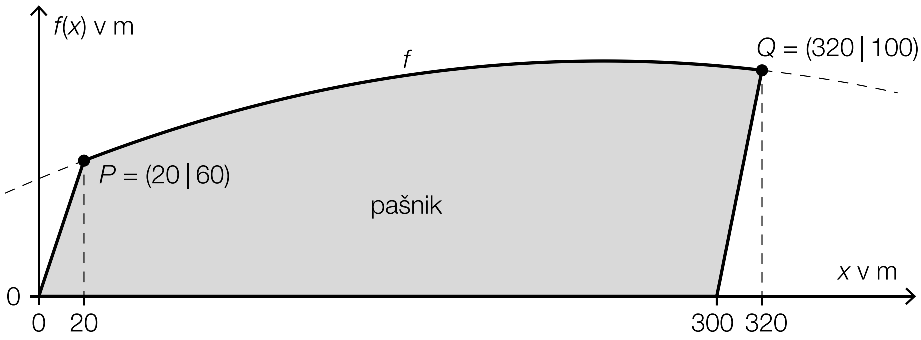
Ob 16. uri znaša temperatura prostora 21 °C.

2) Izračunajte parameter λ. *[1 točka]*

Naloga 3

Krave na pašniku

a) Na naslednji sliki je modelno predstavljen neki pašnik. Zgornjo mejno črto je moč opisati s pomočjo funkcije f. Druge tri mejne črte potekajo premočrtno.



1) S pomočjo f nastavite formulo za izračun ploščine A tega pašnika.

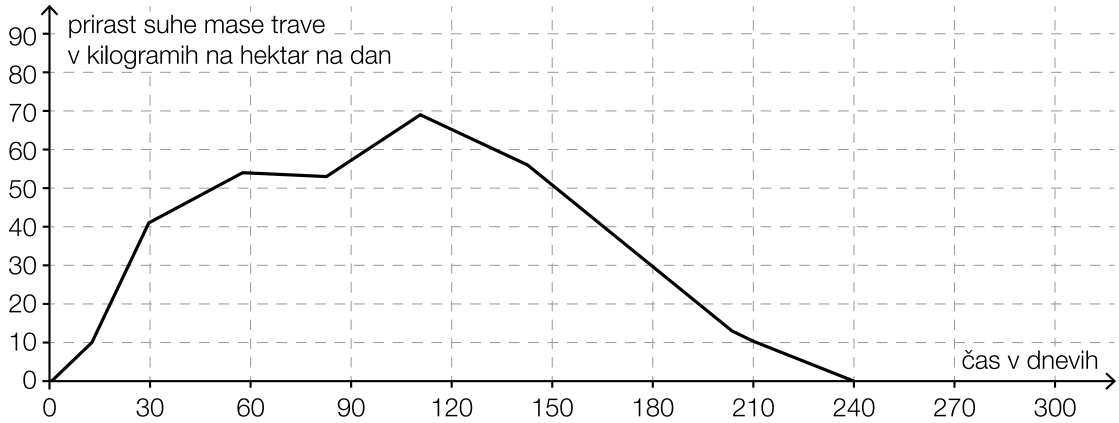
A = ____ *[1 točka]*

Za funkcijo f velja: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 52$

2) Ob uporabi koordinat, ki so navedene na gornji sliki, nastavite sistem enačb za izračun koeficientov a in b. *[1 točka]*

b) Da bi ugotovili koliko krav je lahko na pašniku, je pomemben prirast suhe mase trave na tem pašniku.

Za neki določeni pašnik je bil na osnovi večletnih meritev sestavljan graf, predstavljen v nadaljevanju.



1 hektar (ha) = 10 000 m^2

1) V naslednjem stavku dopolnite vrzeli v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezni del stavka tako, da nastane pravilna izjava. *[Besedilo z luknjami]* *[1 točka]*

V časovnem intervalu [0; 240] daje ta pašnik okoli ____①____ ____②____ suhe mase trave.

①	
90	☐
900	☐
9 000	☐

②	
kg/m^2	☐
kg/ha	☐
t/ha	☐

c) Telesna velikost goveda se opisuje s tako imenovano *višino vihra* (*Widerristhöhe*).

Neka kmetica goji pasmo goveda, za katero se višina vihra v odvisnosti od starosti modelno opisuje s funkcijo h.

$h(t) = 0{,}0024 \cdot t^3 - 0{,}19 \cdot t^2 + 5{,}73 \cdot t + 73$ pri $1 \leq t \leq 24$

t … starost v mesecih
$h(t)$ … višina vihra pri govedu v starosti t v cm

1) Izračunajte starost, pri kateri se po tem modelu doseže višina vihra 115 cm. *[1 točka]*

2) S pomočjo 2. odvoda funkcije h dokažite, da je graf funkcije h v celotnem definicijskem območju [1; 24] negativno ukrivljen. *[1 točka]*

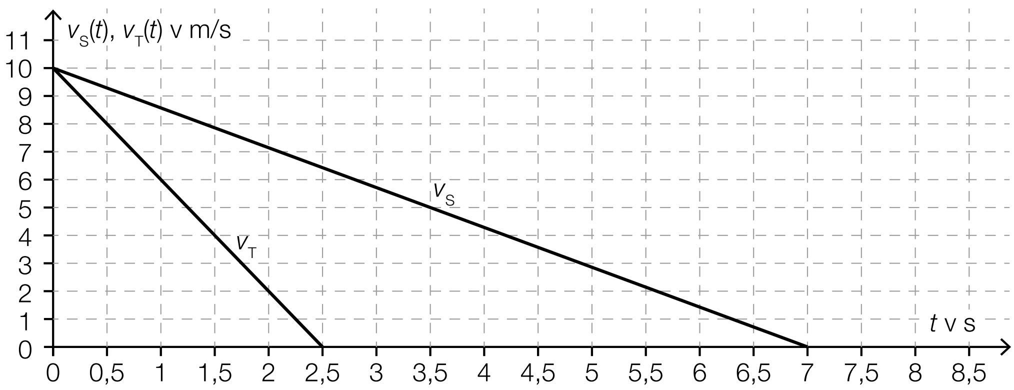
Velja: $h'(12) \approx 2{,}2$

3) V dani vsebinski povezavi interpretirajte vrednost 2,2. Pri tem navedite pripadajočo enoto. *[1 točka]*

Naloga 4

Zimske razmere vozišč v cestnem prometu

a) Med seboj primerjamo zavorni poti osebnega avtomobila na s snegom pokritem vozišču ter na suhem vozišču.
Naslednji diagram hitrosti v odvisnosti od časa modelno prikazuje časovni potek hitrosti v_S na s snegom pokritem vozišču, kakor tudi časovni potek hitrosti v_T na suhem vozišču, od odziva zavore do zaustavitve osebnega avtomobila.



1) S pomočjo gornjega diagrama določite (negativni) pospešek na s snegom pokritem vozišču. *[1 točka]*

Zavorna pot je tista pot, ki jo osebni avtomobil opravi od odziva zavore (t = 0) do zaustavitve.

2) V gornjem diagramu ponazorite zavorno pot na suhem vozišču. *[1 točka]*

3) S pomočjo gornjega diagrama določite razliko med zavorno potjo na s snegom pokritem vozišču in zavorno potjo na suhem vozišču. *[1 točka]*

b) Na neki ravni testni progi se z dvema osebnima avtomobiloma izvajajo poskusi zaviranja. Oba osebna avtomobila pri tem vozita v isti smeri. V prvih 5 sekundah postopka zaviranja se merijo oddaljenosti obeh osebnih avtomobilov od markirne črte. Te oddaljenosti je moč približno opisati z naslednjima funkcijama.

$s_A(t) = -2 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 12$
$s_B(t) = -2 \cdot t^2 + 24 \cdot t$

t ... čas v s
$s_A(t)$ ... oddaljenost osebnega avtomobila A od markirne črte ob času t v m
$s_B(t)$ ... oddaljenost osebnega avtomobila B od markirne črte ob času t v m

1) Izračunajte oddaljenost osebnega avtomobila A od markirne črte ob času $t = 2$. *[1 točka]*

2) Pokažite, da osebni avtomobil A ob času $t = 3$ vozi počasneje kot osebni avtomobil B. *[1 točka]*

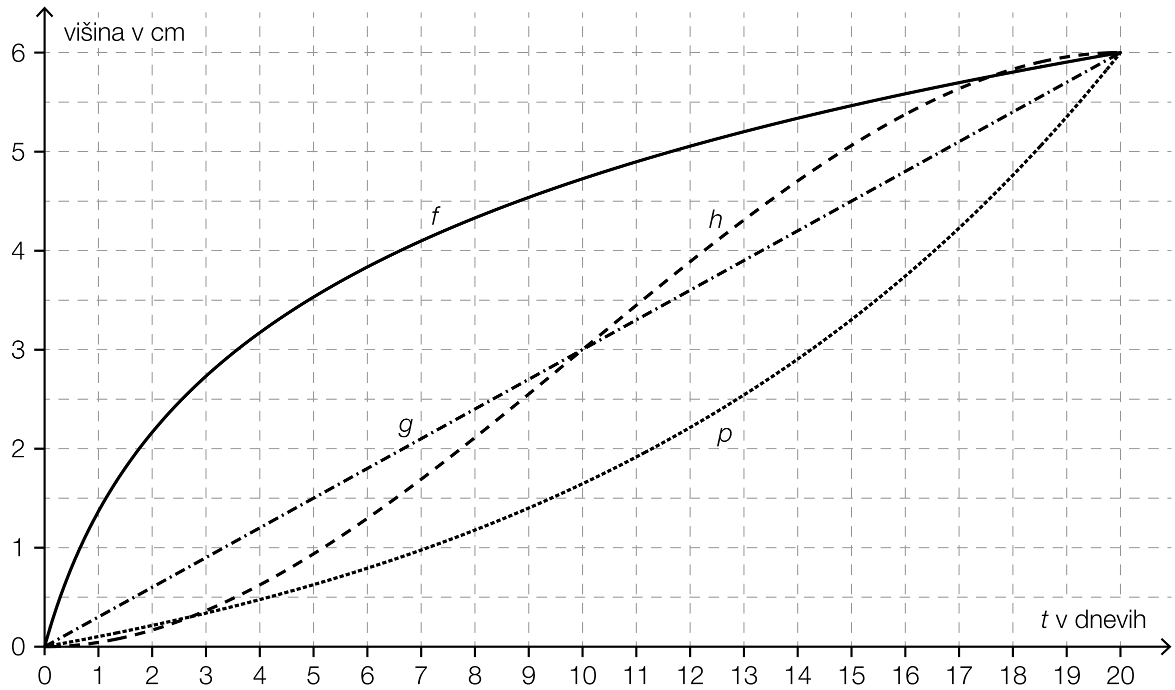
Naloga 5

Rast rastlin

a) V časovnem obdobju 20 dni je bil opazovan razvoj višine štirih različnih rastlin in ga je moč vsakič približno opisati s funkcijo f, g, h oz. p.

t ... čas od začetka opazovanja v dnevih
$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $p(t)$ ... višina ustrezne rastline ob času t v cm

Naslednja slika prikazuje grafe teh štirih funkcij.



Ob času $t = 20$ so te štiri rastline enako visoke.

1) S pomočjo gornje slike ugotovite povprečno hitrost spreminjanja višine v centimetrih na dan v časovnem intervalu [0; 20]. *[1 točka]*

2) Obema izjavama priredite vsakič ustrezno funkcijo izmed A do D. *[2 proti 4]* *[1 točka]*

V časovnem intervalu [0; 20] je 1. odvod strogo monotono naraščajoč.	
V časovnem intervalu [0; 20] je 2. odvod vedno negativen.	

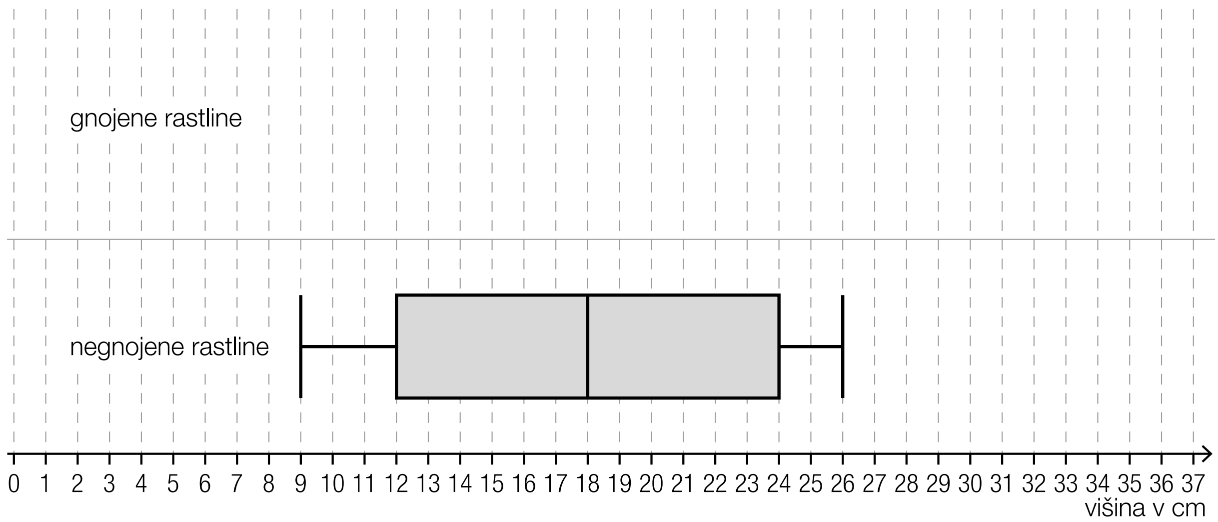
A	f
B	g
C	h
D	p

b) Proučuje se višina rastlin neke določene rastlinske vrste, pri čemer so nekatere rastline redno gnojene, druge pa ne. Po nekem določenem času se izmerijo višine vseh opazovanih rastlin.

V spodnjem diagramu je predstavljena škatla z brki (box-plot) za višine negnojenih rastlin.

Za višine gnojenih rastlin velja:
minimum: 19 cm
1. kvartil: 21 cm
mediana: 25 cm
interkvartilni razmik: 6 cm
variacijski razmik: 16 cm

1) V naslednji diagram vrišite škatlo z brki za višine gnojenih rastlin. *[1 točka]*



Iz škatle z brki za višine negnojenih rastlin je moč razbrati naslednje:
Vsaj četrtina rastlin ima višino manjšo ali enako neki vrednosti a in hkrati ima vsaj tri četrtine rastlin višino večjo ali enako tej vrednosti a.

2) Navedite to vrednost a.

a = ____________________ cm *[1 točka]*

c) Višina neke določene rastline se meri dnevno opoldan. Ob začetku opazovanja je imela rastlina višino H_0. Na dan zraste za 0,5 % glede na višino vsakokratnega prejšnjega dne.

1) S pomočjo H_0 sestavite formulo za izračun višine H te rastline, 10 dni po začetku opazovanja.

H = ____ *[1 točka]*

Naloga 6 (del B)

Izdelava mila

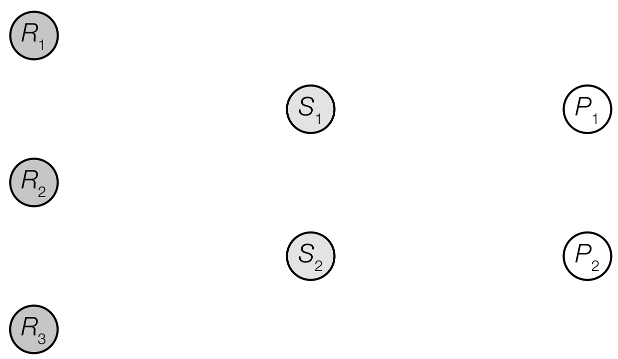
V nekem podjetju izdelujejo in pakirajo mila. Za izdelavo mila uporabljajo surovine *karitejevo maslo* (R_1), *različna olja* (R_2) in *natrijev lug* (R_3).

a) V neki proizvodni liniji izdelujejo mili S_1 in S_2.

1. proizvodna stopnja:
Za 1 KE S_1 potrebujejo 35 KE R_1, 80 KE R_2 in 15 KE R_3.
Za 1 KE S_2 potrebujejo 50 KE R_2 in 6 KE R_3.

2. proizvodna stopnja:
Obe mili se za nakup ponujata v 2 različnih pakiranjih P_1 in P_2.
V 1 pakiranju P_1 se nahajata 2 KE S_1 in 1 KE S_2.
V 1 pakiranju P_2 se nahajata 2 KE S_1 in 3 KE S_2.

1) Ponazorite proizvodno prepletenost od surovin do pakiranj kot gozinto-graf. *[1 točka]*



2) Sestavite obe matriki, ki opisujeta posamezni proizvodni stopnji. *[1 točka]*

3) Ugotovite matriko $\boldsymbol{A}$, ki opisuje količinsko potrebo po surovinah za izdelavo pakiranj. *[1 točka]*

Neka stranka naroči 20 pakiranj P_1 in 30 pakiranj P_2.

4) Ugotovite količinsko potrebo po surovinah za to naročilo. *[1 točka]*

b) V neki drugi proizvodni liniji iz 3 surovin R_1, R_2 in R_3 izdelujejo mili S_3 in S_4. Mili se prodajata v obliki darilnega pakiranja P.

Proizvodna prepletenost je opisana z naslednjo preglednico. Vnesene vrednosti ustrezajo KE v proizvodnem procesu.

	R_1	R_2	R_3	S_3	S_4	P
R_1	0	0	0	15	10	0
R_2	0	0	0	75	52	0
R_3	0	0	0	9,6	8,5	0
S_3	0	0	0	0	0	2
S_4	0	0	0	0	0	2
P	0	0	0	0	0	0

Vsota vseh vnosov v 3. vrstici znaša 18,1.

1) Interpretirajte vrednost 18,1 v povezavi s proizvodnjo obeh mil. *[1 točka]*
2) Iz gornje preglednice odčitajte koliko KE mila se nahaja v enem darilnem pakiranju. *[1 točka]*

V skladišču se nahaja 1 260 KE R_1 in 6 340 KE R_2.

3) Dokazljivo preverite, če je pri tem stanju skladišča moč izdelati vsakič po 50 KE obeh mil S_3 in S_4. *[1 točka]*

Naloga 7 (del B)

Prodajalec sadja

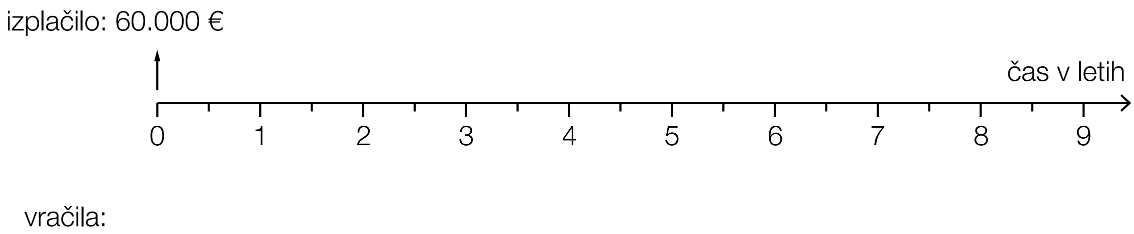
Neki prodajalec sadja načrtuje prenovo svojih poslovnih prostorov.

a) Prenova naj se financira s kreditom v višini 60.000 €.

Ponudba neke banke predvideva naslednja vračila:

- enkratno plačilo v višini 15.000 € ob koncu 1. leta
- naslednje enkratno plačilo v višini 20.000 € ob koncu 3. leta
- 6 polletnih obrokov v višini vsakič po *R*, prvi obrok zapade v plačilo ob koncu 4. leta

1) Ponazorite ta vračila na naslednji časovni osi. *[1 točka]*



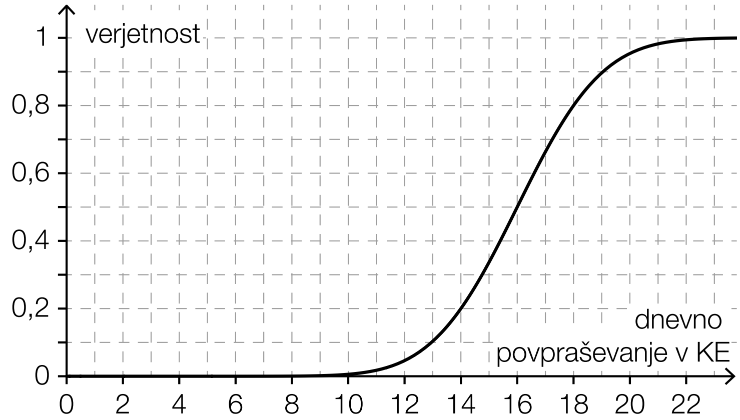
2) Izračunajte višino obroka *R* pri semestralni obrestni meri 3 % p. s. *[2 točki]*

b) Prodajalec sadja razmišlja, da bi prenovo izvedel šele čez 2 leti, da bi do tačas privarčeval denar. Izhaja iz tega, da bi lahko na bančni račun mesečno postnumerandno vplačal 2.400 €. S tem bi rad v 2 letih privarčeval 60.000 €.

1) Izračunajte tisto efektivno letno obrestno mero *i*, pri kateri bi prodajalec sadja natanko dosegel svoj cilj. *[1 točka]*

2) Brez izračuna utemeljite zakaj je pripadajoča efektivna obrestna mera nižja, če mesečna vplačila nastopajo prenumerandno. *[1 točka]*

c) Dnevno povpraševanje X po neki določeni vrsti sadja je pri tem podajalcu sadja približno normalno porazdeljeno. Graf pripadajoče porazdelitvene funkcije je predstavljen na sliki ob tekstu.



1) Iz slike odčitajte pričakovano vrednost μ in verjetnost $P(X \leq 14)$.

μ = ____________________ KE

$P(X \leq 14)$ = ____________________ *[1 točka]*

2) S pomočjo odčitanih vrednosti ugotovite standardni odklon za X. *[1 točka]*

Prodajalec sadja bi rad ugotovil, katero količino tega sadja naj skladišči (količino zaloge).
Za določitev optimalne količine zaloge je moč uporabiti tako imenovani *Kolporterjev model* (*Zeitungsjungen-Modell*).
Po tem modelu je količina zaloge q optimalna takrat, če velja naslednje:
Verjetnost, da je dnevno povpraševanje največ q, znaša $\frac{p-c}{p}$, torej:

$P(X \leq q) = \frac{p-c}{p}$
q … optimalna količina zaloge v KE
c … nakupna cena v DE/KE
p … prodajna cena v DE/KE

3) S pomočjo gornje slike določite za $c = 2$ DE/KE in $p = 5$ DE/KE pripadajočo optimalno količino zaloge. *[1 točka]*

Opazujemo izraz $\frac{p-c}{p}$ pri $p \neq 0$.

4) S križcem označite izjavo, ki ustreza temu izrazu. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

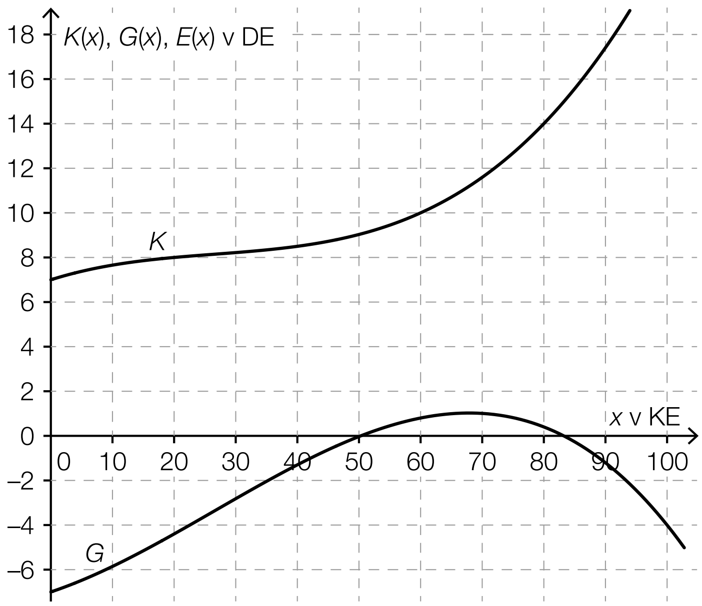
Če za p in c vstavimo enaki pozitivni števili, izraz $\frac{p-c}{p}$ ni definiran.	☐
Izraz $\frac{p-c}{p}$ je lahko zapisan tudi v obliki $p - c : p$.	☐
Ča se tako p kakor tudi c podvojita, ostane vrednost izraza $\frac{p-c}{p}$ nespremenjena.	☐
Če je p dvakrat toliko kot c, potem ima izraz $\frac{p-c}{p}$ vrednost $\frac{1}{3}$.	☐
Izraz $\frac{p-c}{p}$ je moč za $p \neq 1$ poenostaviti v $1 - c$.	☐

Naloga 8 (del B)

Proizvodnja nepopisanih CD-jev in nepopisanih DVD-jev

Nepopisani CD-ji in DVD-ji se v nemščini imenujejo *Rohlinge*.

a) Na naslednji sliki sta predstavljena graf funkcije stroškov K in graf funkcije dobička G za proizvodnjo nepopisanih CD-jev.



1) V gornjo sliko vrišite graf pripadajoče linearne funkcije izkupička E. *[1 točka]*

2) Ugotovite ceno, po kateri se prodajajo nepopisani CD-ji. *[1 točka]*

3) Iz gornje slike odčitajte maksimalni dobiček G_{max}.

$G_{max} \approx$ ____________________ DE *[1 točka]*

b) Za določene kakovostne nepopisane DVD-je je podjetje monopolist.

Za cenovno funkcijo povpraševanja p_N velja:

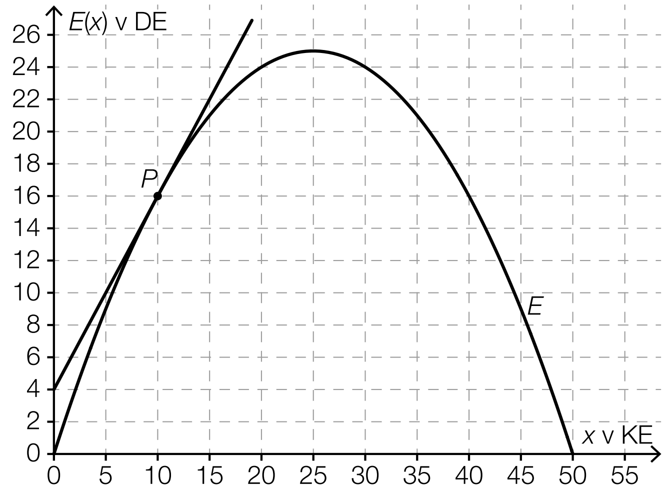
$p_N(x) = a \cdot x + b$

x ... povpraševana količina v KE
$p_N(x)$ ... cena pri povpraševani količini x v DE/KE

1) S križcem označite tisti izraz, ki podaja količino zasičenosti. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

$\frac{a}{b}$	☐
$\frac{b}{a}$	☐
$-\frac{a}{b}$	☐
$-\frac{b}{a}$	☐
$-b - a$	☐

c) Na sliki ob tekstu je predstavljen graf funkcije izkupička E za specialne nepopisane DVD-je. Dodatno je vrisana tangenta na graf funkcije E v točki P.



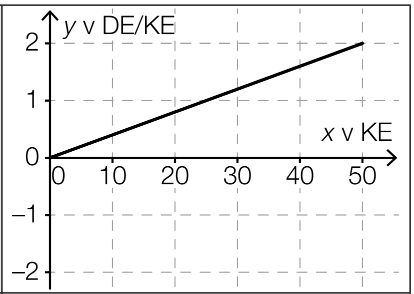
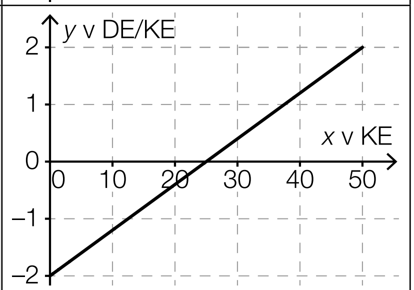
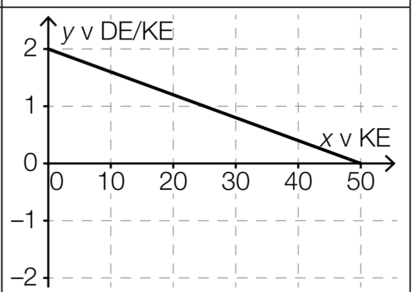
1) S pomočjo gornje slike določite naklon k tangente

k = ____________________ DE/KE [1 točka]

2) Interpretirajte vrednost naklona tangente v dani vsebinski povezavi. [1 točka]

3) Obema funkcijama priredite vsakič ustrezni graf izmed A do D. *[2 proti 4]* [1 točka]

funkcija mejnega izkupička E'	
cenovna funkcija povpraševanja p_N	

A	
B	
C	
D