Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

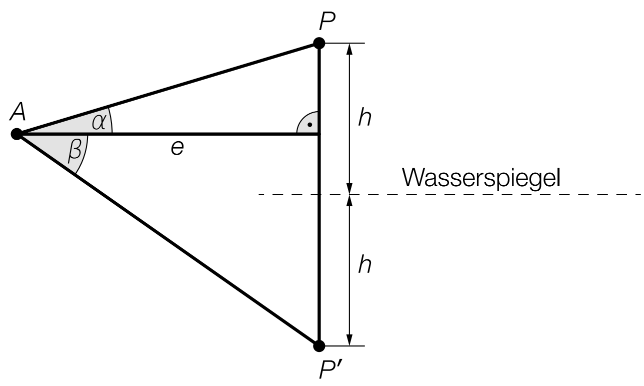
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Paragleiter

Ein Paragleiter P fliegt h Meter über einem See.
Der Punkt A liegt 20 m höher als der Wasserspiegel und hat zum Paragleiter den Horizontalabstand e.
Von A aus sieht man den Paragleiter unter dem Höhenwinkel α.
Mit P' wird das Spiegelbild des Paragleiters in diesem See bezeichnet, das von A aus unter dem Tiefenwinkel β gesehen wird.
Die Situation ist in der nachstehenden (nicht maßstabgetreuen) Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

– Geben Sie den Horizontalabstand e in Abhängigkeit von h und α an.

$e =$ ____

Leitfrage:

Es gilt: $\alpha = 16{,}7°$ und $\beta = 35{,}0°$.

– Ermitteln Sie h.

Lösung zur Aufgabe 1

Paragleiter

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan(\alpha) = \frac{h-20}{e}$

$e = \frac{h-20}{\tan(\alpha)}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert für *e* angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$e = \frac{h-20}{\tan(\alpha)}$

$e = \frac{h+20}{\tan(\beta)}$

$\Rightarrow \quad h = 49{,}9...$
$\quad\quad h \approx 50$ m

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn *h* richtig ermittelt wird.

Aufgabe 2

Grippe

Am Morgen des 17. Februar waren in einer bestimmten Stadt 2000 Personen an Grippe erkrankt, am Morgen des 28. Februar waren es 4000. Modellhaft wird angenommen, dass im Februar die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen jeden Tag um den gleichen Prozentsatz gestiegen ist.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie diesen Prozentsatz an.

Leitfrage:

Für den Monat März wird die weitere Entwicklung der Anzahl der an Grippe erkrankten Personen in dieser Stadt modellhaft durch eine Differenzengleichung beschrieben.
Dabei ist A_t die Anzahl der erkrankten Personen t Tage nach dem 1. März (erhoben am Morgen des jeweiligen Tages). In diesem Modell wird angenommen, dass täglich 4 % der Erkrankten jeweils eine gesunde Person anstecken, aber auch täglich 180 Personen wieder gesunden.

– Geben Sie die Differenzengleichung an.

$A_{t+1} - A_t =$ ____

A_0 … Anzahl der erkrankten Personen am 1. März

Die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen kann bei dieser Modellierung ständig zunehmen, stabil bleiben oder ständig abnehmen.

– Geben Sie an, welchen Wert A_0 nicht übersteigen darf, damit die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen im März nicht ständig zunimmt.

Lösung zur Aufgabe 2

Grippe

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$4\,000 = 2\,000 \cdot a^{11}$

$a = \sqrt[11]{2} = 1{,}0650...$

Prozentsatz: ca. 6,5 %

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Prozentsatz angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$A_{t+1} - A_t = 0{,}04 \cdot A_t - 180$

Damit die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen nicht ständig zunimmt, muss $0{,}04 \cdot A_0 - 180 \leq 0$ gelten. Also darf A_0 den Wert 4 500 nicht übersteigen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Differenzengleichung und der richtige Wert, der nicht überstiegen werden darf, angegeben werden.

Aufgabe 3

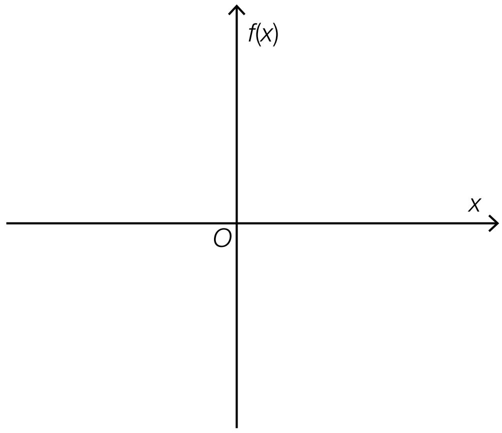
Wendestelle

Eine Funktion f ist durch $f(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ gegeben.

Aufgabenstellung:

– Zeigen Sie rechnerisch, dass die Wendestelle x_W des Graphen von f unabhängig von der Wahl von a ist.

– Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen möglichen Graphen von f.



Leitfrage:

Der Graph von f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 < 0$ und begrenzt mit der x-Achse im Intervall $[x_1; x_W]$ ein Flächenstück.

– Ermitteln Sie den Wert von a so, dass der Inhalt dieses Flächenstücks den Wert 1 hat.

Lösung zur Aufgabe 3

Wendestelle

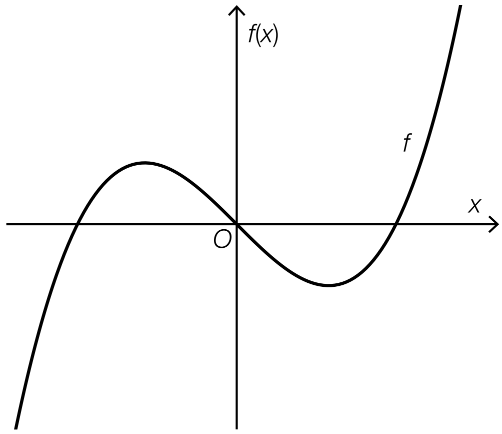
Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f''(x) = \frac{6 \cdot x}{a}$

Für die Wendestelle gilt: $f''(x) = 0 \quad (\text{und } f'''(x_W) \neq 0)$

$\frac{6 \cdot x_W}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 0$ und somit von a unabhängig

möglicher Graph:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Unabhängigkeit der Wendestelle von a gezeigt wird und ein möglicher Graph von f richtig skizziert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\frac{1}{a} \cdot x^3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot x^2 - 1 = 0\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{a}$

$\int_{-\sqrt{a}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4 \cdot a} - \frac{x^2}{2} \Big|_{-\sqrt{a}}^{0} = \frac{a}{4}$

$\frac{a}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 4$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von a richtig ermittelt wird.

Aufgabe 4

Datenlisten

Gegeben sind zwei Datenlisten.

Liste *A*: 2, 2, 4, 6, 8, 10, 10

Liste *B*: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

Aufgabenstellung:

– Geben Sie für jede der beiden Listen das arithmetische Mittel an.

Martin stellt folgende Behauptung auf: „Ich weiß, dass die Standardabweichung bei Liste *B* größer ist als bei Liste *A*, ohne diese konkret zu berechnen."

– Erläutern Sie, auf welches mathematische Argument Martin seine Behauptung stützen kann.

Leitfrage:

Aus der Liste *A* wird der Datenwert 6 entfernt.

– Erläutern Sie ohne konkrete Berechnung der statistischen Kennzahlen der neuen Datenliste, ob bzw. wie sich das arithmetische Mittel, der Median und die Standardabweichung der neuen Liste im Vergleich zu den Kennzahlen der ursprünglichen Liste *A* geändert haben.

Lösung zur Aufgabe 4

Datenlisten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Das arithmetische Mittel der Liste *A* ist 6.
Das arithmetische Mittel der Liste *B* ist 7.

mögliches Argument:

Die Abweichungen der beiden „äußersten" Werte vom arithmetischen Mittel sind bei Liste *B* größer als bei Liste *A*, die beiden Listen enthalten gleich viele Werte und die Abweichung der übrigen Werte vom arithmetischen Mittel ist bei beiden Listen gleich.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen arithmetischen Mittelwerte angegeben werden und ein richtiges Argument genannt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Das arithmetische Mittel ist 6 und der Median ist 6. Beim Entfernen des Wertes des arithmetischen Mittels bleibt das arithmetische Mittel einer Liste unverändert. Aufgrund der Symmetrie von Liste *A* bleibt auch der Median unverändert. Die Standardabweichung nimmt zu, da die Anzahl der Datenwerte abnimmt, die Abweichungen der übrigen Datenwerte vom arithmetischen Mittel aber gleich bleiben.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die jeweiligen Auswirkungen richtig erläutert werden.

Aufgabe 5

Gewinnspiel

Im Zuge eines Gewinnspiels in einer Filiale eines Autohauses kann eine Person ein Auto gewinnen. Sie erhält zehn (gleich aussehende) Autoschlüssel, von denen genau einer zum Gewinnauto passt. Die Person probiert zwei dieser Autoschlüssel aus, die sie zufällig auswählt. Passt einer dieser Autoschlüssel, so gewinnt die Person das Auto.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass diese Person das Auto gewinnt.

Leitfrage:

Auf die gleiche Art soll dieses Gewinnspiel in mehreren Filialen des Autohauses ermöglicht werden, wobei in jeder Filiale jeweils eine Person daran teilnimmt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Filialen, in denen ein Auto gewonnen wird.
Der Autohändler gibt an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in mindestens einer Filiale das Auto gewonnen wird, höher als 90 % ist.

– Ermitteln Sie, in wie vielen Filialen das Gewinnspiel mindestens durchgeführt werden muss, damit diese Aussage richtig ist.

Lösung zur Aufgabe 5

Gewinnspiel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P(\text{„Gewinn"}) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0{,}2$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person das Auto gewinnt, beträgt 20 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p = 0{,}2$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$

$1 - 0{,}8^n > 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad n > 10{,}3...$

Das Gewinnspiel muss in mindestens 11 Filialen durchgeführt werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die gesuchte Anzahl richtig ermittelt wird.