Ime:	
Razred:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni izpit

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

5. maj 2020

Matematika

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge 1. dela in naloge 2. dela (sestavljene iz delnih nalog). Naloge oz. delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na voljo imate skupno *270 minut* čistega časa za reševanje.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni listi, ki vam je dan na razpolago. Svoje ime in razred vpišite na čelno stran zvezka z nalogami v za to predvideni polji, ter svoje ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri reševanju vsake delne naloge na delovni papir zapišite njeno oznako.

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano. Rešitev naloge mora biti pri tem jasno razvidna. Če rešitev ni jasno razvidna, ali če so navedene različne rešitve, velja naloga za nerešeno.

Dovoljena je uporaba Zbirke formul za »SRP« iz matematike, ki je za klavzurno delo (izpit) potrjena s strani pristojnega člana vlade. Nadalje je dovoljena uporaba elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije), če ni dana možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnih omrežij itd.) in ni možen dostop do lastnih podatkov v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je na razpolago v izpitnem prostoru in ga je na željo moč dobiti v vpogled.

Oddati je potrebno zvezek z nalogami in vse liste, ki ste jih uporabljali.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, pri katerih je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v željeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite željeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Vrednotenje

Naloge v 1. delu se vrednotijo z 0 točkami ali z 1 točko oz. z 0 točkami, z ½ ali z 1 točko. Točke, ki jih je moč doseči na nalogo, so navedene pri vsaki nalogi 1. dela v zvezku za reševanje.
Vsaka delna naloga v 2. delu se vrednoti z 0, z 1 ali z 2 točkama. Z $\boxed{\text{A}}$ označene zastavitve nalog se vrednotijo z 0 točkami ali z 1 točko.

Dve poti ocenjevanja

1) Če ste dosegli **najmanj 16** od 28 točk (24 točk 1. dela + 4 $\boxed{\text{A}}$-točke iz 2. dela), velja naslednji ključ ocenjevanja:

zadostno	*Genügend*	16 – 23,5 točk
povoljno (zadovoljivo)	*Befriedigend*	24 – 32,5 točk
dobro	*Gut*	33 – 40,5 točk
zelo dobro	*Sehr gut*	41 – 48 točk

2) Če ste dosegli **manj kot 16** od 28 točk (24 točk 1. dela + 4 $\boxed{\text{A}}$-točke iz 2. dela), vendar **skupaj 24 točk ali več** (iz nalog 1. dela in nalog 2. dela), potem lahko po tej poti dosežete »*Genügend*« ali »*Befriedigend*«:

zadostno	*Genügend*	24 – 28,5 točk
povoljno (zadovoljivo)	*Befriedigend*	29 – 35,5 točk

Izdelek bo ocenjen z »nezadostno«/»*Nicht genügend*«, če je bilo v 1. delu, ob upoštevanju z $\boxed{\text{A}}$ označenih zastavitev nalog iz 2. dela, doseženih manj kot 16 točk in skupaj manj kot 24 točk.

Veliko uspeha!

Naloga 1

Števila in številske množice

Danih je pet izjav o številih in številskih množicah.

Zastavitev naloge:

S križcem označite obe ustrezni izjavi.

$\sqrt{\frac{9}{2}}$ je racionalno število.	☐
$-\sqrt{100}$ je celo število.	☐
$\sqrt{15}$ ima končno decimalno predstavitev.	☐
$\sqrt{2}$ je racionalno število.	☐
-4 ni kvadrat realnega števila.	☐

[0 točk / 1 točka]

Naloga 2

Razdelitev dobička

Neka igralna skupina, ki sestoji iz 3 igralk dobi 10.000 €. Ta dobitek se razdeli kot sledi: igralka *B* dobi za 50 % več kot igralka *A*, igralka *C* dobi za 20 % manj kot igralka *B*.

Z x označimo znesek, ki ga dobi igralka *A* (x v €).

Zastavitev naloge:

Navedite enačbo, s katero je moč izračunati x.

[0 točk / 1 točka]

Naloga 3

Delegacija

Iz neke večje skupine mladostnikov in odraslih se naj sestavi ena delegacija.

Pri tem veljajo naslednji trije predpisi:

1. Delegacija naj obsega najmanj 8 članov.
2. Delegacija naj obsega največ 12 članov.
3. V delegaciji naj bo najmanj dvakrat toliko mladostnikov kot odraslih.

Dva od navedenih predpisov sta spodaj vsakič opisana z neenačbo. Pri tem je označeno z J število mladostnikov v tej delegaciji in z E število odraslih v tej delegaciji

Zastavitev naloge:

S križcem označite obe ustrezni neenačbi.

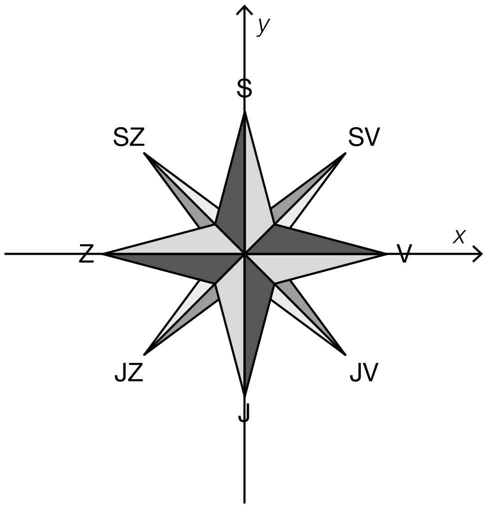
$J + E \leq 12$	☐
$J \geq 2 \cdot E$	☐
$J + E \leq 8$	☐
$J - 2 \cdot E < 0$	☐
$E \geq 2 \cdot J$	☐

[0 točk / 1 točka]

Naloga 4

Strani neba

V nadaljevanju je narisana simetrična vetrnica, ki prikazuje strani neba.



Hitrost neke ladje, ki pelje v smeri severozahoda (SZ), je opisana z vektorjem $\vec{u} = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$ pri $a \in \mathbb{R}^+$.

Zastavitev naloge:

Navedite vektor $\vec{v}$, ki opisuje hitrost ladje, ki pelje v smeri severovzhod (SV).

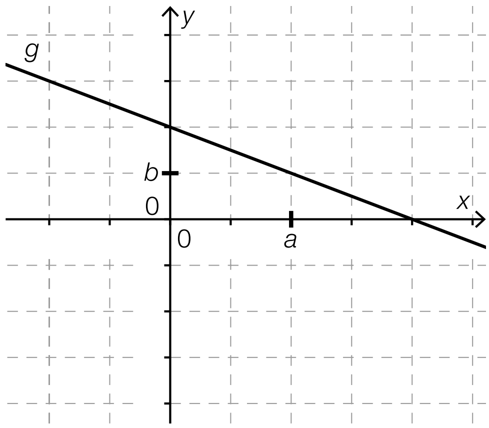
$\vec{v}$ = ____

[0 točk / 1 točka]

Naloga 5

Označevanje (skaliranje) koordinatnih osi

V naslednjem koordinatnem sistemu, čigar osi sta označeni z različnimi enotami, je predstavljen neka premica g. Na x-osi je označen a in na y-osi je označen b. Pri tem sta a in b celoštevilski vrednosti.
Premica g je opisana z $y = -2 \cdot x + 4$.



Zastavitev naloge:

Navedite a in b.

a = ____________________

b = ____________________

[0 točk / ½ točke / 1 točka]

Naloga 6

Trasa železniške proge

Naklon neke ravne trase železniške proge je podan v promilih (‰).
Na primer pri višinski razliki 1 m na 1 000 m premagane razdalje v vodoravni smeri, je naklon 1 ‰.

Zastavitev naloge:

Navedite enačbo, s katero je moč za ravno traso železniške proge z naklonom 30 ‰ natančno izračunati naklonski kot α, ($\alpha > 0$).

[0 točk / 1 točka]

Naloga 7

Funkcija stroškov

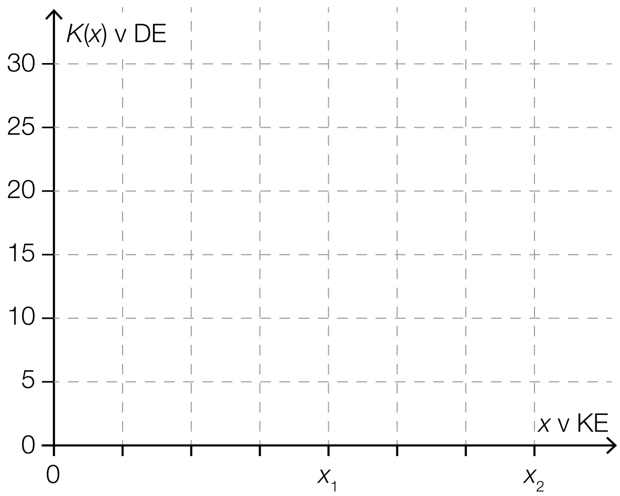
Skupne stroške, ki nastanejo pri proizvodnji nekega produkta, je moč modelirati s pomočjo neke odvedljive funkcije stroškov K. Pri tem priredi K proizvodni količini x stroške $K(x)$ (x v količinskih enotah (KE), $K(x)$ v denarnih enotah (DE)).

Za neko funkcijo stroškov $K: [0; x_2] \to \mathbb{R}$ in x_1 pri $0 < x_1 < x_2$, veljajo naslednji pogoji:

- K je na intervalu $[0; x_2]$ strogo monotono naraščajoča.
- Fiksni stroški znašajo 10 DE.
- Funkcija stroškov ima na intervalu $[0; x_1)$ degresiven potek, to pomeni da stroški z naraščajočo količino proizvodnje vedno počasneje naraščajo.
- Pri količini proizvodnje x_1 leži obračaj stroškov. Obračaj stroškov za K je tisto mesto, od katerega naprej stroški vedno močneje naraščajo.

Zastavitev naloge:

V naslednjem koordinatnem sistemu skicirajte potek grafa ene take stroškovne funkcije K.



[0 točk / 1 točka]

Naloga 8

Vlak

Neki vlak se do časovnega trenutka $t = 0$ premika s konstantno hitrostjo naprej. Od časovnega trenutka $t = 0$ dalje, vlak svojo hitrost poveča.

Funkcija v priredi časovnemu trenutku t, pri $0 \leq t \leq 60$, hitrost $v(t) = a \cdot t + b$ (t v s, $v(t)$ v m/s, $a, b \in \mathbb{R}$).

Zastavitev naloge:

V naslednjem stavku izpolnite vrzeli v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezen del stavka tako, da nastane pravilna izjava.

Za parameter a velja ______①______ in za parameter b velja ______②______ .

①	
$a < 0$	☐
$a = 0$	☐
$a > 0$	☐

②	
$b < 0$	☐
$b = 0$	☐
$b > 0$	☐

[0 točk / ½ točke / 1 točka]

Naloga 9

Linearna funkcija

Dana je linearna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pri $f(x) = k \cdot x + d$ za $k, d \in \mathbb{R}$ in $k \neq 0$.

Velja: $\frac{f(5) - f(a)}{2} = k$ za nek $a \in \mathbb{R}$.

Zastavitev naloge:

Navedite a.

a = ____

[0 točk / 1 točka]

Naloga 10

Trgatev

Tako imenovana *trgatev* (obiranje grozdja) v nekem vinogradu poteka tem hitreje, čim več ljudi pri tem sodeluje. Funkcija f modelira obratno sorazmeren odnos med časom, potrebnim za trgatev in številom udeleženih oseb. Pri tem je $f(n)$ čas, potreben za trgatev, če je udeleženih n oseb ($n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $f(n)$ v urah).

Zastavitev naloge:

Navedite $f(n)$, če je znano, da znaša, pri številu 8 udeleženih oseb, čas, potreben za trgatev, 6 ur.

$f(n) =$ ____ pri $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

[0 točk / 1 točka]

Naloga 11

Število živali

Privzema se, da se število živali neke določene živalske vrste na Zemlji na leto poveča za 1,8 %.

Zastavitev naloge:

Določite tisti čas trajanja v letih, znotraj katerega se število živali te živalske vrste na Zemlji podvoji.

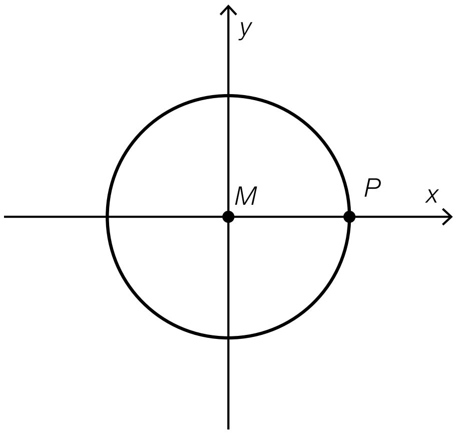
Čas trajanja: ca. ___________ let

[0 točk / 1 točka]

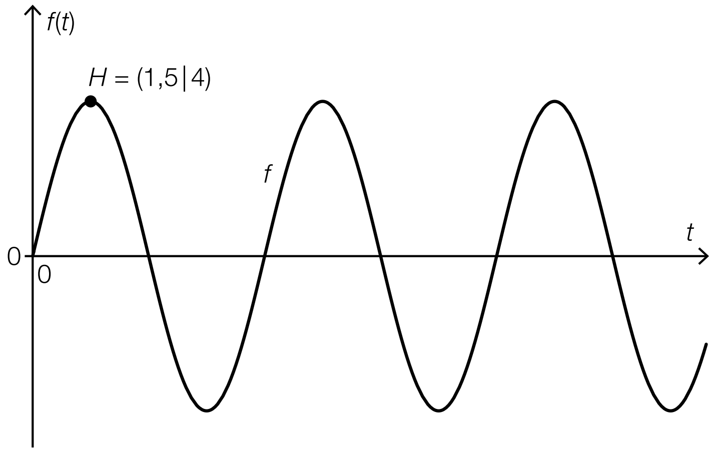
Naloga 12

Gibanje po krožnici

Neka točka P se giblje po obodu krožnice s središčem $M = (0|0)$ s konstantno hitrostjo v nasprotni smeri urinega kazalca.
Ob začetku gibanja ob času $t = 0$ leži točka P na pozitivnem delu x-osi, kot je predstavljeno na naslednji sliki.



Funkcija f priredi času t drugo koordinato $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ točke P ob času t (t v s, $f(t)$ v dm, $a, b \in \mathbb{R}^+$). Graf funkcije f, predstavljen na naslednji sliki, poteka skozi točko H, pri čemer velja: $f'(1{,}5) = 0$.



Zastavitev naloge:

Določite polmer kroga in obhodni čas točke P (za eno obkroženje).

polmer kroga: ____________ dm

obhodni čas: ____________ s

[0 točk / ½ točke / 1 točka]

Naloga 13

Absolutna in relativna sprememba neke funkcije

Absolutno spremembo funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na nekem intervalu $[a; b]$ označimo z A, relativno spremembo funkcije f na intervalu $[a; b]$ označimo z R. Pri tem velja: $f(a) \neq 0$ in $a < b$.

Zastavitev naloge:

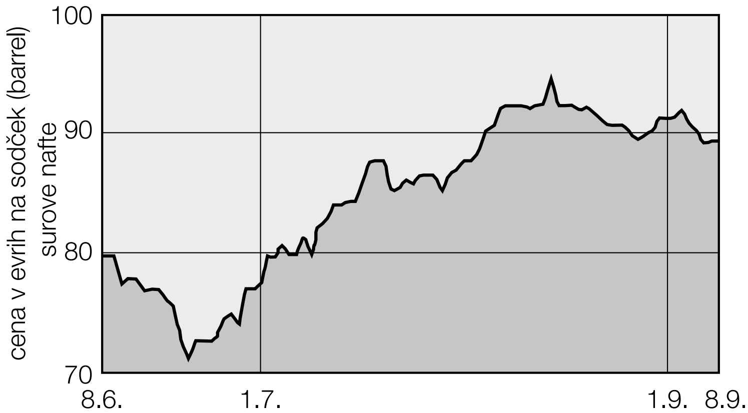
Navedite enačbo, ki opisuje povezavo med A in R.

[0 točk / 1 točka]

Naloga 14

Cena nafte

Naslednja grafika prikazuje razvoj cene surove nafte v časovnem obdobju od 8.6.2012 do 8.9.2012.



Vir podatkov: http://www.heizoel24.at/charts/rohoel [14.12.2012] (prirejeno).

Zastavitev naloge:

Za časovno obdobje od 1.7.2012 do 1.9.2012 določite stopnjo povprečne hitrosti spreminjanja (vrednosti spreminjanja) za ceno na sodček (barrel) surove nafte na mesec.

povprečna hitrost spreminjanja: ______________ evrov na sodček (barrel) surove nafte na mesec

[0 točk / 1 točka]

Naloga 15

Populacija

Število srn v nekem gozdu ob koncu nekega leta i ($i = 1, 2, 3$) označimo z R_i. Ob koncu prvega leta je v tem gozdu 60 srn.

Naslednja enačba opisuje razvoj populacije srn.

$R_{i+1} = 1{,}2 \cdot R_i - 2$ za $i = 1, 2$

Zastavitev naloge:

Določite število srn v tem gozdu ob koncu tretjega leta.

Število srn ob koncu tretjega leta znaša __________ .

[0 točk / 1 točka]

Naloga 16

Rast neke rastline

Ob začetku tritedenskega opazovalnega časa je neka določena rastlina visoka 15 cm. Trenutna hitrost spreminjanja višine te rastline je opisana s funkcijo v v odvisnosti od časa t.
Velja:
$v(t) = 3 - 0{,}3 \cdot t^2$ pri $t \in [0; 3]$ v tednih in $v(t)$ v cm/teden

Funkcija h priredi vsakemu časovnemu trenutku $t \in [0; 3]$, višino rastline $h(t)$ (t v tednih, $h(t)$ v cm).

Zastavitev naloge:

Navedite $h(t)$.

$h(t) =$ ____

[0 točk / 1 točka]

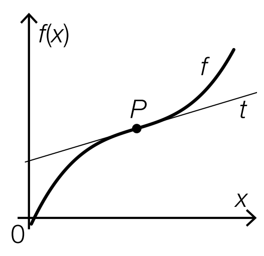
Naloga 17

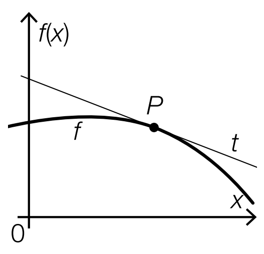
Potek krivulje

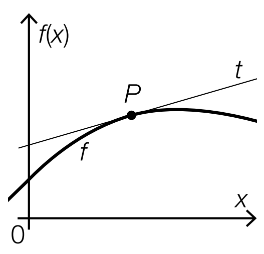
Slike spodaj levo vsakič prikazujejo tangento t v neki točki $P = (x_P|f(x_P))$ grafa neke polinomske funkcije f. Pri tem je P edina skupna točka grafa funkcije f in tangente t. V spodnji desni preglednici so podane izjave o $f'(x_P)$ in $f''(x_P)$.

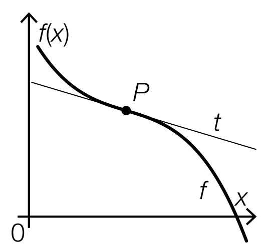
Zastavitev naloge:

Štirim slikam vsakič priredite ustrezno izjavo (izmed A do F).









A	$f'(x_P) > 0$ in $f''(x_P) > 0$
B	$f'(x_P) > 0$ in $f''(x_P) < 0$
C	$f'(x_P) < 0$ in $f''(x_P) > 0$
D	$f'(x_P) < 0$ in $f''(x_P) < 0$
E	$f'(x_P) > 0$ in $f''(x_P) = 0$
F	$f'(x_P) < 0$ in $f''(x_P) = 0$

[0 točk / ½ točke / 1 točka]

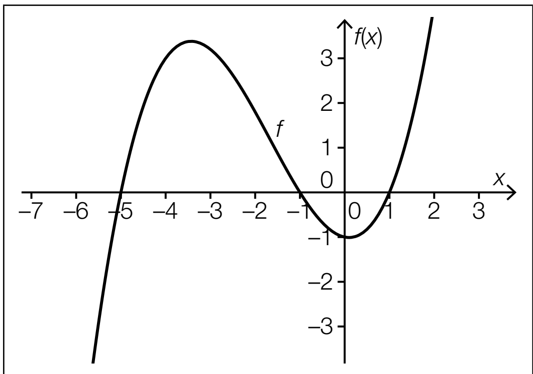
Naloga 18

Primerjava določenih integralov

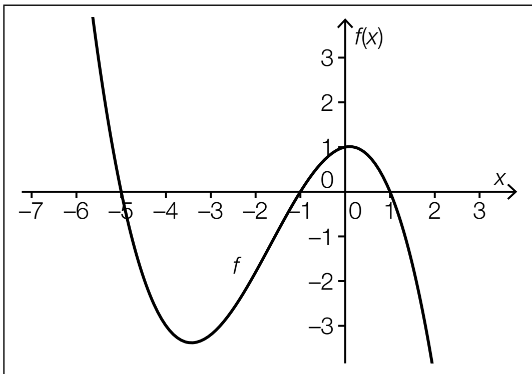
Danih je pet slik z grafi polinomskih funkcij.

Zastavitev naloge:

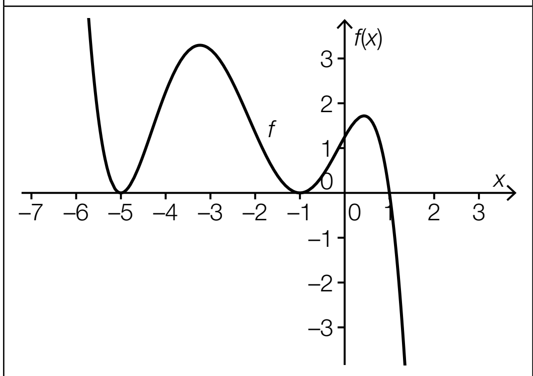
S križcem označite obe sliki, za kateri velja: $\int_{-5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_{-5}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.



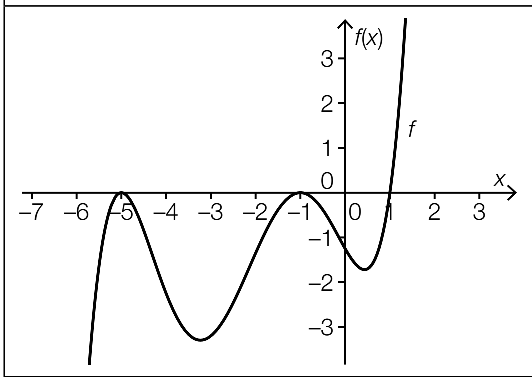
☐



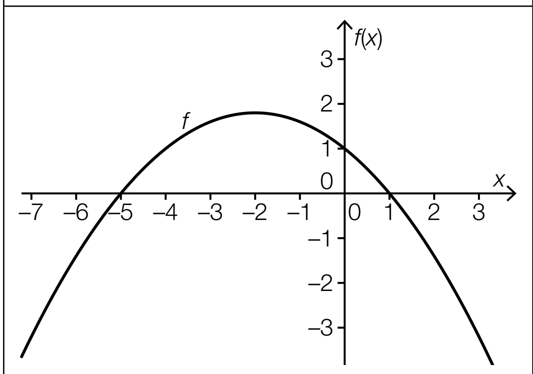
☐



☐



☐



☐

[0 točk / 1 točka]

Naloga 19

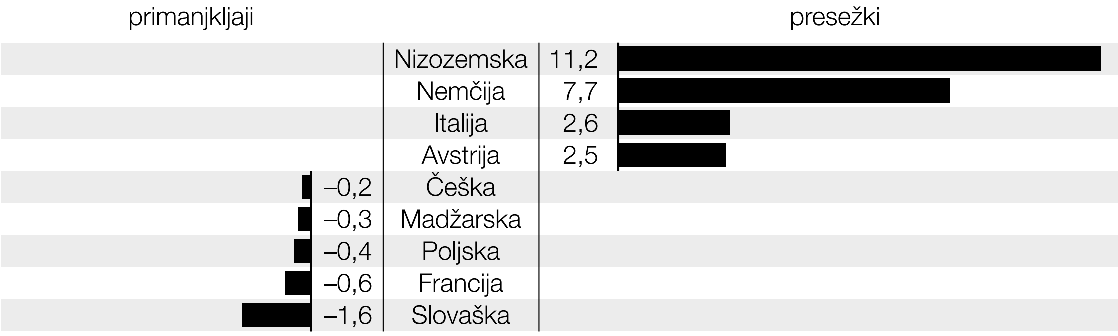
BDP 2018

V letu 2018 je znašal bruto domači proizvod (BDP) Avstrije okroglo 385,71 milijard evrov.

Vir podatkov: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/14390/umfrage/bruttoinlandsprodukt-in-oesterreich/ [21.11.2019].

Če dohodki od izvoza presegajo izdatke za uvoz, govorimo o zunanjetrgovinskem presežku, v nasprotnem primeru pa o zunanjetrgovinskem primanjkljaju. Na naslednji sliki so za nekaj držav navedeni ti presežki oz. primanjkljaji kot podatki trgovinske bilance v odstotkih vsakokratnega BDP-ja za leto 2018.

Saldi zunanjetrgovinske bilance 2018 v % BDP-ja
(saldi izmenjava blaga in storitev)



Vir podatkov: https://www.oenb.at/isaweb/report.do?report=10.18 [21.11.2019].

Zastavitev naloge:

Izračunajte zunanjetrgovinski presežek Avstrije (v milijardah evrov) v letu 2018.

zunanjetrgovinski presežek: ____ milijard evrov

[0 točk / 1 točka]

Naloga 20

Lista števil

Dana je lista števil $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{40}$ za katere velja $x_1 < x_2 < \ldots < x_{40}$.

Zastavitev naloge:

S križcem označite tisto število, ki ga na vsak način lahko dodamo h gornji listi, ne da bi se s tem spremenila mediana liste.

$\frac{x_1 + x_{20}}{2}$	☐
$\frac{x_1 + x_{40}}{2}$	☐
$\frac{x_{20} + x_{21}}{2}$	☐
$\frac{x_{20} + x_{40}}{2}$	☐
x_{20}	☐
x_{21}	☐

[0 točk / 1 točka]

Naloga 21

Najljubši predmet

Vse učence 1. in 2. razreda neke šole so povprašali po njihovem najljubšem predmetu. Pri tej anketi je bilo potrebno navesti natanko en najljubši predmet. Naslednja preglednica povzema zbrane podatke.

	najljubši predmet matematika	drugačen najljubši predmet
učenci 1. razreda	47	241
učenci 2. razreda	33	287
skupaj	80	528

Slučajno izberemo enega učenca iz 1. razreda. (Pri tem imajo vsi učenci 1. razreda enako verjetnost, da so izbrani.)

Zastavitev naloge:

Izračunajte verjetnost, da je ta učenec kot svoj najljubši predmet navedel matematiko.

[0 točk / 1 točka]

Naloga 22

Porazdelitev verjetnosti

V neki žari se nahajajo izključno bele in črne krogle. Izvlečemo tri krogle, brez vračanja. Slučajna spremenljivka X podaja število izvlečenih belih krogel.
Z naslednjo preglednico je podana porazdelitev verjetnosti slučajne spremenljivke X.

x	1	2	3
$P(X = x)$	0,3	0,6	0,1

Zastavitev naloge:

S križcem označite obe ustrezni izjavi.

Verjetnost, da potegnemo največ dve beli krogli, je 0,9.	☐
Verjetnost, da potegnemo vsaj eno belo kroglo, je 0,3.	☐
Verjetnost, da potegnemo več kot eno belo kroglo, je 0,6.	☐
Verjetnost, da potegnemo natanko dve črni krogli in eno belo kroglo, je 0,1.	☐
Verjetnost, da potegnemo vsaj eno črno kroglo, je 0,9.	☐

[0 točk / 1 točka]

Naloga 23

Rezervacija sobe

Nek hotelski menedžer na podlagi dolgoletne izkušnje izhaja iz tega, da bo vsaka rezervacija sobe, ki je izvedena neodvisno od druge rezervacije sobe, z 10 % verjetnostjo stornirana. Za neki določeni termin dobi 40 med seboj neodvisnih rezervacij sobe.

Zastavitev naloge:

Izračunajte verjetnost za to, da bo na ta termin od 40 rezervacij sobe storniranih največ 5 %.

[0 točk/1 točka]

Naloga 24

Eksperiment kondicioniranja

Pri nekem eksperimentu kondicioniranja se ovčjaki učijo upravljati z nekim mehanizmom, s katerim dobijo hrano. Po fazi treninga, na kateri je bilo prisotnih 50 ovčjakov, je 40 izmed njih zmoglo upravljati ta mehanizem.

Relativni delež teh ovčjakov, ki so zmogli po fazi treninga upravljati s tem mehanizmom, označimo s h.

Iz teh podatkov je okoli h določen simetrični interval zaupanja (konfidenčni interval) $[a; 0{,}91]$ pri $a \in \mathbb{R}$ za neznani delež p vseh ovčjakih, ki po eni taki fazi treninga zmorejo upravljati s tem mehanizmom.

Zastavitev naloge:

Ugotovite spodnjo mejo a tega intervala zaupanja.

[0 točk / 1 točka]

Naloga 25 (del 2)

Skok s padalom

Pri nekem skoku s padalom iz višine 4 000 m nad tlemi se 30 s po odskoku odpre padalo.

Za $t \in [0; 30]$ podaja funkcija v_1 pri $v_1(t) = 56 - 56 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ (ob upoštevanju zračnega upora) hitrost padanja padalca v časovnem trenutku t (t v s po odskoku, $v_1(t)$ v m/s).

Za $t \geq 30$ podaja funkcija v_2 pri $v_2(t) = \frac{51}{(t-29)^2} + 5 - 56 \cdot e^{-7,5}$ hitrost padanja padalca v časovnem trenutku t do trenutka pristanka (t v s po odskoku, $v_2(t)$ v m/s).
Modelno se privzema, da je skok s padalom navpičen.

Zastavitev naloge:

a) 1) $\boxed{\text{A}}$ Razložite $w = \frac{v_1(10) - v_1(5)}{10 - 5}$ v dani vsebinski povezavi.

Za $t_1 \in [0; 30]$ velja: $v_1'(t_1) = w$.

2) Razložite t_1 v dani vsebinski povezavi.

b) 1) S pomočjo funkcije v_1 izračunajte, na kateri višini se odpre padalo.

2) Izračunajte dolžino trajanja celotnega skoka s padalom, od odskoka do pristanka.

c) Brez upoštevanja zračnega upora bi imel padalec začetno hitrost 0 m/s in v časovnem intervalu [0; 30] konstanten pospešek 9,81 m/s². 9 s po odskoku znaša potem hitrost padanja v^*.

1) Izračunajte za koliko je $v_1(9)$ manjša od v^*.

2) Izračunajte, za koliko odstotkov je 9 s po odskoku pospešek padalca manjši, kot pri skoku brez upoštevanja zračnega upora.

Naloga 26 (del 2)

Procesi rasti

V nadaljevanju opazujemo modele rasti.

Naslednja diferenčna enačba opisuje neko rast.

$N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$

N_t ... stanje v časovnem trenutku t
r ... konstanta rasti, $r \in \mathbb{R}^+$
S ... (zgornja) meja kapacitete

Zastavitev naloge:

a) Na neki križarki z 2000 potniki zboli od časovnega trenutka $t = 0$, ob katerem še noben potnik ni bolan, vsak dan 5 % še ne obolelih potnikov. Pri tem je N_t število obolelih potnikov ob časovnem trenutku t, s t v dnevih.

1) Navedite diferenčno enačbo za N_{t+1}.

2) Ugotovite, po koliko dnevih je prvič bolnih več kot 25 % potnikov.

b) Diferenčno enačbo $N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$ je moč predstaviti v obliki $N_{t+1} = a \cdot N_t + b$ pri $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Izrazite r in S s pomočjo a in b.

$r =$ ____

$S =$ ____

Za razvoj novega cepiva se v petrijevki preučuje rast neke bakterijske kulture.

V naslednji preglednici je navedena ploščina N_t (v cm^2) tiste ploskve, ki je ob časovnem trenutku t (v h) prekrita z bakterijami.

t v h	N_t v cm^2
0	5,00
1	9,80
2	14,41

2) Ugotovite a in b s pomočjo vrednosti, navedenih v gornji preglednici.

c) Neko farmacevtsko podjetje da na trg novo cepivo. V prvem tednu po vpeljavi na trg je cepivo kupilo že 15 000 oseb.

Število $f(t)$ tistih oseb, ki so kupile cepivo znotraj t tednov po vpeljavi na trg, je moč modelno opisati s funkcijo f pri $f(t) = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$, $(k \in \mathbb{R}^{+})$.

1) $\boxed{\text{A}}$ Izračunajte k.

2) Ugotovite tisti časovni trenutek t_0, ob katerem je število oseb, ki so kupili to cepivo, prvič doseglo število 500 000.

Naloga 27 (del 2)

Kviz z igralno ploščo

Pri nekem kvizu se zaporedoma zastavi več vprašanj, ki se vsakič odgovorijo z »ja« ali »ne«. Na igralni plošči stoji igralna figura ob začetku vsakega posameznega kroga igre na polju s številko 0. Pri vsakem pravilnem odgovoru se ta figura potegne za eno polje na desno, pri vsakem nepravilnem odgovoru pa za eno polje na levo. Polja igralne plošče so označena s celimi številkami v naraščajočem zaporedju (glej naslednjo sliko). Igralna plošča se lahko v obe smeri poljubno podaljša.

igralna plošča

---	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	---

Maria in Tom igrata ta kviz. Tom sprašuje Mario.

Zastavitev naloge:

a) Pri nekem krogu igre je je kviz končan, če pride igralna figura stat na polje s številko 2.

Z A označimo dogodek, da stoji igralna figura po največ 4 vprašanjih na polju s številko 2.

Marija na vsako vprašanje, neodvisno od drugih vprašanj, odgovori pravilno z enako verjetnostjo p.

1) Navedite verjetnost $P(A)$ v odvisnosti od p.

$P(A) =$ ____

Če se p poveča, se poveča tudi verjetnost $P(A)$.

2) Navedite tisti $p \in [0; 1]$, pri katerem verjetnost $P(A)$ najmočneje narašča (je torej lokalna stopnja hitrosti spreminjanja za $P(A)$ največja).

b) Pri nekem drugem krogu igre je Mariji zastavljenih natanko 100 vprašanj. Pri tem vsako vprašanje, neodvisno od drugih vprašanj, z verjetnostjo 0,8 odgovori pravilno.
Slučajna spremenljivka Y podaja številko tistega polja, na katerem stoji igralna figura po odgovarjanju na 100 vprašanj.

1) Izračunajte pričakovano vrednost $E(Y)$.

$E(Y) =$ ____________________

Slučajno spremenljivko Y aproksimiramo z neko normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko Z. Pri tem velja: $E(Y) = E(Z)$ in standardni odklon od Z, σ, je 8.

2) Ugotovite simetrični interval $[z_1; z_2]$ okrog pričakovane vrednosti $E(Z)$, za katerega velja $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = 95{,}4$ %.

c) Pri nekem drugem krogu igre Maria na vsa vprašanja odgovarja z ugibanjem. S tem torej na vsako vprašanje, neodvisno od drugih vprašanj, pravilno odgovori z verjetnostjo 0,5.
Za vsako sodo število vprašanj n pri $n \geq 2$, velja:

$$M(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}5^n$$

1) $\boxed{\text{A}}$ Interpretirajte $M(n)$ v dani vsebinski povezavi.

Za vsako sodo število vprašanj n pri $n \geq 10$, je moč $M(n)$ približno izračunati z $\widetilde{M}(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}$.

Za vsaki sodi $n \geq 10$ obstaja en tak n^*, da velja: $\widetilde{M}(n^*) = \frac{1}{2} \cdot \widetilde{M}(n)$.

2) Določite n^* v odvisnosti od n.

$n^* =$ ____________________

Naloga 28 (del 2)

Merjenja ozona

Plin ozon ima učinke na naše zdravje. Iz tega razloga se na merilnih postajah in s pomočjo vremenskih balonov izvajajo meritve vsakokratne koncentracije ozona v različnih plasteh atmosfere.

Zastavitev naloge:

a) Na *Hohe Warte* na Dunaju se na nadmorski višini 220 m nahaja vremenska postaja. Tukaj štarta vremenski balon z napravo za merjenje ozona, za serijo meritev. Naprava za merjenje ozona začne s svojimi beleženji, ko vremenski balon doseže višino 2 km.

Privzemite, da se vremenski balon (z začetno hitrostjo 0 m/s) vzpenja navpično v višino in pri tem enakomerno pospešuje z 0,125 m/s², tako dolgo da v nekem trenutku t_1 doseže hitrost 6 m/s. Čas je pri tem merjen v sekundah in nadmorska višina v metrih.

1) Ugotovite višino vremenskega balona nad vremensko postajo ob časovnem trenutku t_1.

Od časovnega trenutka t_1 se vremenski balon dviga s konstantno hitrostjo 6 m/s še naprej navpično navzgor.

2) Ugotovite koliko sekund po štartu prične merilna naprava s svojimi beleženji.

b) Vremenski balon ima pri zračnem tlaku 1 013,25 hPa prostornino 6,3 m³. S pojemanjem zračnega tlaka med dviganjem, se vremenski balon vedno bolj razteguje in dobiva približno obliko krogle. Pri premeru *d* metrov se razpoči.

Zračni tlak je moč, v odvisnosti od nadmorske višine *h*, modelirati s funkcijo *p*. Pri tem priredi funkcija *p* nadmorski višini *h* zračni tlak *p*(*h*).

Velja: $p(h) = 1\,013{,}25 \cdot \left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}$ pri *h* v m, *p*(*h*) v hPa

Izhajajte iz tega, da sta zračni tlak *p*(*h*) in prostornina vremenskega balona *V*(*h*) med seboj obratno sorazmerna. Pri tem je *V*(*h*) prostornina vremenskega balona na nadmorski višini *h*.

1) Izrazite prostornino *V*(*h*) s pomočjo nadmorske višine *h*.

$V(h) =$ ____ pri *h* v m, *V*(*h*) v m³

Vremenski balon se razpoči na nadmorski višini *h* = 27 873,6 m.

2) Izračunajte premer vremenskega balona *d* v metrih, pri katerem se le-ta razpoči.

c) Tako imenovani *skupni ozon* je mera za debelino ozonske plasti in se navaja v tako imenovanih *Dobsonovih enotah* (DU).

Podatke merjenja, ki jih zabeleži vremenski balon, je moč modelno opisati z neko kvadratno funkcijo f. Pri tem priredi funkcija f višini h skupno gostoto ozona $f(h)$, (h v km, $f(h)$ v DU/km).

Najvišja vrednost 36 DU/km je izmerjena na nadmorski višini 22 km. Na nadmorski višini 37 km znaša izmerjena vrednost 1 DU/km.

1) $\boxed{\text{A}}$ Določite $f(h)$.

$f(h) =$ ____

V zemeljski atmosferi ustreza 1 DU 0,01 mm debeli plasti čistega ozona na površini zemlje. Debelina tiste plasti čistega ozona na površini zemlje, ki ustreza skupnemu ozonu med 7 km in 37 km nadmorske višine, je $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h$.

2) Izračunajte debelino te plasti.

debelina te plasti: ____ mm