Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

10. januar 2024

Uporabna matematika

TAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge dela A in naloge dela B, z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na razpolago imate *270 minut* delovnega časa.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni papir, ki vam je dan na razpolago. Svoje ime in Vaš letnik oz. Vaš razred vpišite v za to predvideni polji na naslovnici zvezka z nalogami, ter Vaše ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri odgovarjanju vsakega navodila za delo, na delovni papir navedite njegovo oznako (npr.: 3d1).

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano.

Dovoljena je uporaba Zbirke formul za SRDP iz Uporabne Matematike, ki je za klavzurno nalogo potrjena s strani pristojnega člana vlade. Nadalje je dovoljena uporaba elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije), če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnih omrežij itd.) in ni možen dostop do lastnih datotek v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je na vpogled v izpitnem prostoru.

Smernice za reševanje

- Pri nalogah odprtega formata je potrebno vsak račun izvesti z razumljivim računskim nastavkom oz. z razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljena funkcija tehnologije).
- Rešitve morajo biti kot le-te na vsak način enoznačno razpoznavne.
- Rešitve morajo biti na vsak način navedene s pripadajočimi enotami, če je to eksplicitno zahtevano v navodilu za delo.

Za obdelavo se priporoča:

- spremenljivke, ki jih izberete sami, pojasniti in po potrebi navesti s pripadajočimi enotami,
- izogibati se prezgodnjemu zaokroževanju,
- označiti diagrame ali skice.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, kjer je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite želeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Ključ vrednotenja:

dosežene točke	ocena
44–48 točk	Sehr gut – *prav dobro*
38–43 točk	Gut – *dobro*
31–37 točk	Befriedigend – *povoljno*
23–30 točk	Genügend – *zadostno*
0–22 točk	Nicht genügend – *nezadostno*

Veliko uspeha!

Naloga 1

SP v cestnem kolesarstvu

SP v cestnem kolesarstvu 2018 na Tirolskem, je med drugim potekalo v Innsbrucku skozi predel Hötting.

a) Odsek proge z največjim vzponom se imenuje *Höttinger Höll*. Tam znaša največji naklon 25 %.

Nekdo primerja ta vzpon z vzponom na *Kitzbüheler Streif*.

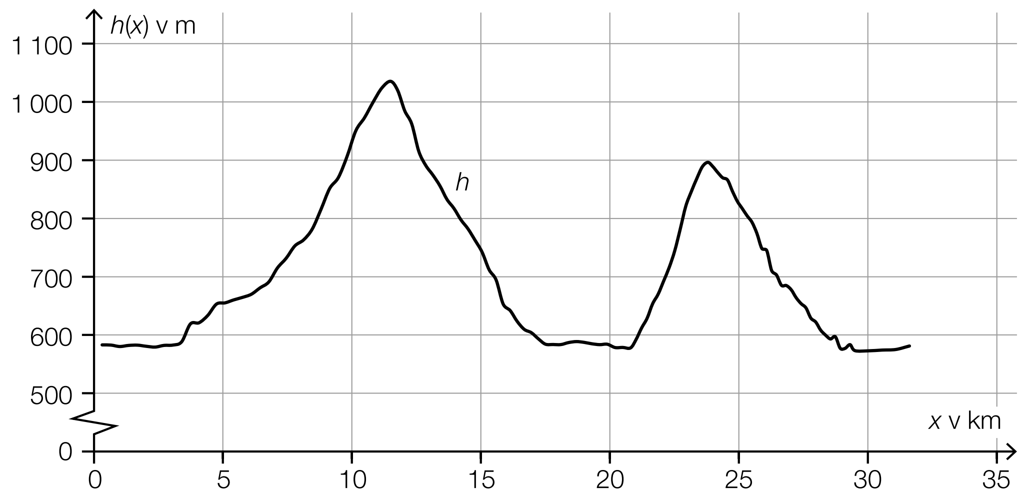
Odsek proge z največjim vzponom na Kitzbüheler Streif se imenuje *Mausefalle*.
Tam znaša maksimalni naklonski kot vzpona 40,4°.

1) Dokazljivo preverite če je maksimalni vzpon na Mausefalle večji kot je le-ta na Höttinger Höll. *[0/1 t.]*

Vzpon vzdolž nekega 7,9 km dolgega delnega odseka modelno privzamemo kot konstanten s 5,7 %.

2) Za ta delni odsek izračunajte višinsko razliko v metrih. *[0/1 t.]*

b) Za neki določeni delni odsek je moč višino nad morsko gladino modelirati s funkcijo h v odvisnosti od prevožene poti x (glej naslednjo sliko).

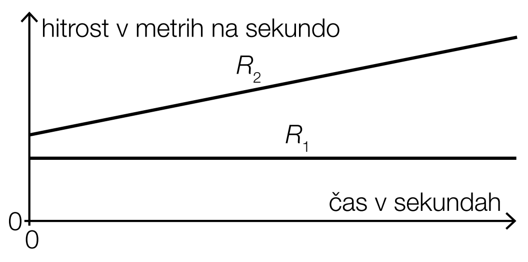
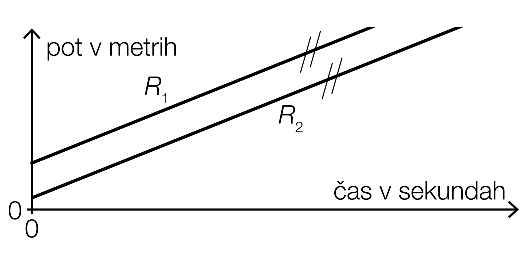


Na intervalu [5; 15] je natanko eno mesto x_1, na katerem velja: $h'(x_1) = 0$ in $h''(x_1) < 0$

1) Na gornji sliki na grafu funkcije h označite pripadajočo točko $P = (x_1 | h(x_1))$. *[0/1 t.]*

c) Za dva tekmovalna kolesarja R_1 in R_2 primerjamo diagrama pot v odvisnosti od časa in hitrost v odvisnosti od časa, narisana na različnih odsekih proge.

1) Obema diagramoma priredite vsakič ustrezno izjavo izmed A do D. *[0/1 t.]*

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

A	R_1 in R_2 vozita z enako hitrostjo.
B	R_1 se nahaja v mirovanju in R_2 pospešuje.
C	Hitrost od R_1 je v vsakem trenutku večja od le-te od R_2.
D	Hitrost od R_1 je konstantna in R_2 pospešuje.

Naloga 2

Sir

a) Pri izdelavi sira se uporabljajo različni encimi.

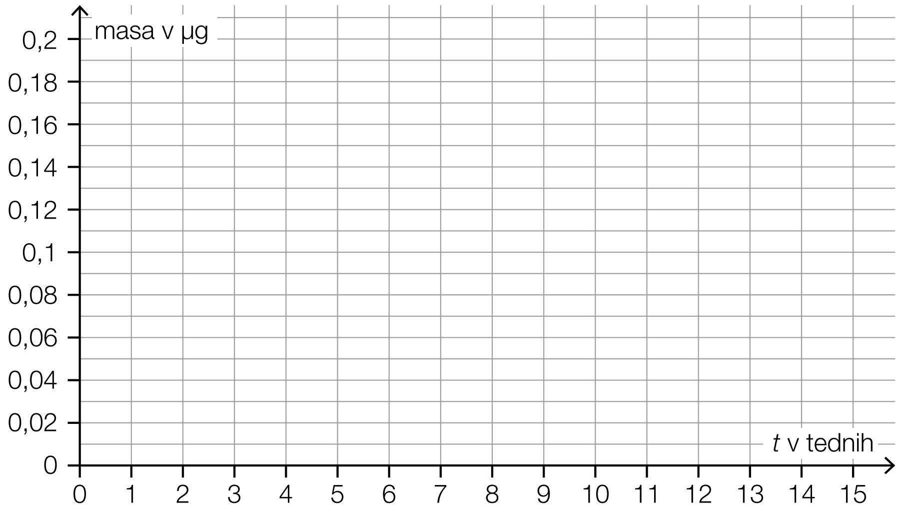
Masa nekega določenega encima s časom eksponentno pojema.

Ob začetku opazovanja (t = 0) je znašala masa 0,19 μg, po 15 tednih pa je masa znašala 0,06 μg.

Masa encima v μg naj bo, v odvisnosti od časa t v tednih, približno opisana z eksponentno funkcijo f.

1) Nastavite enačbo eksponentne funkcije f. *[0/1 t.]*

2) V naslednji koordinatni sistem narišite graf eksponentne funkcije f na intervalu [0; 15]. *[0/1 t.]*

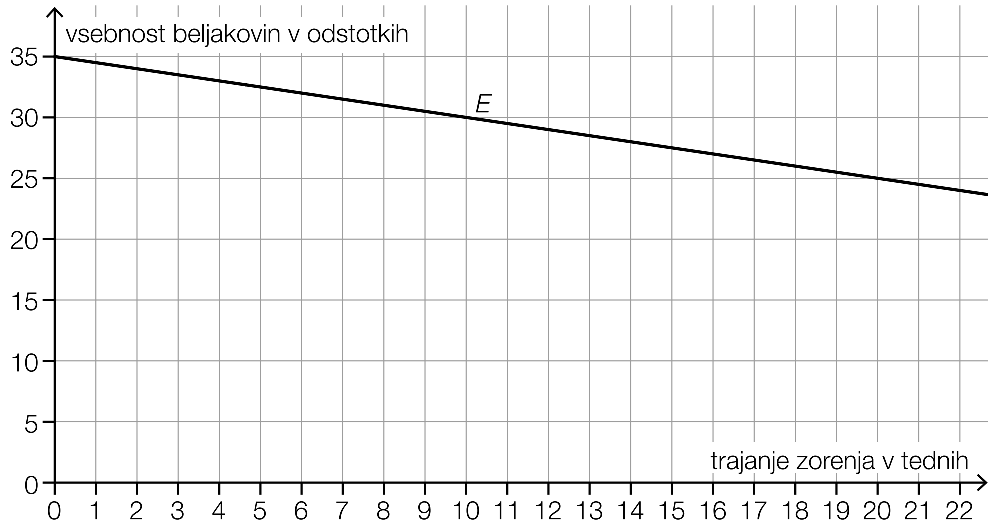


O prostornini nekega drugega encima so bili zbrani naslednji podatki.

čas v tednih	0	2	15
prostornina v ml	0,040	0,033	0,034

3) Na podlagi podatkov iz gornje preglednice utemeljite, zakaj prostornina v odvisnosti od časa <u>ne more biti</u> opisana z nekim linearnim modelom. *[0/1 t.]*

b) Pri zorenju sira neke določene sorte, se spreminja njegova vsebnost beljakovin. Na naslednji sliki je časovni razvoj vsebnosti beljakovin med zorenjem predstavljen kot graf linearne funkcije *E*.



1) Nastavite enačbo linearne funkcije *E*. *[0/1 t.]*

c) Pri siru je skupna masa vsota mase suhe snovi in mase vsebovane vode.

Nekdo kupi kos sira s skupno maso 120 g.
Delež vode v tem kosu sira znaša 35 %.
Na embalaži je naveden delež maščob v suhi snovi: 40 %.

1) S križcem označite ustrezno izjavo. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

Masa suhe snovi znaša 85 g.	☐
Masa maščob znaša 35 g.	☐
Delež maščob v skupni masi znaša 26 %.	☐
Delež suhe snovi v skupni masi znaša 60 %.	☐
Masa vode znaša 30 g.	☐

Naloga 3

Procesi zaviranja

a) Tovornjak zavira pred nekim križiščem.

Funkcijo poti v odvisnosti od časa za ta tovornjak, za časovno obdobje od začetka zaviranja do zaustavitve, označimo z s_L.

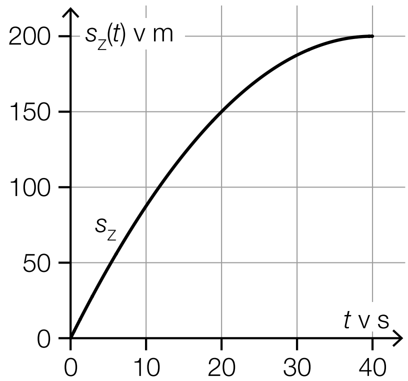
$s_L(t) = 12 \cdot t - t^2$

t ... čas v s pri $t = 0$ za začetek zaviranja
$s_L(t)$ ... prevožena pot ob času t v m

1) Izračunajte hitrost tovornjaka ob začetku zaviranja. Rezultat navedite v km/h. *[0/1 t.]*

2) Izračunajte tisti časovni trenutek, v katerem se tovornjak ustavi. *[0/1 t.]*

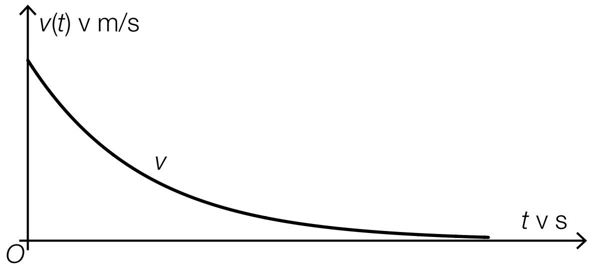
b) Neki vlak zavira pred postajo. Na naslednji sliki je, za zadnjih 200 m preden se zaustavi, predstavljen graf funkcije poti v odvisnosti od časa s_Z.



1) S pomočjo gornje slike ugotovite trenutno hitrost tega vlaka ob času $t = 20$. *[0/1 t.]*

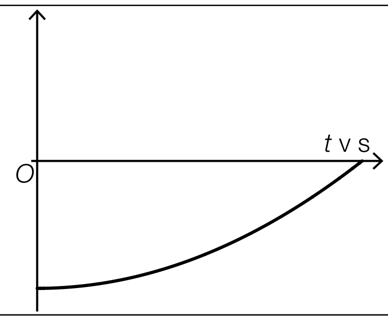
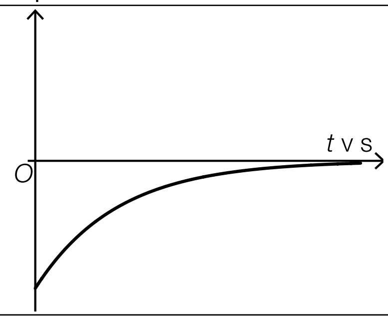
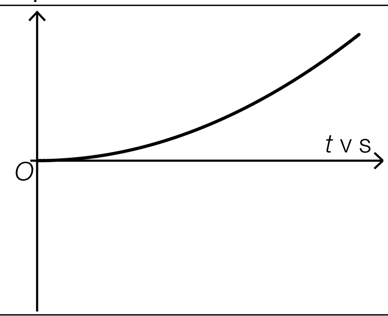
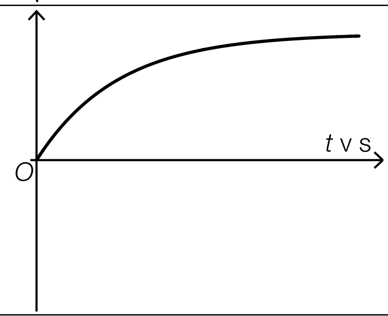
c) Med vožnjo z nekim motornim čolnom se ugasne motor. Zaradi upora v vodi, se motorni čoln upočasnjuje.

Na naslednji sliki je predstavljen graf pripadajoče funkcije hitrosti v odvisnosti od časa za ta motorni čoln.



1) Obema funkcijama priredite vsakič ustrezni graf izmed A do D. *[0/1 t.]*

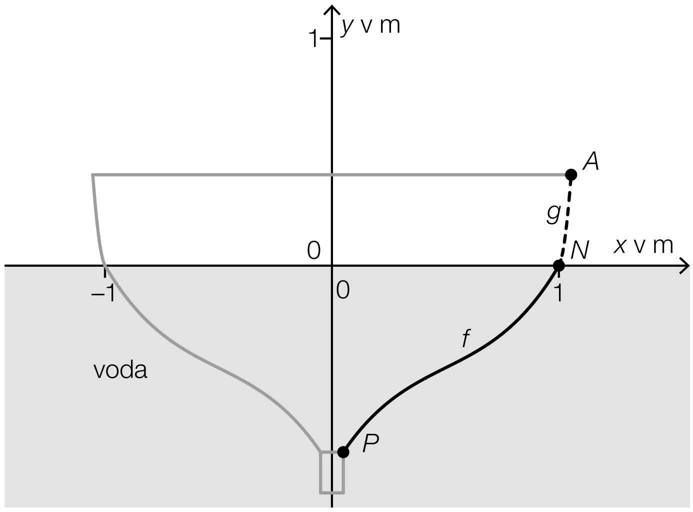
funkcija poti v odvisnosti od časa za motorni čoln	
funkcije pospeška v odvisnosti od časa za motorni čoln	

A	
B	
C	
D	

Naloga 4

Čoln na vesla

Na naslednji sliki je modelno predstavljen glede na y-os simetričen prečni prerez nekega čolna na vesla.



Graf funkcije f je mejna linija prečnega prereza od točke P do točke N.

Graf kvadratne funkcije g je mejna linija prečnega prereza od točke N do točke A.

Za funkcijo f velja:

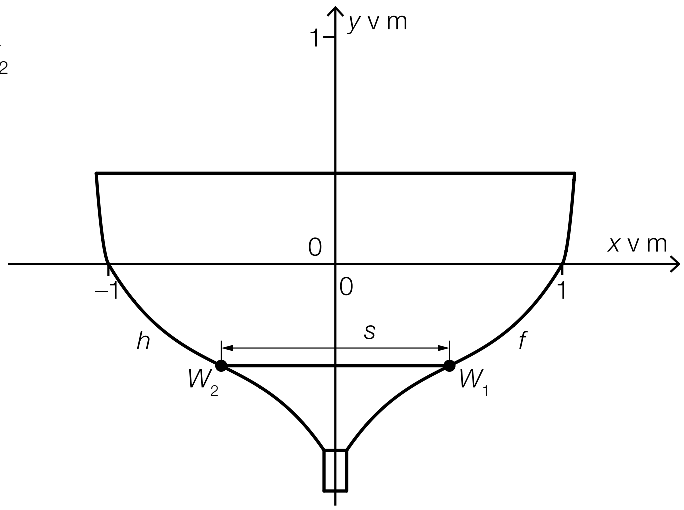
$f(x) = 1{,}6 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 1{,}7 \cdot x - 0{,}9$

a) V točki $N = (1|0)$ imata funkciji f in g enak vzpon.
Graf funkcije g poteka skozi točko $A = (1{,}05|0{,}35)$.

1) Nastavite sistem enačb za izračun koeficientov kvadratne funkcije g. *[0/1/2 t.]*

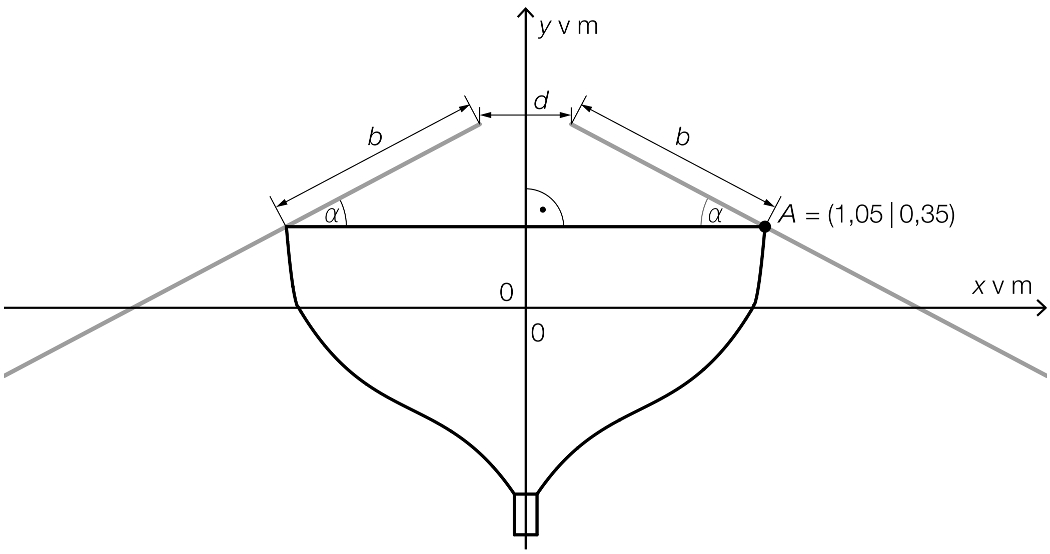
2) Izračunajte koeficiente funkcije g. *[0/1 t.]*

b) Na naslednji sliki sta narisani točka obračaja W_1 funkcije f in točka obračaja W_2 funkcije h, ki je simetrična funkciji f.
Med točki W_1 in W_2 je treba namestiti vodoravno povezavo s.



1) S pomočjo funkcije f izračunajte dolžino s. *[0/1 t.]*

c) Obe vesli se potopita v vodo pod kotom α (glej naslednjo sliko).



1) S križcem označite ustrezno formulo za izračun kota α. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

$\alpha = \arccos\left(\frac{1{,}05 - 0{,}5 \cdot d}{b}\right)$	☐
$\alpha = \arctan\left(\frac{1{,}05 - d}{b}\right)$	☐
$\alpha = \arcsin\left(\frac{0{,}35}{b}\right)$	☐
$\alpha = \arccos\left(\frac{b}{1{,}05}\right)$	☐
$\alpha = \arcsin\left(\frac{1{,}05 - 0{,}5 \cdot d}{b}\right)$	☐

Naloga 5

Letalska prtljaga

a) Pri neki določeni letalski družbi sme vsak potnik oddati največ 2 kosa prtljage.

V naslednji preglednici je predstavljena frekvenčna porazdelitev števila kosov prtljage na potnika za neki določeni let te letalske družbe.

število *i* kosov prtljage na potnika	0	1	2
absolutna frekvenca potnikov z *i* kosi prtljage	H_0	H_1	H_2

1) S pomočjo gornje preglednice nastavite formulo za izračun aritmetične sredine $\overline{x}$ števila kosov prtljage na potnika.

$\overline{x}$ = ____ *[0/1 t.]*

2) S križcem označite tisti izraz, ki v vsakem primeru navaja standardni odklon števila kosov prtljage na potnika. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

$\sqrt{\frac{(0-\overline{x})^2 + (1-\overline{x})^2 + (2-\overline{x})^2}{3}}$	☐
$\sqrt{\frac{(H_0-\overline{x})^2 + (H_1-\overline{x})^2 + (H_2-\overline{x})^2}{3}}$	☐
$\sqrt{\frac{(0-\overline{x})^2 \cdot H_0 + (1-\overline{x})^2 \cdot H_1 + (2-\overline{x})^2 \cdot H_2}{H_1 + 2 \cdot H_2}}$	☐
$\sqrt{\frac{(0-\overline{x})^2 \cdot H_0 + (1-\overline{x})^2 \cdot H_1 + (2-\overline{x})^2 \cdot H_2}{H_0 + H_1 + H_2}}$	☐
$\sqrt{\frac{(H_0-\overline{x})^2 \cdot 0 + (H_1-\overline{x})^2 \cdot 1 + (H_2-\overline{x})^2 \cdot 2}{H_0 + H_1 + H_2}}$	☐

Za neko skupino turistov z 12 potniki znaša mediana števila kosov prtljage na potnika 2.

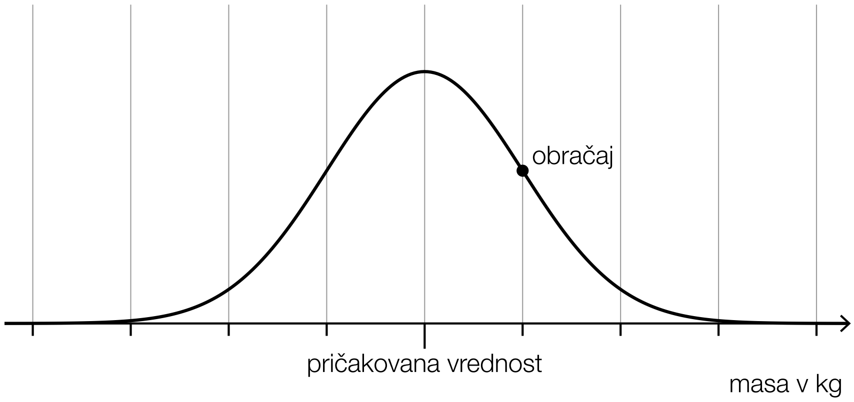
3) Izpolnite naslednjo preglednico. *[0/1 t.]*

število *i* kosov prtljage na potnika	0	1	2
število potnikov z *i* kosi prtljage	5		

b) Masa oddanega kosa prtljage je približno normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo 20 kg in standardnim odklonom 2 kg.

1) Izračunajte verjetnost, da ima kos prtljage maso najmanj 25 kg. *[0/1 t.]*

Na naslednji sliki je predstavljen graf pripadajoče funkcije gostote verjetnosti.



2) Na gornji sliki ponazorite verjetnost, da masa kosa prtljage za največ 2 kg odstopa od pričakovane vrednosti. *[0/1 t.]*

c) Prtljaga se vedno znova pri transportu poškoduje.

Verjetnost, da se je pri transportu kos prtljage poškodoval, znaša vsakič 0,7 %.

Po transportu je pregledan slučajni vzorec 300 kosov prtljage.

1) Izračunajte verjetnost, da sta bila pri transportu poškodovana največ 2 od teh kosov prtljage. *[0/1 t.]*

2) V dani vsebinski povezavi opišite dogodek *E*, čigar verjetnost se izračuna z naslednjim izrazom.

$P(E) = 1 - 0{,}993^{300} \approx 0{,}88$ *[0/1 t.]*

Naloga 6 (del B)

Sestavni deli

V nekem podjetju izdelujejo različne sestavne dele.

a) Funkcija stroškov K za sestavni del A je polinomska funkcija 3. stopnje.

x ... proizvedena količina v KE
$K(x)$ ... stroški pri količini x v DE

1) Obema izjavama priredite vsakič ustrezno enačbo izmed A do D. *[0/1 t.]*

Graf funkcije mejnih stroškov in graf funkcije stroškov na enoto se sekata pri 10 KE.	
Stroški na enoto pri proizvodnji 10 KE znašajo 10 DE/KE.	

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

b) Za funkcijo stroškov K in za funkcijo dobička G za sestavni del B, velja na intervalu [0; 25] naslednje:

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 700 \cdot x + 6\,000$
$G(x) = -40 \cdot x^2 + 1\,200 \cdot x - 6\,000$

x ... proizvedena in prodana količina v KE
$K(x)$ ... stroški pri količini x v DE
$G(x)$ ... dobiček pri količini x v DE

1) Ugotovite največji možni interval proizvedene količine, v katerem znašajo mejni stroški največ 700 DE/KE. *[0/1 t.]*

2) S križcem označite tisto enačbo, katere rešitev je minimum obratovanja. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 0$	☐
$12 \cdot x - 120 = 0$	☐
$2 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 700 = 0$	☐
$4 \cdot x - 60 = 0$	☐
$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x = 0$	☐

Za proizvodnjo sestavnega dela B velja:

1 KE = 10 000 kosov
1 DE = 100 evrov

Proizvedena je natanko tista količina, pri kateri je dobiček največji.

3) Izračunajte dobiček po kosu pri tej količini. Rezultat navedite v evro/kos. *[0/1 t.]*

Za pripadajočo funkcijo izkupička E velja: $E(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$

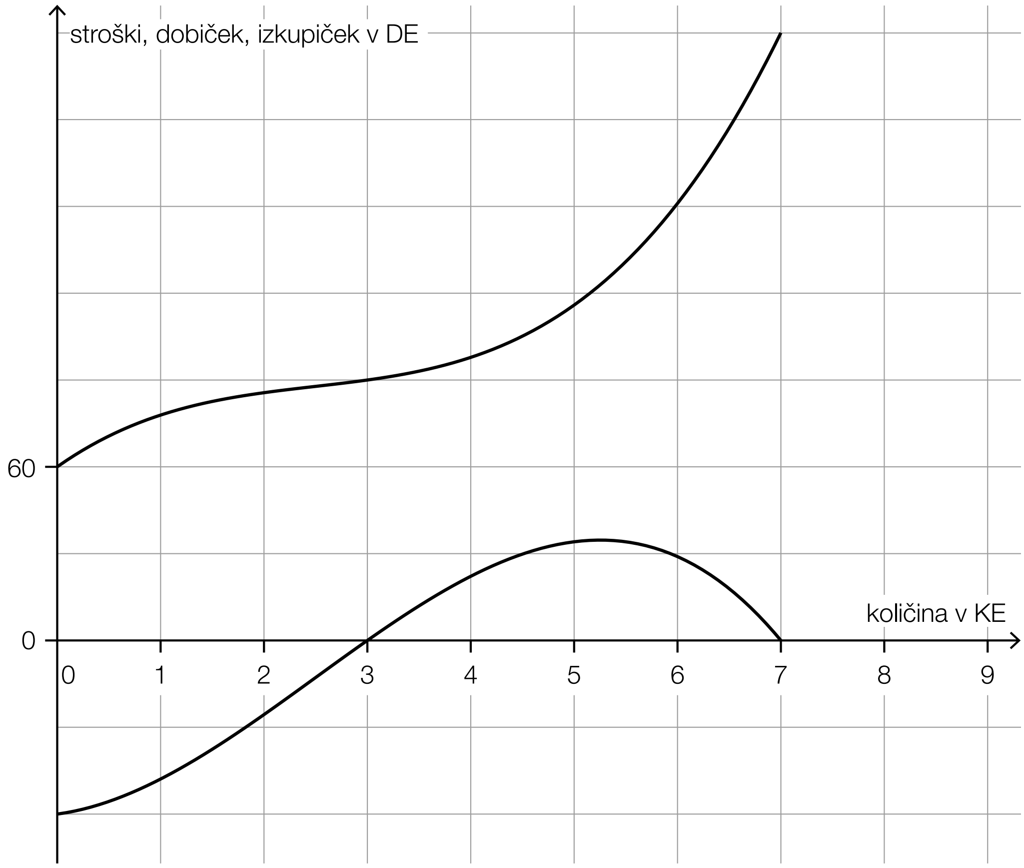
4) Določite parametre a, b in c. *[0/1 t.]*

a = ____________________

b = ____________________

c = ____________________

c) Na naslednji sliki sta predstavljena graf funkcije stroškov in graf funkcije dobička za sestavni del C.



Pripadajoča funkcija izkupička je linearna.

1) Na gornji sliki vrišite graf funkcije izkupička. *[0/1 t.]*

2) Določite ceno, za katero se prodaja sestavni del C. *[0/1 t.]*

d) Za cenovno funkcijo povpraševanja za sestavni del D velja:

$p(x) = p_H - 20 \cdot x$

x ... prodana količina v KE
$p(x)$ ... cena pri prodani količini x v DE/KE
p_H ... najvišja cena v DE/KE

Cena pri prodaji 5 KE znaša 300 DE/KE.

1) Izračunajte najvišjo ceno p_H. *[0/1 t.]*

2) V dani vsebinski povezavi interpretirajte vrednost vzpona cenovne funkcije povpraševanja. *[0/1 t.]*

Naloga 7 (del B)

Plavalni bazen

a) Lea bi rada kupila bazen. V ta namen je na nek bančni račun, pri konstantni letni obrestni meri, v času 5 let izvedla 4 vplačila Z, ter na ta način do danes prihranila 2.468,39 €.

Pri tem velja:

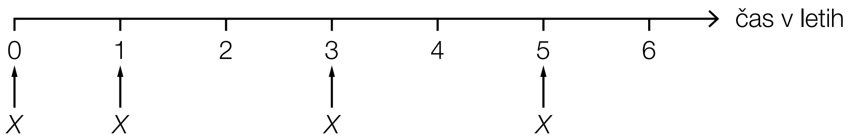
$$Z + Z \cdot 1{,}0102^2 + Z \cdot 1{,}0102^4 + Z \cdot 1{,}0102^5 = 2\,468{,}39$$

1) Odčitajte letno obrestno mero i.

i = ____________________ % p. a. *[0/1 t.]*

2) Izračunajte višino Z. *[0/1 t.]*

b) Melisa bi rada kupila bazen. V ta namen je na nek bančni račun izvedla 4 vplačila X (glej naslednjo časovno os).



Za različne časovne trenutke je potrebno izračunati vrednost teh vplačila.
Letni obrestovalni faktor je označen s q.

1) Obema vrednostma priredite vsakič ustrezni izraz izmed A do D. *[0/1 t.]*

vrednost vseh vplačil v časovnem trenutku 1	
vrednost vseh vplačil v časovnem trenutku 3	

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

c) Konstantin bi rad kupil bazen. V ta namen najame kredit v višini 20.000 €, ki ga želi odplačati s 120 mesečnimi obroki v višini vsakič po 198,71 €. 1. plačilo nastopi 1 mesec po izplačilu kredita.

1) Izračunajte mesečno obrestno mero za ta kredit. *[0/1 t.]*

d) Simon bi rad kupil bazen. V ta namen najame kredit, ki naj bi ga odplačal s postnumerandnimi mesečnimi anuitetami pri mesečni obrestni meri i_{12}.
Višina mesečnih anuitet se pri tem spreminja.

V naslednji preglednici je predstavljen izsek iz pripadajočega odplačilnega načrta.

mesec	obrestni delež	razdolžnina	mesečna anuiteta	ostanek dolga
12				6.766,03 €
13				6.492,13 €
14				6.492,13 €
15			A_{15}	6.217,55 €

1) Navedite tisti mesec, v katerem je razdolžnina 0 €. Utemeljite svojo odločitev. *[0/1 t.]*

2) Nastavite formulo za izračun A_{15}.
Pri tem uporabite i_{12}, kakor tudi vrednosti ostanka dolga v mesecu 14 in v mesecu 15.

A_{15} = ____ *[0/1 t.]*

Naloga 8 (del B)

Stanje števila motornih vozil

a) V naslednji preglednici je za izbrana leta navedeno stanje števila motornih vozil v Avstriji.

konec leta ...	stanje števila motornih vozil v milijonih kosov
2008	5,87
2010	6,09
2012	6,30
2014	6,47
2016	6,65
2018	6,90

Vir podatkov: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/strasse/kraftfahrzeuge_-_bestand/index.html [21.10.2020].

S številkami iz gornje preglednice je izveden naslednji izračun.

$$\frac{6{,}9 - 6{,}3}{6{,}3} \approx 0{,}095$$

1) Rezultat gornjega izračuna interpretirajte dani vsebinski povezavi. *[0/1 t.]*

Stanje števila motornih vozil naj bo v odvisnosti od časa približno opisano z linearno funkcijo K.

t ... čas v letih pri $t = 0$ za konec leta 2008
$K(t)$ ... stanje števila motornih vozil ob času t v milijonih kosov

2) S pomočjo regresijskega računa nastavite enačbo te linearne funkcije K.
Pri tem izberite $t = 0$ za konec leta 2008. *[0/1 t.]*

3) Vrednost vzpona za K interpretirajte dani vsebinski povezavi. *[0/1 t.]*

Funkcijske vrednosti odstopajo od vrednosti, navedenih v preglednici stanja števila motornih vozil.

4) Izračunajte ta absolutni odklon za leto 2018. *[0/1 t.]*

b) Časovni razvoj stanja števila dizelskih motornih vozil v Avstriji je moč modelno opisati z logistično funkcijo D.

$D(t) = \frac{2{,}84}{1 + 277 \cdot e^{-0{,}19 \cdot t}}$

t ... čas v letih pri $t = 0$ zakonec leta 1970

$D(t)$ ... stanje števila dizelskih motornih vozil ob času t v milijonih kosov

1) S pomočjo D določite prognozirano vrednost za stanje števila dizelskih vozil ob koncu leta 2025.

______________________ milijonov kosov *[0/1 t.]*

Za splošno obliko funkcije logistične rasti f velja:

$f(t) = \frac{a}{b + c \cdot d^t}$

a, b, c, d ... pozitivni parametri

$0 < d < 1$

2) S križcem označite tisti izraz, kateremu se funkcijske vrednosti funkcije f z naraščajočim t v vsakem primeru približujejo. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

$\frac{a}{b}$	☐
$\frac{a}{c}$	☐
$\frac{a}{c \cdot d}$	☐
$\frac{a}{b + c}$	☐
$\frac{a}{b + c \cdot d}$	☐

c) Stanje števila električnih motornih vozil je v zadnjih letih močno naraslo. V naslednji preglednici so za izbrana leta navedene odstotne spremembe stanja števila električnih motornih vozil, vsakič ob koncu nekega leta glede na konec vsakokratnega predhodnega leta (vrednosti zaokrožene).

konec leta …	2015	2016	2017	2018
sprememba glede na konec predhodnega leta	+49 %	+80 %	+61 %	+43 %

1) Izračunajte povprečno letno odstotno spremembo stanja števila električnih motornih vozil za časovno obdobje od začetka leta 2015 do konca leta 2018. *[0/1 t.]*

Ob koncu leta 2018 je znašalo stanje števila električnih motornih vozil E kosov.
Ob koncu leta 2017 je znašalo stanje števila električnih motornih vozil X kosov.

2) S pomočjo E nastavite formulo za izračun X.

X = ____ *[0/1 t.]*