| | |
|---|---|
| Ime: | |
| Razred: | |

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni izpit

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

19. september 2023

# Matematika

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

# Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge 1. dela in naloge 2. dela (sestavljene iz delnih nalog). Naloge oz. delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na razpolago imate *270 minut* delovnega časa.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni papir, ki vam je dan na razpolago. Vaše ime in Vaš razred vpišite v za to predvideni polji na naslovnici zvezka z nalogami, ter Vaše ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri odgovarjanju vsakega navodila za delo, na delovni papir navedite njegovo oznako (npr.: 25a1).

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano.

Dovoljena je uporaba Zbirke formul za SRP iz Matematike, ki je za klavzurno nalogo potrjena s strani pristojnega člana vlade.

Nadalje je dovoljena uporaba elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije), če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnih omrežij itd.) in ni možen dostop do lastnih datotek v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je na vpogled v izpitnem prostoru.

**Smernice za reševanje**

- Rešitve morajo biti kot le-te na vsak način nedvoumno razpoznavne.
- Rešitve morajo biti na vsak način navedene s pripadajočimi enotami, če je to eksplicitno zahtevano v navodilu za delo.

**Pri odprtih formatih odgovorov ima pri dodeljevanju točk prednost dokazilo vsakokratne osnovne kompetence. Za obdelavo odprtih formatov odgovorov se priporoča:**

- pot reševanja, tudi v primeru uporabe tehnologije, dokumentirati jasno,
- spremenljivke, ki jih izberete sami, pojasniti in po potrebi navesti s pripadajočimi enotami,
- izogibati se prezgodnjemu zaokroževanju,
- označiti diagrame ali skice.

*Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, kjer je potrebno označevanje s križcem:*

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

| | |
|---|---|
| 1 + 1 = 3 | ☐ |
| 2 + 2 = 4 | ☒ |
| 3 + 3 = 5 | ☐ |
| 4 + 4 = 4 | ☐ |
| 5 + 5 = 9 | ■ |
| 6 + 6 = 10 | ☐ |

*Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:*

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite želeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

| | |
|---|---|
| 1 + 1 = 3 | ☐ |
| 2 + 2 = 4 | ■ |
| 3 + 3 = 5 | ☐ |
| 4 + 4 = 4 | ■ |
| 5 + 5 = 9 | ☐ |
| 6 + 6 = 10 | ☐ |

Ključ vrednotenja

| dosežene točke | ocena |
|---|---|
| 32–36 točk | Sehr gut – *prav dobro* |
| 27–31,5 točk | Gut – *dobro* |
| 22–26,5 točk | Befriedigend – *povoljno* |
| 17–21,5 točk | Genügend – *zadostno* |
| 0–16,5 točk | Nicht genügend – *nezadostno* |

**Best-of-vrednotenje:** Za naloge 26, 27 in 28 velja Best-of-vrednotenje. Izmed teh treh nalog 2. dela, se tista naloga, pri kateri je bilo doseženo najnižje število točk, ne vrednoti.

**Veliko uspeha!**

# Naloga 1

## Cela števila in iracionalna števila

Dane so štiri lastnosti števil ter šest števil.

Zastavitev naloge:

Štirim lastnostim števil priredite vsakič število s to lastnostjo izmed A do F.

| | |
|---|---|
| negativno celo število | |
| negativno iracionalno število | |
| pozitivno celo število | |
| pozitivno iracionalno število | |

| | |
|---|---|
| A | $2 - \sqrt{10}$ |
| B | $10^{-2}$ |
| C | $-\sqrt{10^2}$ |
| D | $2 : (-10)$ |
| E | $\sqrt{10} : 2$ |
| F | $\left(-\sqrt{10}\right)^2$ |

*[0/½/1 t.]*

# Naloga 2

## Vožnja s taksijem

Pri nekem določenem podjetju s taksiji je dnevna tarifa sestavljena na naslednji način: dodatno k vnaprej določeni startnini $G$ je potrebno na vsak kilometer prevožene poti plačati znesek $K$.

Za prevoz, ki se prične ponoči med 20:00 uro in 6:00 uro, je potrebno odšteti še 30 % dodatek na dnevno tarifo.

Neki potnik ob 22:00 uri vstopi v taksi tega podjetja in se z njim prepelje pot $S$ kilometrov.

Zastavitev naloge:

Nastavite enačbo za izračun skupnih prevoznih stroškov $F$ za to vožnjo.
Pri tem uporabite $G$, $S$ in $K$.

$F$ = ________________________________________

*[0/1 t.]*

# Naloga 3

## Jabolčni sok in pomarančni sok

Na neki prireditvi sta od pijač v prodaji izključno jabolčni in pomarančni sok v kozarčkih.
Skupaj se na tej prireditvi proda 375 kozarčkov soka, od tega *a* kozarčkov jabolčnega soka po vsakič 0,80 € in *b* kozarčkov pomarančnega soka po vsakič 1,00 €.
Pri tem doseženi izkupiček znaša 339,00 €.

Zastavitev naloge:

Sestavite sistem enačb za izračun *a* in *b*.

I: ________________________________________

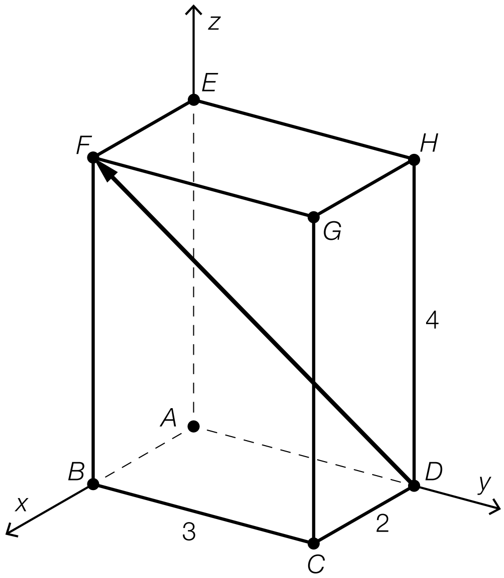
II: ________________________________________

*[0/½/1 t.]*

# Naloga 4

## Kvader

Na naslednji sliki je predstavljen kvader *ABCDEFGH* v tridimenzionalnem koordinatnem sistemu.
Dolžine robov kvadra je moč odčitati iz slike (navedbe v cm).




Zastavitev naloge:

Navedite koordinate vektorja $\overrightarrow{DF}$.

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{pmatrix}$$

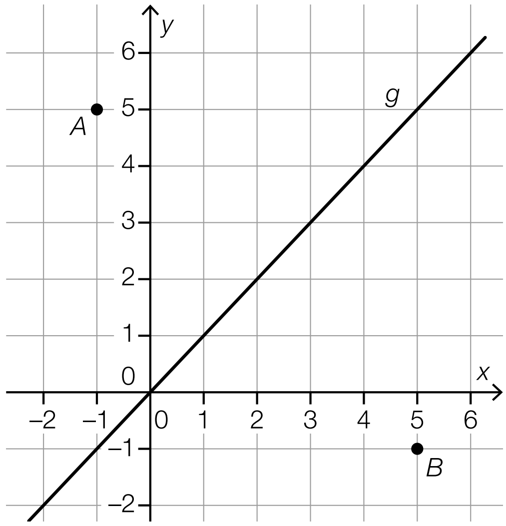
*[0/1 t.]*

# Naloga 5

## Vektor in premica

Na spodnji sliki sta predstavljeni točki $A$ in $B$, prav tako pa tudi premica $g$: $y = x$.

Točki $A$ in $B$ imata celoštevilske koordinate.




Zastavitev naloge:

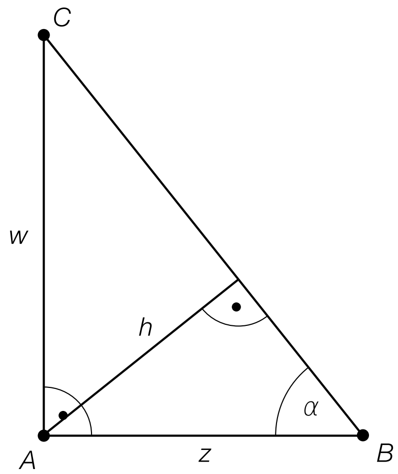
Računsko dokažite, da stoji vektor $\overrightarrow{AB}$ pravokotno na premico $g$.

*[0/1 t.]*

# Naloga 6

## Trikotnik

Na naslednji sliki je predstavljen pravokotni trikotnik *ABC*.




Zastavitev naloge:

S križcem označite tisto enačbo, ki v vsakem primeru velja. *[1 izmed 6]*

| | |
|---|---|
| $h = \frac{w}{\sin(\alpha)} \cdot \cos(\alpha)$ | ☐ |
| $h = \frac{w}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha)$ | ☐ |
| $h = \frac{w}{\sin(\alpha)} \cdot \tan(\alpha)$ | ☐ |
| $h = \frac{w}{\tan(\alpha)} \cdot \sin(\alpha)$ | ☐ |
| $h = \frac{\sin(\alpha)}{w} \cdot \tan(\alpha)$ | ☐ |
| $h = \frac{\sin(\alpha)}{w} \cdot \cos(\alpha)$ | ☐ |

*[0/1 t.]*

# Naloga 7

## Eksponentne funkcije

Dana je eksponentna funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblike $f(x) = a \cdot b^x$ pri $a, b \in \mathbb{R}$ in $a, b > 0$ ter $b \neq 1$.

Zastavitev naloge:

S križcem označite obe izjavi, ki sta pravilni za vsako eksponentno funkcijo zgoraj navedene oblike. *[2 izmed 5]*

| | |
|---|---|
| *f* nima ničel. | ☐ |
| *f* je strogo monotono naraščajoča. | ☐ |
| *f* ima najmanj eno mesto lokalnega ekstrema. | ☐ |
| Graf funkcije *f* je pozitivno ukrivljen (levo ukrivljen). | ☐ |
| Graf funkcije *f* se za $x \to \infty$ približuje pozitivnemu delu *x*-osi. | ☐ |

*[0/1 t.]*

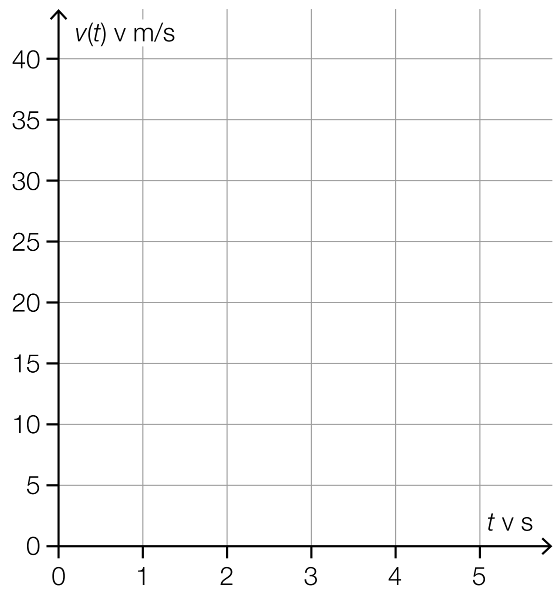
# Naloga 8

## Pospeševanje

Neko vozilo se premika s hitrostjo 20 m/s na premočrtni progi v smeri naprej.
Od časovnega trenutka $t = 0$ naprej, 5 s enakomerno pospešuje s 3 m/s$^2$. Smer gibanja ostane nespremenjena.
Funkcija $v$ opisuje hitrost tega vozila (v m/s) po $t$ sekundah, v časovnem intervalu [0; 5].

Zastavitev naloge:

V naslednji koordinatni sistem vrišite graf funkcije $v$.




*[0/1 t.]*

# Naloga 9

## Kvadratna funkcija

Dana je kvadratna funkcija $f$ oblike $f(x) = a \cdot x^2 + b$ pri $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Zastavitev naloge:

Navedite pogoj, ki ga morata izpolnjevati parametra $a$ in $b$, da ima funkcija $f$ dve realni ničli.

*[0/1 t.]*

# Naloga 10

## Število ničel polinomske funkcije

Med številom možnih realnih ničel in stopnjo polinomske funkcije obstaja povezava.

Zastavitev naloge:

V naslednjem stavku dopolnite vrzeli v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezni del stavka tako, da nastane pravilna izjava.

Vsaka polinomska funkcija ___①___ stopnje ima ___②___ eno realno ničlo.

| ① | |
|---|---|
| druge | ☐ |
| tretje | ☐ |
| četrte | ☐ |

| ② | |
|---|---|
| natanko | ☐ |
| najmanj | ☐ |
| več kot | ☐ |

*[0/1 t.]*

# Naloga 11

## Podvojitveni čas

Število bakterij pri vsaki od šestih bakterijskih kultur eksponentno raste. Pri tem je vsakokratni podvojitveni čas različen.

Število bakterij vsakokratne bakterijske kulture se v odvisnosti od časa $t$ modelira z $N_i\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+, t \mapsto N_i(t)$ pri $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ ($t$ v urah).

Zastavitev naloge:

Štirim izjavam o podvojitvenih časih priredite vsakič pripadajočo funkcijsko enačbo izmed A do F.

| | |
|---|---|
| Število bakterij se podvoji 1-krat na uro. | |
| Število bakterij se podvoji 2-krat na uro. | |
| Število bakterij se podvoji 3-krat na uro. | |
| Število bakterij se podvoji 4-krat na uro. | |

| | |
|---|---|
| A | $N_1(t) = N_1(0) \cdot 1{,}5^t$ |
| B | $N_2(t) = N_2(0) \cdot 4^t$ |
| C | $N_3(t) = N_3(0) \cdot 2^t$ |
| D | $N_4(t) = N_4(0) \cdot 16^t$ |
| E | $N_5(t) = N_5(0) \cdot 3^t$ |
| F | $N_6(t) = N_6(0) \cdot 8^t$ |

*[0/½/1 t.]*

# Naloga 12

## Dolžina periode

Dana je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pri $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{c} \cdot x\right)$ pri $c \in \mathbb{R}^{+}$.

(Najmanjša) dolžina periode funkcije $f$ je $\frac{3}{2}$.

Zastavitev naloge:

Določite $c$.

*[0/1 t.]*

# Naloga 13

## Bitcoin

*Bitcoin* je digitalna umetna valuta (kripto valuta). 17.12.2017 je znašal menjalni tečaj 16.198,60 € na Bitcoin.
Naslednja preglednica prikazuje menjalni tečaj Bitcoina v razdobju enega leta.

| datum | menjalni tečaj na Bitcoin |
|---|---:|
| 17.12.2017 | 16.198,60 € |
| 17.03.2018 | 6.422,98 € |
| 17.06.2018 | 5.571,62 € |
| 17.09.2018 | 5.362,46 € |
| 17.12.2018 | 3.145,20 € |

V enem od trimesečnih časovnih intervalov je znesek absolutne spremembe menjalnega tečaja največji.

Zastavitev naloge:

Izračunajte relativno spremembo menjalnega tečaja Bitcoina v tem časovnem intervalu.

relativna sprememba: ________________________________________

*[0/1 t.]*

# Naloga 14

## Povprečna hitrost

Gibanje nekega določenega telesa je modelirano s funkcijo poti v odvisnosti od časa *s* pri $s(t) = d \cdot t^2$ ($t$ v s, $s(t)$ v m).
Povprečna hitrost tega telesa v časovnem intervalu [0 s; 2 s] znaša 10 m/s.

Zastavitev naloge:

Določite *d*.

*[0/1 t.]*

# Naloga 15

## Primitivna funkcija neke sinusne funkcije

Funkcija $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pri $F(x) = -1{,}25 \cdot \cos(b \cdot x)$ je primitivna funkcija funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pri $f(x) = 2 \cdot \sin(b \cdot x)$ in $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Zastavitev naloge:

Določite $b$.

*[0/1 t.]*

# Naloga 16

## Vrednost nekega določenega integrala

Funkcija $g$ je primitivna funkcija polinomske funkcije $f$. Za funkcijo $g$ je danih nekaj parov vrednosti:

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| –2 | 3 |
| –1 | 0 |
| 0 | –1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 3 |
| 3 | 8 |
| 4 | 15 |

Zastavitev naloge:

Navedite vrednost naslednjega integrala.

$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ______________________________

*[0/1 t.]*

# Naloga 17

## Lastnosti polinomske funkcije

Neka polinomska funkcija 4. stopnje *f* ima na mestih $a \in \mathbb{R}$ in $b \in \mathbb{R}$ pri $a < b$ vsakič lokalni maksimum. Spodaj je navedenih šest izjav za $c \in \mathbb{R}$ pri $a < c < b$.

Zastavitev naloge:

S križcem označite tisto izjavo, ki je v vsakem primeru ustrezna. *[1 izmed 6]*

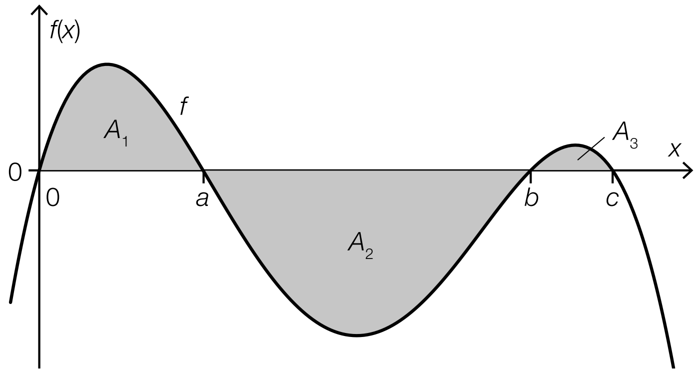
| | |
|---|---|
| Obstoja natanko en $c$, za katerega velja $f'(c) = 0$. | ☐ |
| Obstoja natanko en $c$, za katerega velja $f''(c) = 0$. | ☐ |
| Ne obstoja tak $c$, za katerega velja $f(c) = 0$. | ☐ |
| Ne obstoja tak $c$, za katerega velja $f'(c) = 0$. | ☐ |
| Obstoja natanko en $c$, za katerega velja $f(c) = 0$. | ☐ |
| Ne obstoja tak $c$, za katerega velja $f''(c) = 0$. | ☐ |

*[0/1 t.]*

# Naloga 18

## Integral in ploščina

Spodnja slika prikazuje graf funkcije $f$, ki seka $x$-os na mestih 0, $a$, $b$ in $c$.
Graf funkcije $f$ oklepa z $x$-osjo tri območja s ploščinami $A_1 = 17$, $A_2 = 50$ ter $A_3 = 2$.




Zastavitev naloge:

Štirim izrazom priredite vsakič pripadajočo vrednost izmed A do F.

| | |
|---|---|
| $\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x$ | |
| $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ | |
| $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ | |
| $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + 100$ | |

| | |
|---|---|
| A | –31 |
| B | 69 |
| C | –33 |
| D | 52 |
| E | 67 |
| F | 152 |

*[0/½/1 t.]*

# Naloga 19

## Nabor podatkov

Dan je neki nabor podatkov z $n$ naravnimi števili ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Zastavitev naloge:

V naslednjem stavku dopolnite vrzeli v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezni del stavka tako, da nastane pravilna izjava.

Če se vse vrednosti v naboru podatkov povečajo za $a$ ($a \in \mathbb{R}^+$), se poveča tudi ___①___ za $a$, medtem ko se ___②___ ne spremeni.

| ① | |
|---|---|
| variacijski razmik | ☐ |
| mediana | ☐ |
| varianca | ☐ |

| ② | |
|---|---|
| aritmetična sredina | ☐ |
| modus | ☐ |
| standardni odklon | ☐ |

*[0/½/1 t.]*

# Naloga 20

## Število rojstev

V regionalnem časopisu lahko o nekem določenem okraju preberemo naslednji stavek:
»V letu 2019 je bilo število rojstev v okraju nad povprečno vrednostjo 4-letnega časovnega obdobja od 2015 do 2018.«

Zastavitev naloge:

S križcem označite obe izjavi, ki sta ob upoštevanju gornjega stavka lahko na vsak način podani. *[2 izmed 5]*

| | |
|---|---|
| Število rojstev je bilo v letu 2019 višje kot v vsakem letu časovnega obdobja od 2015 do 2018. | ☐ |
| Skupno število rojstev v časovnem obdobju od 2015 do 2018 je bilo nižje, kot štirikratno število rojstev v letu 2019. | ☐ |
| Število rojstev je bilo vsaj v enem letu časovnega obdobja od 2015 do 2018 višje kot v letu 2019. | ☐ |
| Število rojstev je bilo v največ treh letih časovnega obdobja od 2015 do 2018 višje kot v letu 2019. | ☐ |
| Število rojstev je bilo v vsaj dveh letih časovnega obdobja od 2015 do 2018 nižje kot v letu 2019. | ☐ |

*[0 / 1 t.]*

# Naloga 21

## Igra na srečo

Verjetnost, da zmagamo 1 krog neke določene igre na srečo, ima vrednost $p$.
Verjetnost, da zmagamo 2 zaporedna kroga te igre na srečo, ima vrednost $p_1$.
Zaporedni krogi so med seboj neodvisni.

Zastavitev naloge:

S križcem označite obe izjavi, ki sta za zgoraj opisano igro na srečo na vsak način pravilni.
*[2 izmed 5]*

| | |
|---|---|
| $p_1 = 2 \cdot p$ | ☐ |
| $p_1 = (1 - p)^2$ | ☐ |
| $p_1 = p \cdot (1 - p)$ | ☐ |
| $p_1 \leq p$ | ☐ |
| $p_1 = p^2$ | ☐ |

*[0/1 t.]*

# Naloga 22

## Sladolednica

V neki sladolednici ponujajo 24 različnih vrst sladoleda.

Zastavitev naloge:

Navedite število možnosti, da izmed 24 ponujenih vrst sladoleda izberemo 3 različne vrste sladoleda. (Pri tem vrstni red v izboru ne igra vloge.)

*[0/1 t.]*

# Naloga 23

## Verjetnost nekega dogodka

Neki slučajni poskus izvedemo $n$-krat ($n \in \mathbb{N}$ pri $n \geq 12$).

Slučajna spremenljivka $X$ podaja kako pogosto se pri teh $n$ ponovitvah zgodi neki določeni dogodek.
Verjetnost, da se ta dogodek zgodi vsaj 10-krat, znaša 35 %.

Zastavitev naloge:

S križcem označite obe izjavi, ki sta na vsak način pravilni. *[2 izmed 5]*

| | |
|---|---|
| $P(X = 0) = 0$ | ☐ |
| $P(X \leq 10) = 0{,}35$ | ☐ |
| $P(X < 9) \leq 0{,}65$ | ☐ |
| $P(X \geq 10) = 0{,}35$ | ☐ |
| $P(X > 11) > 0{,}4$ | ☐ |

*[0/1 t.]*

# Naloga 24

## Zagotavljanje kakovosti

V okviru zagotavljanja kakovosti pri proizvodnji porcelanastih figuric se le-te, po tem ko so dokončane, preverja na napake. Glede na izkušnje je znano, da ima 2% porcelanastih figuric napako.

Odvzame se vzorec $n$ porcelanastih figuric ($n \in \mathbb{N}$ pri $n \geq 2$). Privzema se, da je število porcelanastih figuric, ki imajo napako, binomsko porazdeljeno.
Dogodek, da ima najmanj 1 od $n$ porcelanastih figuric napako, označimo z $E$.

Zastavitev naloge:

S pomočjo $n$ nastavite formulo za izračun verjetnost $P(E)$.

$P(E) =$ ____________________________________________

*[0/1 t.]*

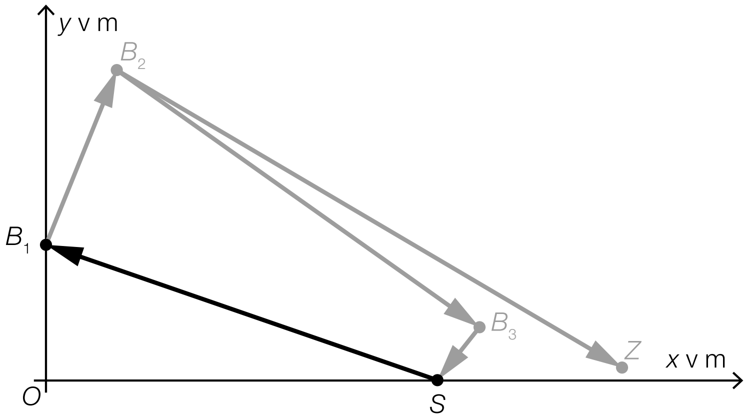
# Naloga 25 (2. del)

## Triatlon

*Triatlon* je tekmovanje, pri katerem športnice in športniki opravijo tekmovanje v plavanju, tekmovanje v kolesarjenju in tekmovanje v teku, v natanko tem zaporedju.

Zastavitev naloge:

a) Na naslednji sliki je modelno predstavljen potek plavalne proge nekega določenega triatlona. Tekmovanje v plavanju se prične v točki $S$ in konča v točki $Z$, med njima pa morajo biti dosežene kontrolne točke $B_1$, $B_2$, $B_3$, $S$, $B_1$ in $B_2$ v natanko tem zaporedju.




Razdalja med točkama $S = (600|0)$ in $B_1$ znaša 700 m.

1) Izračunajte $y$-koordinato točke $B_1$.

$B_1 = (0|\boxed{\phantom{000}})$ *[0/1 t.]*

b) Pri tekmovanju v kolesarjenju na nekem določenem triatlonu starta Stefanie 1,45 min pred Tanjo.

$t$ ... čas v min
$t = 0$ ... časovni trenutek, ob katerem starta Stefanie
$v_{\text{Stefanie}}(t)$ ... hitrost, ki jo ima Stefanie v časovnem trenutku $t$ v km/min
$v_{\text{Tanja}}(t)$ ... hitrost, ki jo ima Tanja v časovnem trenutku $t$ v km/min

Stefanie doseže cilj tekmovanja v kolesarjenju po času vožnje 291 min. Ob tem Času je Tanja še na kolesarski progi.

1) Interpretirajte, kaj je moč v dani vsebinski povezavi izračunati z naslednjim izrazom.

$\int_0^{291} v_{\text{Stefanie}}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1,45}^{291} v_{\text{Tanja}}(t)\,\mathrm{d}t$ *[0/1 t.]*

c) Michael sodeluje na nekem določenem triatlonu.

Michael starta na zaključnem, 42,195 km dolgem, tekmovanju v teku z dotedanjim skupnim časom 5 h 12 min 38 s.

Michael zaključi triatlon s skupnim časom 7 h 36 min 56 s.

1) Izračunajte Michaelovo povprečno hitrost pri tekmovanju v teku v km/h. *[0/1 t.]*

d) Najbolj znani triatlon je *Ironman World Championship* na Havajih.

Funkcija $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pri $f(t) = 0{,}1275 \cdot t^3 - 8{,}525 \cdot t^2 + 198{,}425 \cdot t + 15$ za časovno obdobje od 1978 do 2018 modelno opisuje število oseb, ki se udeležijo tega triatlona, v odvisnosti od časa $t$ ($t$ v letih pri $t = 0$ za leto 1978).

Vir: https://www.tri226.de/ironman-ergebnisse.php?language=ge&table=start_finish [09.08.2022].

Število oseb, ki se udeležijo tega tekmovanja, je v časovnem obdobju od 1978 do 2018 v povprečju naraslo za $n$ oseb na leto.

1) Izračunajte $n$. *[0/1 t.]*

# Naloga 26 (2. del, Best-of-vrednotenje)

## »Človek ne jezi se«

»Človek ne jezi se« je namizna igra za najmanj 2 osebi. Cilj igralca je, svoje 4 isto-barvne igralne figurice čim hitreje premakniti iz startnih polj v ciljna polja.

Zastavitev naloge:

a) V platneni vrečki se nahajajo 4 rdeče, 4 rumene in 4 modre igralne figurice neke igre »Človek ne jezi se«. Isabella slučajno in brez vračanja izvleče 4 igralne figurice.

1) Izračunajte verjetnost, da so vse 4 izvlečene igralne figurice rdeče. *[0/1 t.]*

Isabella je izvlekla vse rdeče igralne figurice. Platnena vrečka vsebuje torej samo še 4 rumene in 4 modre igralne figurice.
Sedaj izvleče Fatima tolikokrat brez vračanja, vsakič po 1 igralno figurico, dokler ne izvleče vseh 4 rumenih igralnih figuric.

Slučajna spremenljivka $X$ opisuje število izvlačenj $k$, ki jih potrebuje Fatima, dokler ne izvleče vseh 4 rumenih figuric. Z naslednjo preglednico je podana porazdelitev verjetnosti slučajne spremenljivke $X$.

| $k$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{70}$ | $u$ | $\frac{10}{70}$ | $\frac{20}{70}$ | $v$ |

2) Izračunajte $u$ in $v$.

$u$ = ____________________

$v$ = ____________________ *[0/1 t.]*

b) Isabella zmaga proti svoji prijateljici Fatimi povprečno 3 od 5 partij »Človek ne jezi se«. V prihajajočih poletnih počitnicah bosta obe deklici med seboj odigrali *n* partij (*n* sodo, $n > 2$). Binomsko porazdeljena slučajna spremenljivka *Y* podaja, koliko izmed *n* partij bo zmagala Isabella.

Dane so štiri verjetnosti in šest dogodkov.

1) Štirim verjetnostim priredite vsakič tisti dogodek, ki nastopa s to verjetnostjo izmed A do F. *[0/½/1 t.]*

| | |
|---|---|
| $\binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}6^{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}4^{\frac{n}{2}}$ | |
| $1 - 0{,}4^n - n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^{n-1}$ | |
| $1 - 0{,}6^n$ | |
| $n \cdot 0{,}6^{n-1} \cdot 0{,}4$ | |

| | |
|---|---|
| A | Isabella zmaga natanko polovico od *n* partij. |
| B | Isabella zmaga najmanj 2 od *n* partij. |
| C | Isabella izgubi več kot polovico od *n* partij. |
| D | Isabella izgubi natanko 1 od *n* partij. |
| E | Isabella izgubi najmanj 1 od *n* partij. |
| F | Isabella zmaga največ 1 od *n* partij. |

Pričakovano vrednost za *Y* označimo z $\mu$, standardni odklon za *Y* pa označimo z $\sigma$.

2) Izračunajte verjetnost $P(\mu - \sigma < Y < \mu + \sigma)$ za $n = 14$. *[0/1 t.]*

# Naloga 27 (2. del, Best-of-vrednotenje)

## Čebelarstvo v Avstriji

Naslednja preglednica podaja informacije o številu čebelarjev/-k in njihovih čebeljih družin v Avstriji, za časovno obdobje od 2015 do 2019.

| leto | število čebelarjev/-k | število čebeljih družin |
|---|---|---|
| 2015 | 26 063 | 347 128 |
| 2016 | 26 609 | 354 080 |
| 2017 | 27 580 | 353 267 |
| 2018 | 28 432 | 373 412 |
| 2019 | 30 237 | 390 607 |

Vir: https://www.biene-oesterreich.at/daten-und-zahlen+2500++1000247 [10.08.2020].

Zastavitev naloge:

a) Maja izvede s podatki iz gornje preglednice naslednji izračun:

$\frac{353\,267}{27\,580} \approx 13$

1) Interpretirajte rezultat tega izračuna v dani vsebinski povezavi. *[0/1 t.]*

b) Število čebelarjev/-k v Avstriji, v odvisnosti od časa $t$, modelirajmo s kvadratno funkcijo $f$ oblike $f(t) = c \cdot t^2 + d$ pri $c, d \in \mathbb{R}$ ($t$ v letih pri $t = 0$ za leto 2015).
Pripadajoči funkcijski vrednosti funkcije $f$ se za leti 2015 in 2019 ujemata z vrednostmi iz gornje preglednice.

1) Izračunajte $c$ in $d$. *[0/1 t.]*

c) Nizke temperature vodijo do zimskega umiranja čebeljih družin. Število čebeljih družin bi brez ponovne vzreje s strani čebelarjev/-k letno upadlo za povprečno 16 %.

Število čebeljih družin v Avstriji, ki bi jih imeli brez ponovne vzreje, je opisano z eksponentno funkcijo $g$.

Velja:

$t$ ... čas v letih pri $t = 0$ za leto 2015
$g(t)$ ... število čebeljih družin v Avstriji ob času $t$

1) Nastavite funkcijsko enačbo za funkcijo $g$.

$g(t) =$ ____________________________________________ *[0/1 t.]*

2) Izračunajte po koliko časa se število čebeljih družin v Avstriji v skladu s funkcijo $g$ razpolovi. *[0/1 t.]*

# Naloga 28 (2. del, Best-of-vrednotenje)

## Ribnik

V nekem umetno zasnovanem ribniku se nahaja 129 $m^3$ vode.

Zastavitev naloge:

a) Ribnik je moč skozi 2 odtoka popolnoma izprazniti.

Če se odpre samo en odtok, potem traja do popolnega izpraznjenja 10 h.
Če se odpre samo drugi odtok, potem traja do popolnega izpraznjenja 6 h.
Vsakokratna hitrost izpraznjevanja je pri tem ves čas konstantna.
Časovno trajanje, ki je potrebno do popolnega izpraznjenja, če sta istočasno odprta oba odtoka, je označeno s $T$.

1) Izračunajte $T$. *[0/1 t.]*

b) Popolnoma izpraznjen ribnik se zopet napolni s 129 $m^3$ vode.

Funkcija $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ podaja trajanje polnjenja $d(z)$ v odvisnosti od konstantne dotočne hitrosti $z$ ($z$ v $m^3$/h, $d(z)$ v h).

1) Nastavite enačbo funkcije $d$.

$d(z) =$ ____________________________________________ *[0/1 t.]*

Funkcija $h$ opisuje višino površine vode nad najnižjo točko ribnika, v odvisnosti od časa $t$, pri konstantni dotočni hitrosti $z = 6$ $m^3$/h ($t$ v h, $h(t)$ v m).

Za trenutno hitrost spreminjanja višine površine vode velja:

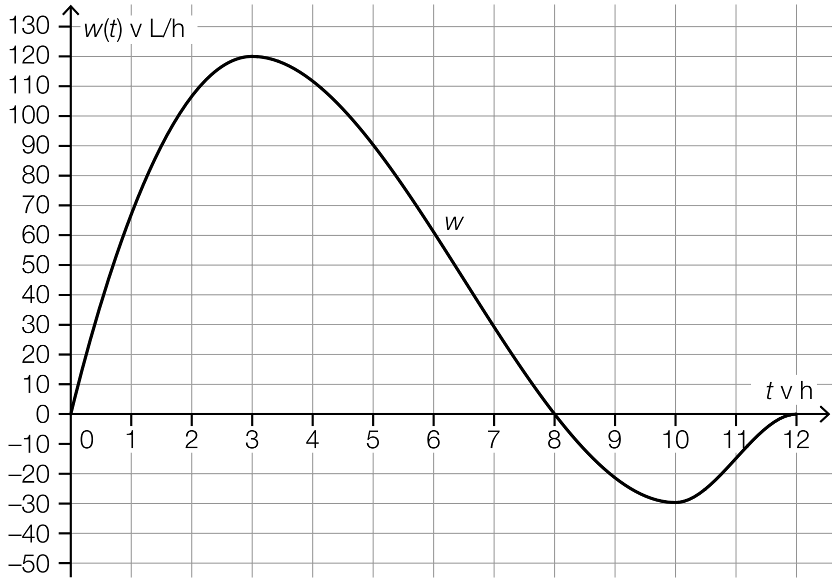
$$h'(t) = \frac{15}{\sqrt{2738 \cdot \pi \cdot t}} \quad \text{pri} \quad t > 0$$

2) Določite za koliko metrov se dvigne površina vode v zadnjih 10 h polnjenja. *[0/1 t.]*

c) Zaradi dežja in izparevanja se količina vode v ribniku spreminja.

Funkcija $w$: $[0;12] \to \mathbb{R}$ približno opisuje trenutno hitrost spreminjanja količine vode v ribniku v odvisnosti od časa $t$ ($t$ v h, $w(t)$ v L/h).

Na naslednji sliki je predstavljen graf funkcije $w$.




1) Štirim izjavam priredite vsakič ustrezni največji možni časovni interval izmed A do F.

*[0/½/1 t.]*

| | |
|---|---|
| Količina vode v ribniku se zmanjšuje. | |
| Količina vode v ribniku vedno hitreje narašča. | |
| Trenutna hitrost spreminjanja količine vode v ribniku se zmanjšuje. | |
| Količina vode v ribniku narašča. | |

| | |
|---|---|
| A | (0; 3) |
| B | (3; 10) |
| C | (8; 12) |
| D | (3; 12) |
| E | (8; 10) |
| F | (0; 8) |