Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

januar 2018

Matematika

Kompenzacijski izpit 1

Podatki za **izpraševalce / izpraševalke**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence *(Grundkompetenzen)*, pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju *(Kommunikationsfähigkeit)*.

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko *(Grundkompetenzpunkt)*, z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko *(Leitfragenpunkt)*. Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Premice

Dane so parametrična predstavitev premice g ter enačbe treh nadaljnjih premic g_1, g_2, g_3.

g: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pri $s \in \mathbb{R}$

g_1: $3 \cdot x + y = 9$

g_2: $y = -3 \cdot x + 10$

g_3: $x - 3 \cdot y = -7$

Zastavitev naloge:

Navedite, katere izmed premic g_1, g_2, g_3 oklepajo s premico g pravi kot in utemeljite svoj odgovor.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite, katere od štirih danih premic so identične in utemeljite svoj odgovor.

Navedite, kako je treba izbrati vrednosti a_1 in b_2 (pri $a_1, b_2 \in \mathbb{R}$) premice h: $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ pri $t \in \mathbb{R}$, da bosta imeli premici g in h natanko eno presečišče.
Utemeljite svojo odločitev.

Rešitev naloge 1

Premice

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Premici g_1 in g_2 oklepata z g pravi kot.

Možna utemeljitev:
Smerni vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ premice g je hkrati normalni vektor premic g_1 in g_2.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je navedeno, da izključno g_1 in g_2 oklepata pravi kot s premico g, in je to tudi (smiselno) pravilno utemeljeno.

Utemeljitve na podlagi ustreznih skalarnih produktov oz. na osnovi skic, so prav tako dopustne.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Premici g in g_3 sta identični.

Možna utemeljitev:
Obe premici imata smerni vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in točka $P = (2|3)$ leži na obeh premicah.

Da bi imeli g in h natanko eno presečišče, morata imeti različna naklona, t. j. veljati mora $b_2 \neq \frac{1}{3}$.
Ker a_1 določa le pozicijo presečišča, ne pa njegove eksistence, je lahko za a_1 izbrano vsako realno število.

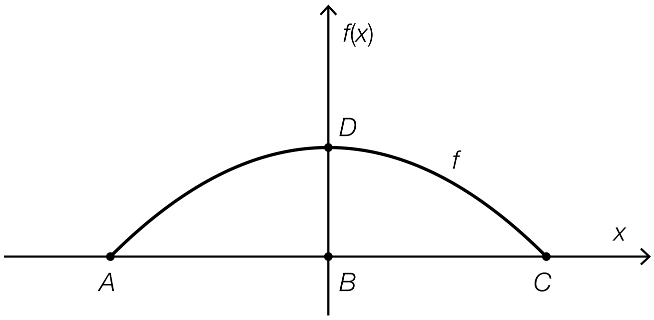
Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je navedeno, da sta g_3 in g identični in je to pravilno utemeljeno.
Nadalje je potrebno pravilno navesti utemeljitve vrednosti za a_1 in b_2 in utemeljiti njihovo izbiro.
Če so za a_1 in b_2 navedene konkretne pravilne vrednosti, je točko potrebno dodeliti.

Naloga 2

Mostni obok

Na naslednji sliki je predstavljen nek mostni obok. Daljica AC, s središčem B, ima dolžino 40 metrov, maksimalna višina mostnega oboka BD znaša 10 metrov.



Zastavitev naloge:

Določite enačbo tiste funkcije f pri $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), s katero je moč modelirati potek opisanega mostnega oboka in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Da bi lahko pod takim mostnim obokom peljala tudi večja vozila, se mora višina BD povečati. Pojasnite, ali moramo parametra a in b modelne funkcije f pri $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) pri tem vsakič izbrati večja, manjša ali enaka, če naj razdalja AC ostane nespremenjena.

Če je za koordinatno izhodišče izbrana točka A, je potrebno za modeliranje uporabiti funkcijo g pri $g(x) = c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ ($c, d, e \in \mathbb{R}$).

Vstavite »$<$«, »$>$« ali »$=$« tako, da bodo izjave o c, d in e pravilne za izbrano funkciji g.

c ___ 0; d ___ 0; e ___ 0

Rešitev naloge 2

Mostni obok

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možen postopek:
$D = (0|10) \;\Rightarrow\; b = 10$

Ničla funkcije f leži pri $x = 20$ (oz. -20).
$f(20) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 400 \cdot a + 10 \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{40} = -0{,}025$

$f(x) = -0{,}025 \cdot x^2 + 10$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je določena pravilna enačba funkcije in pojasnjen pravilen postopek.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Če višino BD povečamo, se parameter b poveča. Ker ostaneta ničli nespremenjeni, se mora parameter a zmanjšati.

$c < 0$; $d > 0$; $e = 0$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če sta (smiselno) pravilno pojasnjeni spremembi obeh parametrov in so vstavljeni vsakič pravilni znaki.

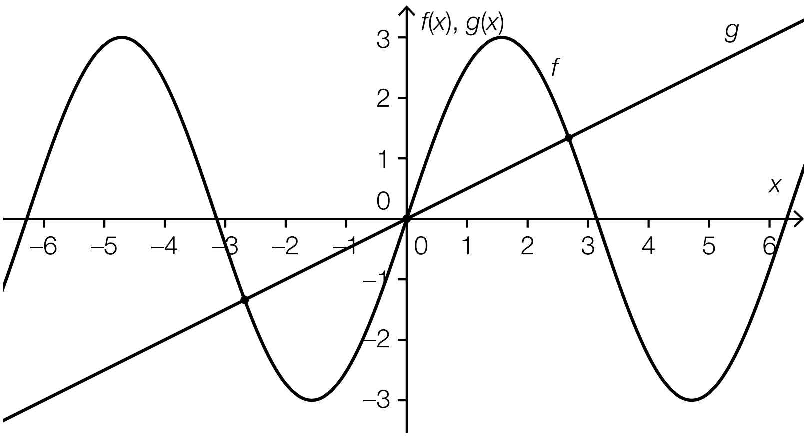
Naloga 3

Funkcije

Dani sta enačbi in grafa funkcij f in g:

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$

$g(x) = \frac{x}{2}$



Zastavitev naloge:

Izračunajte tisto mesto x_1 na intervalu $[0; \pi]$, za katero velja $f'(x_1) = g'(x_1)$ in pojasnite, kako lahko to mesto določimo grafično.

Nadaljevalno vprašanje:

Enačba $f(x) = g(x)$ ima za x tri rešitve a, 0 in c pri $a < 0 < c$.

Na gornji sliki grafično predstavite vrednost izraza $\int_0^c (f(x) - g(x))\,dx$.

Navedite vrednost izraza $\int_a^c (f(x) - g(x))\,dx$.

Rešitev naloge 3

Funkcije

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

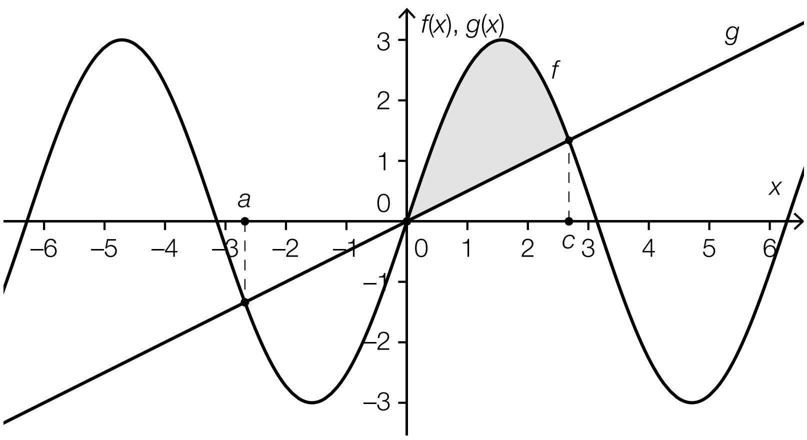
$3 \cdot \cos(x_1) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_1 \approx 1{,}4$

Vrednost x_1 opisuje tisto mesto (na intervalu $[0; \pi]$) na katerem se smerni koeficient premice ujema s smernim koeficientom tangente na graf funkcije f. Če premico g vzporedno premaknemo tako, da se na intervalu $[0; \pi]$ dotika grafa funkcije f, dobimo to vrednost kot x-koordinato dotikališča.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je x_1 pravilno izračunan in (smiselno) pravilno pojasnjen postopek za njegovo grafično določitev.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:



Vrednost izraza $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ je nič.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je predstavljena iskana ploskev in pravilno navedena vrednost integrala $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Naloga 4

Reakcijski časi

Neka testna oseba določa svoje reakcijske čase (v s) s pomočjo online-testa, ki ga izvede deset krat in pri tem dobi naslednje vrednosti:

0,38 s; 0,27 s; 0,30 s; 0,34 s; 0,25 s; 0,39 s; 0,28 s; 0,24 s; 0,33 s; 0,32 s

Zastavitev naloge:

Za deset navedenih časov določite aritmetično sredino $\bar{t}$ in standardni odklon s.

Navedite, koliko odstotkov navedenih reakcijskih časov se nahaja v intervalu $[\bar{t} - s; \bar{t} + s]$.

Nadaljevalno vprašanje:

Testna oseba izvede ta test še nadaljnjih dvakrat in pri tem doseže časa t_{11} in t_{12} pri $t_{11} \neq t_{12}$. Aritmetično sredino, ki jo oblikujemo sedaj iz vseh dvanajstih časov, označimo s $\bar{t}_{\text{nova}}$ in iz tega izhajajoči standardni odklon označimo z s_{novi}.

Navedite, katere pogoje morata izpolnjevati časa t_{11} in t_{12}, da bo veljalo $\bar{t}_{\text{nova}} = \bar{t}$ in $s_{\text{novi}} < s$.

Rešitev naloge 4

Reakcijski časi

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$\bar{t} = 0{,}31$
$s \approx 0{,}05$
$[\bar{t} - s; \bar{t} + s] \approx [0{,}26; 0{,}36]$

V navedenem intervalu se nahaja 6 reakcijskih časov, to je 60 %.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko so pravilno navedeni aritmetična sredina, standardni odklon in iskani odstotek.

Tolerančni intervali:
za standardni odklon: [0,048; 0,052]
za spodnjo mejo intervala: [0,258; 0,262]
za zgornjo mejo intervala: [0,358; 0,362]

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Nove vrednosti morajo ležati simetrično glede na aritmetično sredino $\bar{t}$, torej mora znašati $\frac{t_{11} + t_{12}}{2} = \bar{t}$.

Če ležijo nove vrednosti na intervalu $(\bar{t} - s; \bar{t} + s)$, potem velja $s_{\text{novi}} < s$.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko so (smiselno) pravilno navedeni iskani pogoji za časa t_{11} in t_{12}. Pri tem se kot utemeljitev za $s_{\text{novi}} < s$ upošteva tudi izjava v obliki, da morata vrednosti t_{11} in t_{12} ležati v bližini aritmetične sredine.

Naloga 5

Loterija

Pri 100 srečkah je 30 srečk z dobitkom, med temi je 25 srečk z dobitkom po 10 € in 5 srečk z dobitkom po 100 €.

Zastavitev naloge:

Izmed teh 100 srečk naključno izberemo tri srečke. Določite verjetnost, da s temi tremi srečkami ne dobimo dobitka in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Nekdo dobi podarjeno eno srečko, naključno izbrano izmed teh 100 srečk.
Navedite pričakovano vrednost zadetka.

Neka druga oseba dobi podarjeni dve srečki, naključno izbrani izmed teh 100 srečk.
Navedite izraz za izračun verjetnosti, da bo ta oseba zadela 110 € in pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 5

Loterija

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Ne dobiti dobitka pomeni, da izmed preostalih 70 srečk izberemo tri srečke brez vračanja.

$\frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{68}{98} \approx 0{,}3385 = 33{,}85\ \%$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je pravilno navedena verjetnost in pojasnjen pravilen postopek.
Tolerančni interval za verjetnost: [33 %; 34 %]

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$\frac{25}{100} \cdot 10 + \frac{5}{100} \cdot 100 = 7{,}5$

Pričakovana vrednost za dobitek znaša 7,50 €.

Dobitek 110 € pomeni, da pri dveh srečkah dobimo en dobitek za 10 € in en dobitek za 100 €.

Možen izraz za izračun verjetnosti: $2 \cdot \frac{25 \cdot 5}{100 \cdot 99}$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko sta pričakovana vrednost dobitka in iskani izraz pravilno navedena in pojasnjen pravilen postopek.
Ekvivalentne izraze je vrednotiti kot pravilne.