Modellschularbeit

Mathematik

Dezember 2014

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Stammfunktionen und bestimmtes Integral

a) Lösungserwartung:

$f(x) = x^2 - x + 5$

$F_1(x) = \int (x^2 - x + 5)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + c$

$F_1(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 15 + c = 5 \;\Rightarrow\; c = -\frac{29}{2} = -14{,}5$

$F_1(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{29}{2}$

$F_2(x) - F_3(x) = d$ mit $d \in \mathbb{R}$

Die Graphen der beiden Funktionen F_2 und F_3 können durch eine Verschiebung entlang der y-Achse zur Deckung gebracht werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Bestimmung der Funktionsgleichung.
- Ein Punkt wird ausschließlich dann vergeben, wenn sowohl der Zusammenhang zwischen den beiden Funktionsgleichungen korrekt angeführt wurde als auch der Verlauf der Graphen richtig interpretiert wurde.
  Auch äquivalente Formulierungen sind als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$A = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

oder:

$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$

oder:

$A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \right|$

Die Beträge der Inhalte der beiden Flächenstücke, die von den beiden Funktionen f und g in den Intervallen $[a; b]$ und $[b; c]$ eingeschlossen werden, sind gleich groß.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das Aufstellen der Formel für den Flächeninhalt.
- Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Interpretation über den Verlauf der beiden Funktionsgraphen.
  Auch eine formale Interpretation wie z. B. $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = -\int_b^c h(x)\mathrm{d}x$ ist als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

In den beiden Stunden sind 106 Liter in die Regentonne geflossen.

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} \quad \text{oder} \quad \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation der zugeflossenen Regenwassermenge.
- Ein Punkt für das Aufstellen eines korrekten Terms.

Aufgabe 2

Blutalkoholkonzentration

a) Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

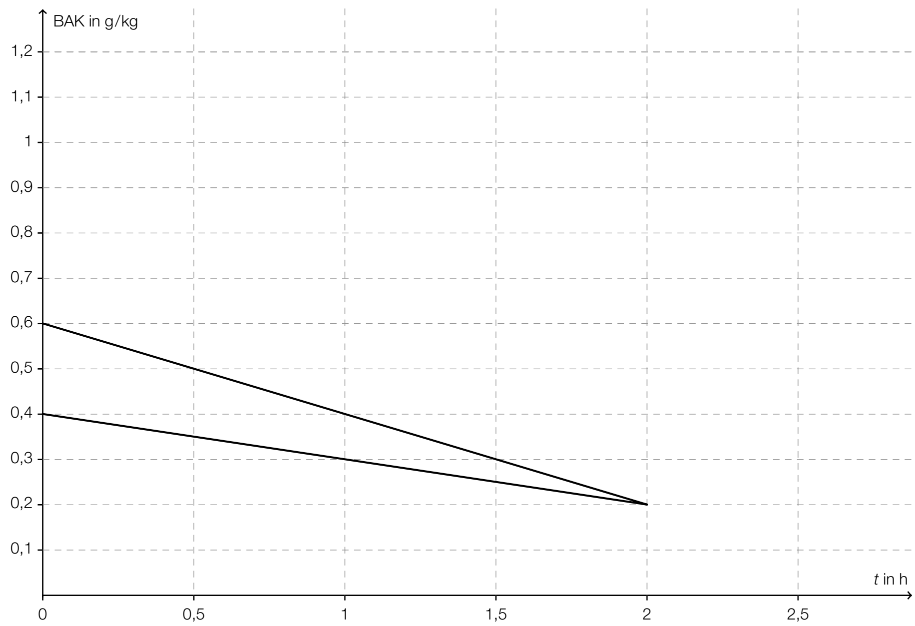
$c = \frac{500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}8}{70 \cdot 0{,}68} \approx 0{,}42 \quad \Rightarrow \quad c \approx 0{,}42$ g/kg

Da der geschlechtsspezifische Faktor r im Nenner steht, ist die zu erwartende BAK umso größer, je kleiner dieser Faktor ist, d. h., bei Frauen ist die BAK bei gleicher Trinkmenge und gleichem Körpergewicht höher.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Berechnung der BAK, wobei der Wert für r aus dem Intervall [0,68; 0,70] stammen muss. Ergebnisse im Intervall [0,40; 0,421] sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Begründung, warum die BAK bei Frauen höher ist. Auch die Begründung „Die BAK ist indirekt proportional zum Faktor r“ ist zulässig.

b) Lösungserwartung:



$c(t) = a \cdot 2 + 0{,}1 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Darstellung der beiden BAK-Verläufe, wobei eine Abweichung von ± 0,02 Promille an den Stellen $t = 0$ und $t = 2$ toleriert wird. Es müssen beide Geradenabschnitte wie dargestellt eingezeichnet sein. (Die Geraden dürfen auch für $t > 2$ eingezeichnet sein.)
- Ein Punkt für die Angabe des richtigen Funktionsterms. Anmerkung: Auch eine Bezeichnung mit c oder BAK oder Ähnlichem ist zulässig. Jede äquivalente Schreibweise des Terms ist auch als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Bei einer exponentiellen Zunahme steigen die Funktionswerte um denselben Faktor, wenn die Argumente um denselben Wert zunehmen.

Mögliche Überprüfung:

$\sqrt[3]{\frac{3,2}{1,8}} \approx 1,21 \qquad \sqrt[4]{\frac{7,1}{3,2}} \approx 1,22$

Ja, die Bedingung ist erfüllt: Pro Zehntelpromille nimmt das Unfallrisiko ungefähr um den Faktor 1,2 zu.

oder:

$\frac{3,2}{1,8} = a^{0,3} \Rightarrow a \approx 6,8 \qquad \frac{7,1}{3,2} = a^{0,4} \Rightarrow a \approx 7,3$

Ja, die Bedingung ist erfüllt: Pro zusätzlichem g/L wird das Unfallrisiko ungefähr 7-mal so groß.

Unterschiedliche Differenzen werden auf der ersten Achse mit demselben Abstand dargestellt. Der Anstieg des Unfallrisikos bei einer Änderung der BAK von 1,2 Promille auf 2,1 Promille erscheint dadurch noch stärker, als er tatsächlich ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte rechnerische Überprüfung, dass die Gesetzmäßigkeit $f(x + h) = k^h \cdot f(x)$ erfüllt ist. Auch andere Berechnungen, die eine exponentielle Zunahme zeigen, sind zulässig.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum bei der Grafik ein verstärkter Eindruck entsteht.

Aufgabe 3

Binomialverteilung

a) Lösungserwartung:

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}5^{10} + 10 \cdot 0{,}5^{10} + 45 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}0547 = 5{,}47\ \%$

$\binom{10}{3} = 120$

Es gibt 120 verschiedene Möglichkeiten, 3-mal „Kopf" und 7-mal „Zahl" beim 10-maligen Münzwurf anzuordnen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: [0,054; 0,055] bzw. [5,4 %; 5,5 %].
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation von $\binom{10}{3}$.

b) Lösungserwartung:

$E(X) = -6 \cdot 0{,}5^3 + 1 \cdot 3 \cdot 0{,}5^3 + 3 \cdot 0{,}5^3 = 0$

Der Erwartungswert beträgt 0, daher kann von einem „fairen Spiel" gesprochen werden. Der Spieler hat bei oftmaliger Wiederholung des Spiels weder einen Gewinn noch einen Verlust zu erwarten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Erwartungswertes. Ist der Ansatz für den Erwartungswert richtig angegeben und tritt im Verlauf der Rechnung ein Rechenfehler auf, so ist der Punkt ebenfalls zu vergeben.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Ist der Ansatz für den Erwartungswert richtig angegeben und tritt im Verlauf der Rechnung ein Rechenfehler auf, so ist der Punkt für die Interpretation zu vergeben, wenn das falsche Teilergebnis korrekt interpretiert wurde.

c) Lösungserwartung:

$V(p) = n \cdot p \cdot (1 - p) = n \cdot p - n \cdot p^2$
$V'(p) = n - 2 \cdot n \cdot p$
$V''(p) = -2 \cdot n$
$V'(p) = 0 \rightarrow p = 0{,}5$
$V''(0{,}5) < 0 \rightarrow \text{Maximum}$

$V = n \cdot p \cdot (1 - p)$
$n \cdot 0{,}5^2 \geq 9 \rightarrow n \geq 36$

Es sind mindestens 36 Teilversuche nötig.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung. Der Nachweis für das Vorliegen eines Maximums ist nicht unbedingt erforderlich. Auch andere Berechnungen und Begründungen – beispielsweise mithilfe des Scheitelpunkts des Graphen einer quadratischen Funktion – sind zu akzeptieren.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe der Mindestanzahl der Teilversuche. Sollte der Wert p im ersten Teil der Aufgabe falsch berechnet worden sein, in weiterer Folge aber mit dem falschen Wert richtig weitergerechnet worden sein, so ist dieser Punkt auch zu vergeben.