Name:	
Klasse:	

Modellschularbeit

Mathematik

Dezember 2014

Teil-2-Aufgaben

Bundes institut bifie

Aufgabe 1

Stammfunktionen und bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ einer Funktion f kann in einer Vielzahl von Kontexten für Berechnungen genutzt werden. Diese Berechnungen gestalten sich besonders einfach, wenn die Funktionsgleichung einer Stammfunktion F der Funktion f bekannt ist.

Aufgabenstellung:

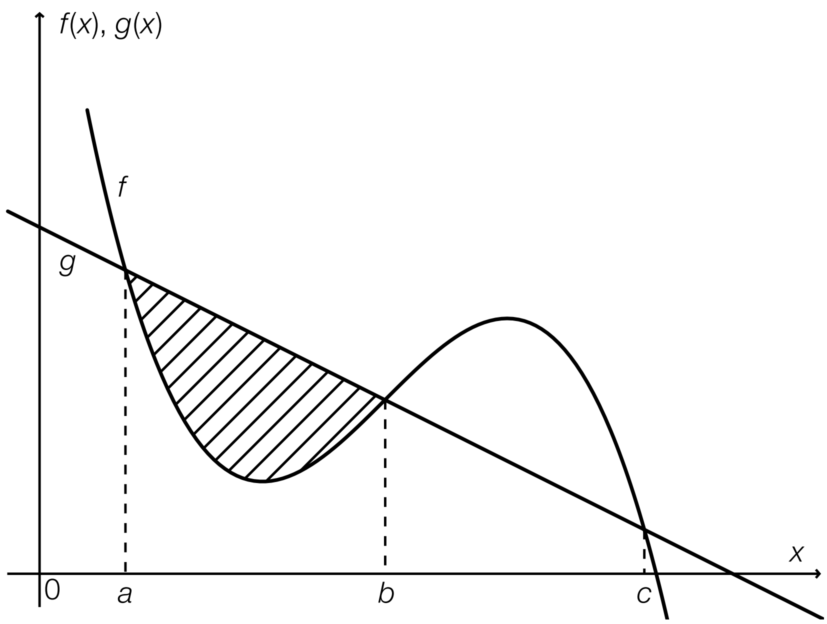
a) Gegeben ist eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2 - x + 5$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung derjenigen Stammfunktion F_1 dieser Funktion f, deren Graph durch den Punkt $P = (3|5)$ verläuft!

Die Funktionen F_2 und F_3 sind zwei weitere unterscheidbare Stammfunktionen der Funktion f.

Notieren Sie den Zusammenhang zwischen den Funktionsgleichungen der Funktionen F_2 und F_3 in Form einer Gleichung und beschreiben Sie in Worten, wie dieser Zusammenhang am Verlauf der Graphen der beiden Funktionen F_2 und F_3 erkennbar ist!

b) Die Funktion f ist eine Polynomfunktion dritten Grades mit der Wendestelle $x_W = b$, die Funktion g ist eine lineare Funktion. Die Graphen der beiden Funktionen f und g schneiden einander an den Stellen $x_1 = a$, $x_2 = b$ und $x_3 = c$. In der nachstehenden Abbildung ist ein von den Funktionen f und g begrenztes Flächenstück schraffiert dargestellt.

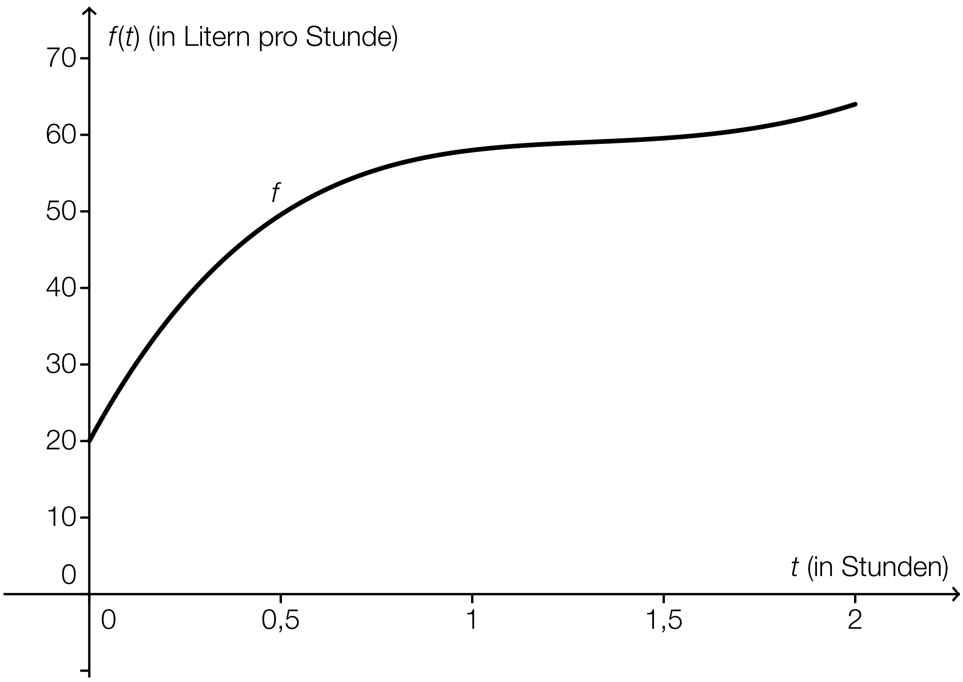
$\boxed{\text{A}}$ Geben Sie eine Formel für die Berechnung des Inhalts A dieses Flächenstücks an!



Für die Polynomfunktion h gilt: $h(x) = f(x) - g(x)$.

Interpretieren Sie die Aussage der Gleichung $\int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x = 0$ im Hinblick auf den Verlauf der Graphen der beiden Funktionen f und g!

c) Der Zufluss $f(t)$ an Regenwasser in eine Regentonne zum Zeitpunkt t kann näherungsweise mithilfe einer Polynomfunktion f beschrieben werden (t in Stunden, $f(t)$ in Litern pro Stunde). In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion f im Intervall [0; 2] dargestellt.



Das bestimmte Integral $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ hat annähernd den Wert 106. Interpretieren Sie diesen Wert im Hinblick auf den Kontext!

Geben Sie einen Term an, mit dem Sie die mittlere Änderungsrate der Wassermenge in Litern pro Stunde in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ mit $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2$ berechnen können!

Aufgabe 2

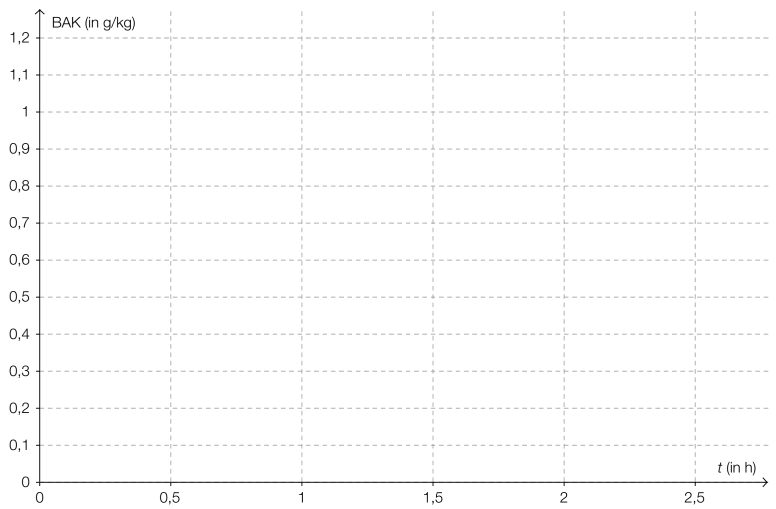
Blutalkoholkonzentration

Die Blutalkoholkonzentration (BAK) ist ein Maß für die Menge an Alkohol (Ethanol) im Blut und wird in Promille (g Ethanol pro kg Blutserum) angegeben.
Neben der Messung der BAK im Blutserum kann die BAK mithilfe von Formeln auch näherungsweise berechnet werden.
Vom schwedischen Chemiker Erik Widmark stammt die nach ihm benannte Formel $c = \frac{m}{M \cdot r}$, wobei c die BAK in Promille, m die Masse des aufgenommenen Alkohols in g, M die Masse der Person in kg und r ein Reduktions- bzw. Verteilungsfaktor ist.
Bei Männern liegt der Wert von r im Bereich von 0,68 bis 0,70, bei Frauen und Jugendlichen im Bereich von 0,55 bis 0,60.
Um die BAK aus der Atemalkoholkonzentration (AAK) ermitteln zu können, muss die AAK verdoppelt werden. (Eine AAK von 0,25 mg/L (mg Ethanol pro Liter Ausatemluft) entspricht einer BAK von 0,5 Promille.)
Ethanol wird in der Leber abgebaut. Pro Stunde werden bei Erwachsenen 0,1 bis 0,2 g/kg Ethanol abgebaut, wobei die individuelle Abbaugeschwindigkeit konstant ist.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie mithilfe der Widmark-Formel die unmittelbar nach dem Alkoholkonsum zu erwartende BAK eines 70 kg schweren Mannes, der innerhalb kurzer Zeit 0,5 Liter Bier getrunken hat! Der Volumenanteil von Ethanol in Bier beträgt ungefähr 5 % und die Dichte von Ethanol beträgt 0,8 g/cm³.
Ist die BAK bei gleicher Masse der Person und gleicher Menge an konsumiertem Alkohol bei Frauen größer oder kleiner als bei Männern? Begründen Sie Ihre Antwort!

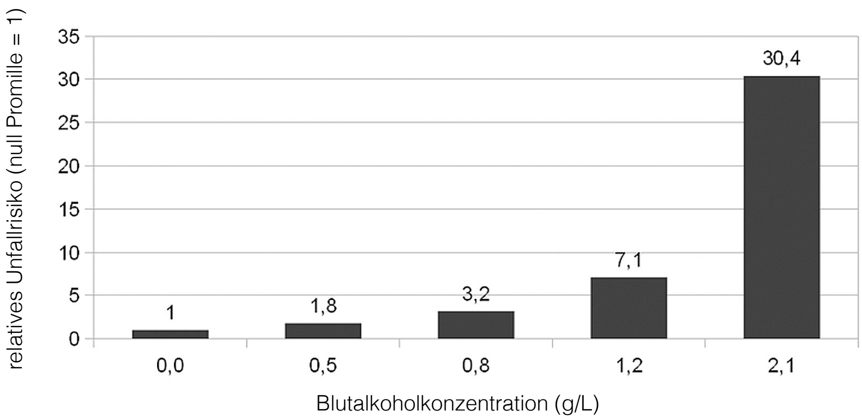
b) Eine Person war in einen Verkehrsunfall verwickelt. Das Vortestgerät zeigt eine Alkoholisierung an. Zwei Stunden nach dem Unfall wird dem Unfalllenker Blut abgenommen. Die Blutanalyse ergibt eine BAK von 0,2 g/kg.
$\boxed{\text{A}}$ Stellen Sie im gegebenen Koordinatensystem zwei mögliche zeitliche Verläufe der BAK vom Zeitpunkt des Unfalls (t = 0) bis zum Zeitpunkt der Blutabnahme dar! Verwenden Sie zur Ermittlung der beiden Graphen die in der Einleitung angeführten minimalen bzw. maximalen Werte für die Abbaugeschwindigkeit!



Eine AAK-Messung hat einen Wert von *a* mg/L ergeben.
Erstellen Sie eine Formel, mit der eine näherungsweise Berechnung der BAK *t* Stunden vor der AAK-Messung möglich ist! Wählen Sie dabei die Abbaugeschwindigkeit so, dass die Formel beim Einsetzen von *a* jene BAK liefert, die mindestens vorgelegen sein muss.

c) In deutschen Labors wird meistens der Ethanolgehalt in Gramm pro Liter (g/L) angegeben. In Wikipedia lautet der Kommentar zu nachstehender Grafik „Exponentielle Zunahme des Unfallrisikos mit steigender Blutalkoholkonzentration".

Relatives Unfallrisiko bei verschiedenen BAK



Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Blutalkoholkonzentration#Berechnung_des_Blutalkoholgehalts_zur_Tatzeit_auf_Grund_der_Trinkmengen

Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Gesetzmäßigkeit für eine exponentielle Zunahme im vorliegenden Fall näherungsweise erfüllt ist! Verwenden Sie dazu die Werte für eine BAK von 0,5, 0,8 und 1,2 g/L!

Erklären Sie, wodurch in der Grafik der Eindruck von der Zunahme des Unfallrisikos manipulativ verstärkt wurde!

Aufgabe 3

Binomialverteilung

Die nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon de Laplace benannten Laplace-Experimente beruhen auf der Annahme, dass bei einem derartigen Zufallsexperiment nur endlich viele Ausgänge möglich sind, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

Spricht man im Falle eines Münzwurfs von einer fairen, idealen oder Laplace-Münze, so nimmt man an, dass bei einem Wurf die beiden Seiten der Münze – „Kopf" bzw. „Zahl" – jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 auftreten.

Eine ideale Münze (Laplace-Münze) wird n-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen „Kopf" erscheint.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei zehn Würfen höchstens zwei Mal „Kopf" erscheint!

Berechnen und interpretieren Sie den Wert des Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k}$ in der Formel $W(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ für $n = 10$ und $k = 3$ im Zusammenhang mit dem Münzwurf!

b) Bei einem Spiel wird eine ideale Münze drei Mal geworfen. Je nachdem, wie oft bei diesem Spiel „Kopf" auftritt, gewinnt oder verliert man einen bestimmten Geldbetrag. Die bei diesem Spiel zu erzielenden Gewinne bzw. Verluste sind in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Es erscheint kein Mal „Kopf":	Der Spieler hat einen Verlust von € 6.
Es erscheint ein Mal „Kopf":	Der Spieler hat weder einen Gewinn noch einen Verlust.
Es erscheint zwei Mal „Kopf":	Der Spieler hat einen Gewinn von € 1.
Es erscheint drei Mal „Kopf":	Der Spieler hat einen Gewinn von € 3.

$\boxed{\text{A}}$ Ermitteln Sie den Erwartungswert für den Gewinn bzw. Verlust im vorgegebenen Spiel! Interpretieren Sie diesen Wert im Zusammenhang mit dem vorliegenden Spiel!

c) Eine Zufallsvariable ist binomialverteilt mit den Parametern n und p. Dabei beschreibt n die Anzahl der Versuche und p gibt die Erfolgswahrscheinlichkeit an.

Bei vorgegebenem n hängt die Varianz ausschließlich von p ab, es kann daher eine Funktion V mit der Gleichung $V(p) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ definiert werden. Dabei gilt: $0 \leq p \leq 1$ und $n \neq 0$.

Ermitteln Sie jenen Wert für die Erfolgswahrscheinlichkeit p, für den die Varianz $V(p)$ den maximalen Wert annimmt!

Geben Sie für den ermittelten Wert von p die Mindestanzahl der Teilversuche an, für die die Varianz mindestens den Wert 9 annimmt!