Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

10. maj 2017

Uporabna matematika

del A + del B (sveženj 8)

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred vami, vsebuje 5 nalog v delu A in 3 naloge v delu B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge lahko obdelujete neodvisno drugo od druge. Na voljo imate skupno 270 minut čistega delovnega časa za del A in del B.

Pri reševanju uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte izključno zvezek z nalogami in liste za odgovore, ki so vam dani na razpolago. Na prvi strani zvezka z nalogami vpišite svoje ime v za to predvideno polje in na vsak list z odgovori Vašo kodo učenca. Pri odgovarjanju vsake delne naloge navedite oznako le-te (npr. 3c).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Uporaba s strani *»Schulbuchaktion«* potrjenega zvezka formul in elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije) je dovoljena, v kolikor ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, itraneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in v elektronski pripomoček niso implementirani lastni podatki. Priročniki za uporabo elektronskih pripomočkov so dopustni v originalni tiskani obliki ali v elektronski pripomoček integrirani obliki.

Oddati je potrebno zvezek z nalogami in vse liste z odgovori, ki jih boste uporabljali.

Smernice za reševanje *SRDP* iz uporabne matematike

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljene funkcije tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno poudariti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati (skalirati) ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z Vašo kodo učenca.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Za vrednotenje velja naslednji ključ:

45–50 točk	»Sehr gut« / prav dobro
39–44 točk	»Gut« / dobro
33–38 točk	»Befriedigend« / povoljno / zadovoljivo
23–32 točk	»Genügend« / zadostno
0–22 točk	»Nicht genügend« / nezadostno

Razlaga formatov odgovorov

Delne naloge lahko vsebujejo naslednje formate odgovorov: *odprti format odgovora, polodprti format odgovora, konstrukcijski format, prireditveni format* in *multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«.*

Odprti format odgovora: pri odprtem formatu odgovora lahko poteka reševanje na različen način, npr. z izračunom ali na grafični način (z izdelavo grafikona).

Polodprti format odgovora: pri polodprtem formatu odgovora je potrebno pravilen odgovor vstaviti v vnaprej podano formulo, funkcijo itd.

Primer:

Dan je pravokotnik s stranicama a in b.

– Nastavite formulo za izračun ploščine A tega pravokotnika.

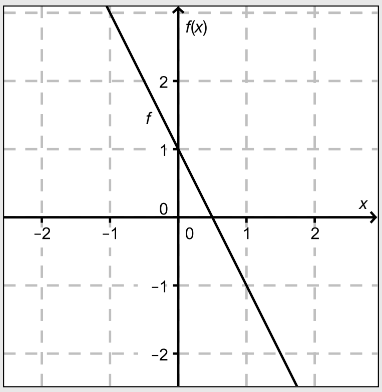
$A = a \cdot b$

Konstrukcijski format: Dan je diagram, grafikon ali slika. Zastavitev naloge zahteva dopolnitev s točkami in/ali premicami in/ali krivuljami in/ali vpisovanjem vrednosti oz. označevanjem koordinatnih osi na diagramu, v grafikonu ali na sliki.

Primer:

Dana je linearna funkcija f pri $f(x) = k \cdot x + d$.

– V naslednji koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri $k = -2$ in $d > 0$.



Prireditveni format: Za ta format je značilno, da je podanih več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerih stoji več možnosti odgovorov. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da z vstavljanjem **ustreznih črk** dotičnim izjavam priredite pravilne možnosti odgovorov.

Primer:

– Dvem enačbam priredite vsakič ustrezno oznako (izmed A do D).

1 + 1 = 2	A
2 · 2 = 4	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«: Za ta format je značilna ena zastavitev vprašanja in 5 možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno možnost odgovora**. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost odgovora.

Primer:

– S križcem označite ustrezno enačbo.

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 5 = 8	☐
5 + 5 = 5	☐

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah za označevanje s križcem:
1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato križcem označite želeni okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tukaj je bil najprej izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

Tako izberete odgovor, ki ste ga že prebarvali:
1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Obkrožite želeni prebarvani okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Tukaj je bil najprej odgovor »2 + 2 = 4« prebarvan in nato ponovno izbran.

Veliko uspeha!

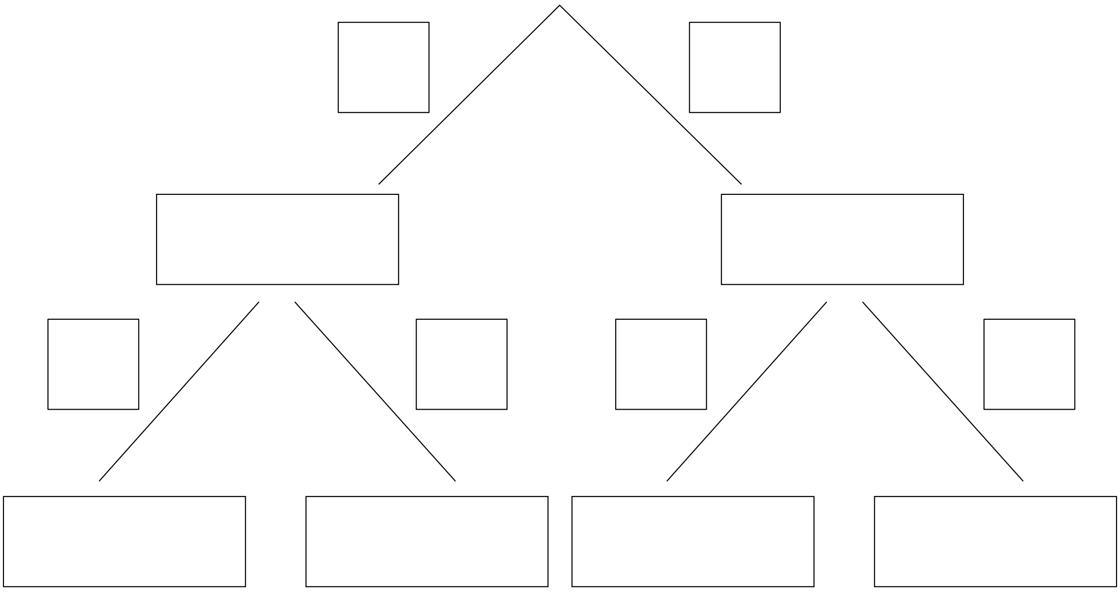
Naloga 1

Zabaviščni park

a) Pri anketi obiskovalcev v nekem zabaviščnem parku so bili zbrani naslednji podatki:

60 % obiskovalcev je iz domače države. 45 % obiskovalcev iz domače države pripotuje z osebnim avtomobilom, drugi obiskovalci iz domače države pa z javnimi prevoznimi sredstvi. 90 % obiskovalcev iz tujine pripotuje z javnimi prevoznimi sredstvi, preostali obiskovalci iz tujine pa z osebnim avtomobilom.

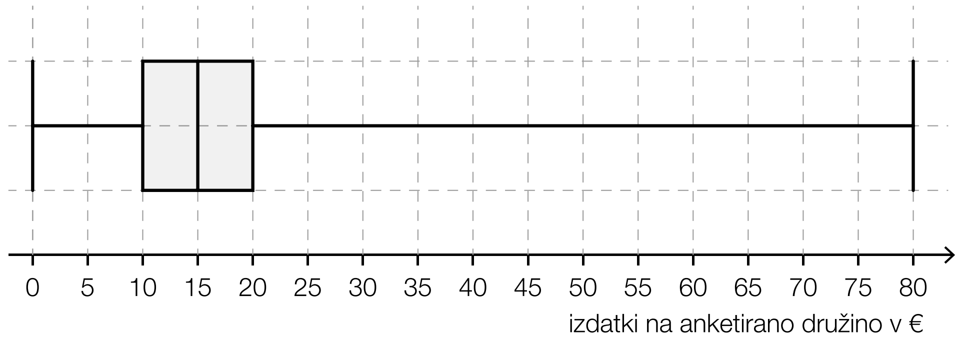
– Izpolnite naslednji drevesni diagram tako, da bo prikazoval opisano dejansko stanje. *[1 točka]*



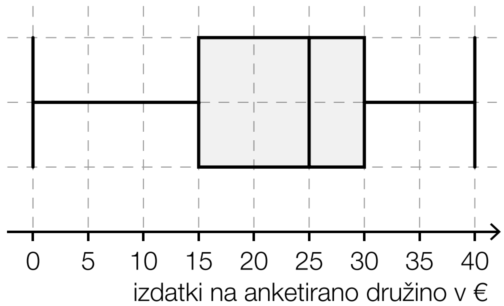
b) V nekem zabaviščnem parku so anketirali družine po njihovih izdatkih.

Naslednji škatli z brki (boxplots) predstavljata izdatke anketiranih družin za atrakcije in tiste za hrano in pijačo.

Atrakcije:



Hrana in pijača:



Andreas zatrjuje, da lahko iz obeh škatel z brki razbere naslednje: »Z gotovostjo je vsaj ena družina, ki za atrakcije ter hrano in pijačo skupaj porabi 120 evrov.«

– Utemeljite, da je Andreasova trditev napačna. *[1 točka]*

c) Iz izkušnje vemo, da vsak obiskovalec neko določeno atrakcijo v zabaviščnem parku z verjetnostjo p uporabi.

Slučajno izberemo 10 oseb.

S križcem označite tisti dogodek E, za čigar verjetnost velja: *[1 točka]*

$P(E) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1 - p)^7$ *[1 izmed 5]*

Natanko 3 od 10 oseb uporabijo to atrakcijo.	☐
Največ 7 od 10 oseb uporabi to atrakcijo.	☐
Vsaj 7 od 10 oseb uporabi to atrakcijo.	☐
Natanko 7 od 10 oseb uporabi to atrakcijo.	☐
Največ 3 od 10 oseb uporabijo to atrakcijo.	☐

Naloga 2

Nogomet v parku

Roland in Julia igrata nogomet v parku. Roland položi žogo na vodoravni travnik, vzame zalet in strelja.

Tirnico žoge lahko približno opišemo z grafom neke polinomske funkcije h 3. stopnje. Pri tem se privzema, da ima žoga obliko točke.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ pri $x \geq 0$

x … vodoravna oddaljenost žoge od izstrelišča v metrih (m)
$h(x)$ … višina žoge nad tlemi na mestu x v m

a) – Določite za to situacijo največje možno smiselno definicijsko območje funkcije h. *[1 točka]*
– Izračunajte najvišjo točko tirnice. *[1 točka]*

b) Julia ujame žogo iz višine 1,80 m.

– Določite obe vodoravni oddaljenosti od izstrelišča, na katerih se lahko Julia pri tem nahaja. *[1 točka]*

c) Roland razmišlja, če bi lahko pri tem strelu ustrelil žogo preko 2,8 m visokega plezalnega ogrodja, ki stoji v direktni smeri strela, 10 m oddaljeno od izstrelišča.

– Z dokazom preverite, če žoga pri tem strelu dejansko lahko odleti preko plezalnega ogrodja. *[1 točka]*

Naloga 3

Razgradnja zdravil

Razgradnjo zdravil v telesu lahko približno opišemo z eksponentnimi modeli.

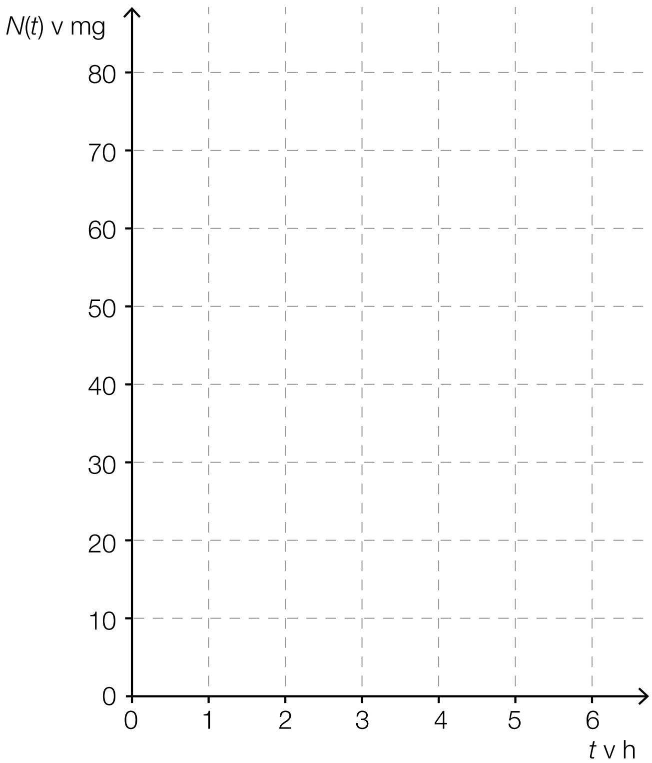
a) V naslednji preglednici je navedeno, kakšna količina $N(t)$ nekega določenega zdravila je v času t prisotna v telesu.

t v h	0	2	4
$N(t)$ v mg	100	60	36

– Pojasnite, zakaj v tabeli navedeni podatki nakazujejo na opis razgradnje zdravila z eksponentnim modelom. *[1 točka]*
– Sestavite enačbo tiste eksponentne funkcije N, ki opisuje ta razpad zdravila. *[1 točka]*
– Izračunajte tisto količino zdravila, ki je prisotna v telesu v času $t = 3$ h. *[1 točka]*

b) Neko drugo zdravilo ima v telesu razpolovni čas 1,5 h. Na začetku ($t = 0$ h) je v telesu prisotnih 80 mg zdravila.
Razgradnja zdravila v telesu je lahko približno opisana z neko eksponentno funkcijo N.

– V naslednji koordinatni sistem vrišite graf funkcije N na časovnem intervalu [0 h; 6 h]. *[1 točka]*



c) Neko zdravilo ima v telesu razpolovni čas $T_{1/2}$.

– S križcem označite ustrezno izjavo. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

Po času $3 \cdot T_{1/2}$ je prisotna $\frac{1}{6}$ izhodiščne količine.	☐
Po času $2 \cdot T_{1/2}$ je razgrajenih 75 % izhodiščne količine.	☐
Po času $2 \cdot T_{1/2}$ je prisotnih 50 % izhodiščne količine.	☐
Po času $3 \cdot T_{1/2}$ je razgrajena manj kot $\frac{1}{8}$ izhodiščne količine.	☐
Po času $5 \cdot T_{1/2}$ je prisotnih 10 % izhodiščne količine.	☐

d) Razgradnja nekega drugega zdravila je lahko v telesu približno opisana z eksponentno funkcijo N:

$N(t) = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

t ... čas, odkar je bilo zdravilo dano v h
$N(t)$ ... prisotna količina zdravila v telesu ob času t v mg

Zdravilo mora biti ponovno dano, čim je v telesu prisotno samo še 15 % izhodiščne količine.

– Izračunajte tisti časovni trenutek, ob katerem mora biti zdravilo ponovno dano. *[1 točka]*

Naloga 4

Proizvodnja surovega mleka

a) V letu 1995 je znašala proizvodnja surovega mleka krav v Avstriji skupno 2,948 milijonov ton, v letu 2013 pa je le-ta znašala 3,393 milijonov ton. Letni absolutni prirastek proizvodnje surovega mleka privzamemo kot konstanten.

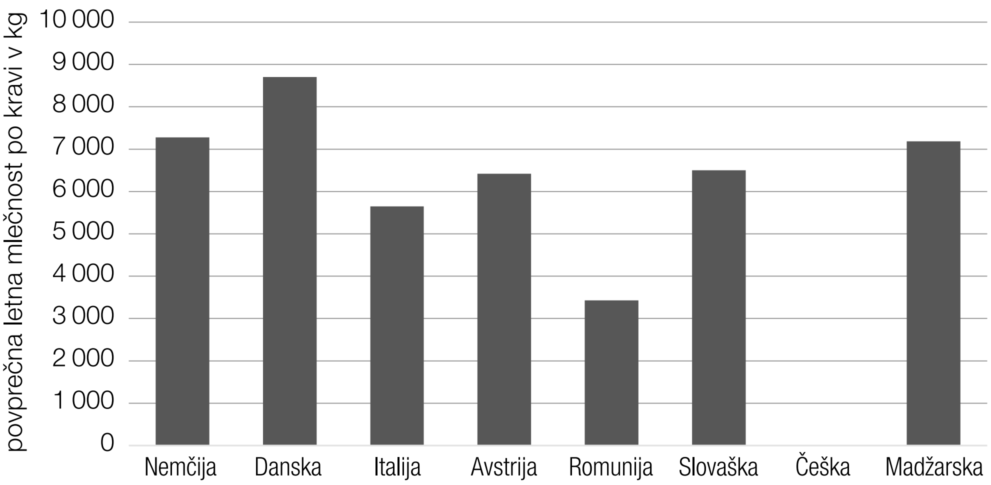
– Sestavite enačbo funkcije *f*, ki opisuje proizvodnjo surovega mleka v odvisnosti od časa *t*. Izberite $t = 0$ za leto 1995. *[1 točka]*
– S pomočjo funkcije *f* izračunajte predvideno proizvodnjo mleka v letu 2017. *[1 točka]*

b) V naslednji preglednici je navedena povprečna letna mlečnost po kravi v kilogramih (kg) za nekatere izbrane evropske države v letu 2012.

država	povprečna letna mlečnost po kravi v kg
Nemčija	7 280
Danska	8 701
Italija	5 650
Avstrija	6 418
Romunija	3 429
Slovaška	6 501
Češka	7 705
Madžarska	7 184

– Določite za koliko odstotkov je bila povprečna letna mlečnost po kravi na Danskem višja kot v Romuniji. *[1 točka]*

Ti podatki so, z izjemo povprečne letne mlečnosti po kravi na Češkem, predstavljeni v naslednjem diagramu.



– V gornjem diagramu vrišite manjkajoči stolpec za Češko. *[1 točka]*

c) V Avstriji proizvedeno surovo mleko vsebuje neposredno po molži povprečno 20000 klic na mililiter (ml). Po nekem modelu se izhaja, da se število klic vsakih 25 minut podvoji.

– Utemeljite, da spodaj navedena funkcija N ne ustreza temu modelu.

$N(t) = 20000 + 800 \cdot t$

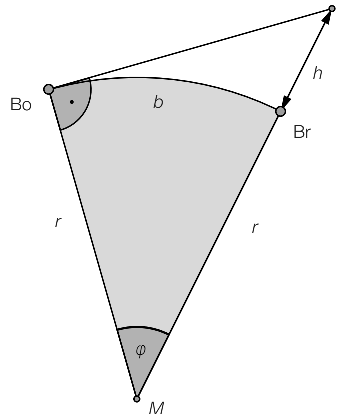
t … čas po molži v min
$N(t)$ … število klic na ml ob času t *[1 točka]*

Naloga 5

Bodensko jezero

a) Bodensko jezero meri v svojem najdaljšem razponu od Bregenza (Br) do Bodmana (Bo) 66 kilometrov (km). Zaradi ukrivljenosti Zemlje, iz Bregenza ne moremo videti jezerske obale pri Bodmanu (glej naslednjo skico, ki ni v natančnem merilu):

r … polmer Zemlje (6371 km)
b … dolžina loka, ustreza razdalji med Bregenzom in Bodmanom
M … središče Zemlje

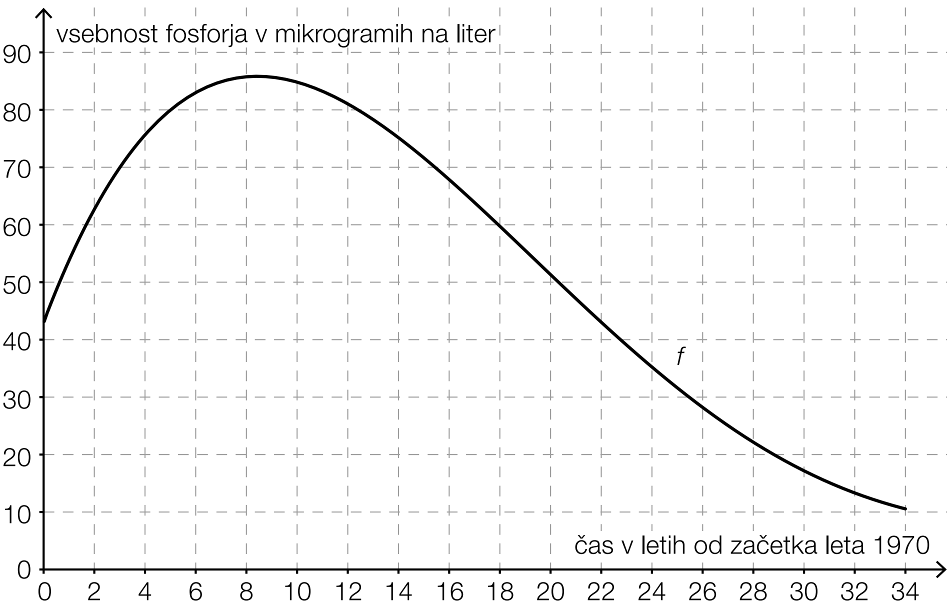


– Izračunajte kot φ. *[1 točka]*

Da bi lahko pri zelo dobri vidljivosti iz Bregenza videl na jezersko obalo pri Bodmanu, bi se moral opazovalec v Bregenzu nahajati vsaj na višini h nad gladino jezera (glej gornjo skico, ki ni v natančnem merilu).

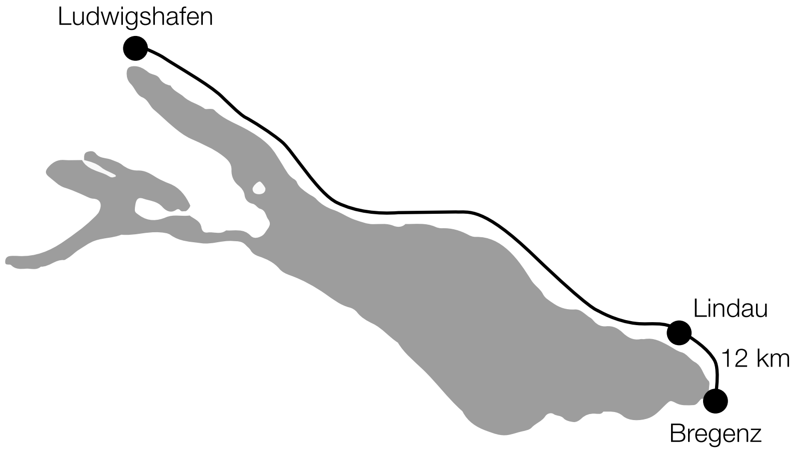
– Izračunajte višino h. *[1 točka]*

b) Vsebnost fosforja v Bodenskem jezeru lahko v časovnem obdobju od 1970 do 2004 približno opišemo s polinomsko funkcijo f.

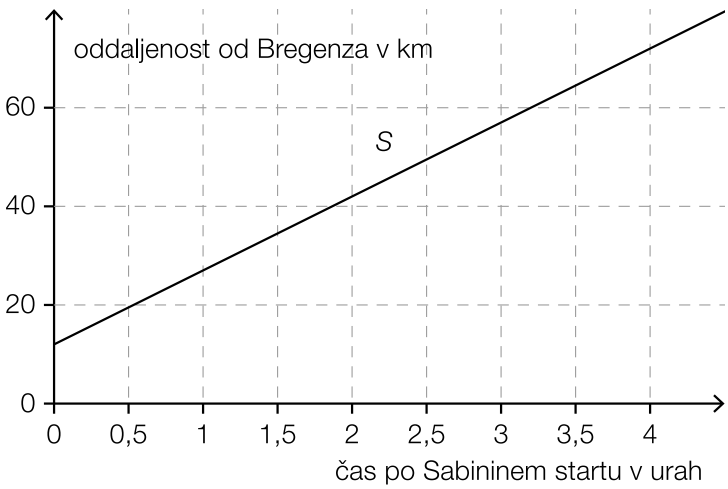


– S pomočjo zgoraj predstavljenega grafa funkcije f določite povprečno hitrost spreminjanja *(mittlere Änderungsrate)* vsebnosti fosforja na časovnem intervalu [12; 18]. *[1 točka]*
– Dokumentirajte z besedami, kako lahko s pomočjo diferencialnega računa izračunamo, kdaj je vsebnost fosforja najmočneje padla. *[1 točka]*

c) Sabina in Johana se peljeta s svojimi kolesi po kolesarski poti v smeri Ludwigshafna (glej naslednjo skico). Sabina starta v kraju Lindau, ki je od Bregenza oddaljen 12 km in pelje s konstantno hitrostjo 15 km/h. Johana starta s kolesom e-bike eno uro kasneje v Bregenzu in pelje s konstantno hitrostjo 30 km/h.



Sabinino oddaljenost od Bregenza lahko približno opišemo z linearno funkcijo *S*.



– V zgornji diagram narišite graf linearne funkcije *J*, ki predstavlja Johanino oddaljenost od Bregenza. *[1 točka]*

– Odčitajte kako dolgo je Johana na poti do takrat, ko dohiti Sabino. *[1 točka]*

Tudi Otto se pelje po tej kolesarski poti od Bregenza v smeri Ludwigshafna. Njegovo hitrost lahko opišemo z neko funkcijo *v*.

t ... čas v h
$v(t)$ ... hitrost ob času t v km/h

– Ob navedbi ustrezne enote opišite, kaj se v dani vsebinski povezavi izračuna z $\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t$. *[1 točka]*

Naloga 6 (del B)

Spam

Kot *spam* označujemo neželeno dostavljena elektronska sporočila (e-maile).

a) Iz naslednje preglednice lahko povzamemo razvoj števila po svetu dnevno poslanih spam-sporočil v milijardah.

začetek leta ...	število po svetu dnevno poslanih spam-sporočil v milijardah
2010	62
2011	42
2012	30

Število spam-sporočil lahko približno opišemo s funkcijo S:

$S(t) = 50 \cdot 0{,}6^t + 12$

t ... čas v letih od 2010, t. j. za začetek leta 2010 velja $t = 0$
$S(t)$ ... število po svetu dnevno poslanih spam-sporočil ob času t v milijardah

– Pokažite, da funkcija S pravilno opisuje število po svetu dnevno poslanih spam-sporočil za začetek leta 2012. *[1 točka]*

Funkcija S je lahko podana tudi v obliki $S(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t} + 12$.

– Izračunajte k. *[1 točka]*
– V dani vsebinski povezavi opišite rezultat izračuna $\frac{S(5) - S(3)}{S(3)} \approx -0{,}30$. *[1 točka]*

b) Po ocenah strokovnjakov je 80 % vseh elektronskih sporočil spam.
V 8 % vseh elektronskih sporočil se pojavlja beseda »konto«.
7 % vseh elektronskih sporočil vsebuje besedo »konto« in so spam.

S označuje dogodek, da je slučajno izbrano elektronsko sporočilo spam, $\overline{S}$ označuje nasprotni dogodek dogodka S.

K označuje dogodek, da slučajno izbrano elektronsko sporočilo vsebuje besedo »konto«, $\overline{K}$ označuje nasprotni dogodek dogodka K.

– Izpolnite naslednjo tabelo s štirimi polji tako, da bo predstavljala opisano dejansko situacijo. *[1 točka]*

	S	$\overline{S}$	vsota
K			
$\overline{K}$			
vsota			

– Iz tabele s štirimi polji odčitajte verjetnost, da slučajno izbrano elektronsko sporočilo ni spam in vsebuje besedo »konto«. *[1 točka]*

Verjetnost nekega dogodka E se v tej povezavi določi z naslednjim izrazom:

$$P(E) = \frac{0{,}07}{0{,}08}$$

– Opišite ta dogodek v dani vsebinski povezavi. *[1 točka]*

c) Z *delniškim spamom* se z masovnim pošiljanjem elektronskih sporočil oglašuje delnice, ki so večinoma brez vrednosti, da bi zvišali njihov tečaj. Pošiljatelj sam je lastnik delnice, ki jo po dvigu tečaja dobičkonosno proda, nakar tečaj ponovno pade.

Za neko tako oglaševano delnico so bile v 4 kvartalih nekega leta naslednje odstotne spremembe tečaja:

kvartal	1	2	3	4
sprememba tečaja	+5 %	+20 %	+25 %	−50 %

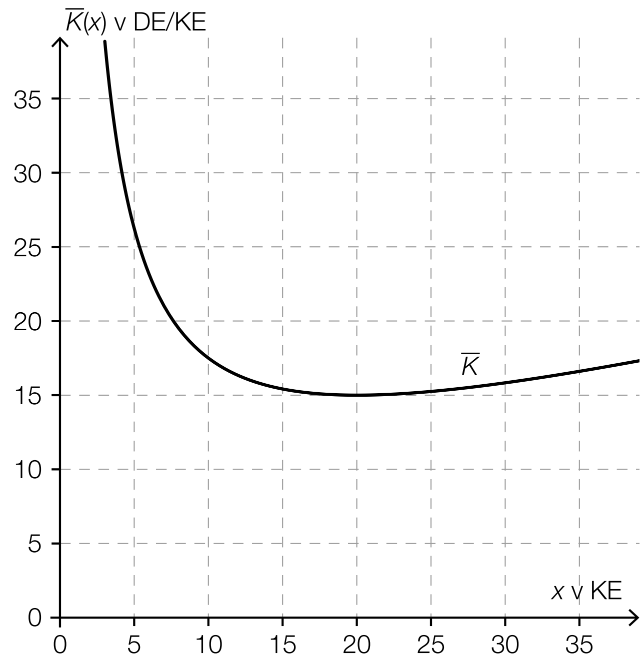
– Izračunajte povprečno odstotno spremembo tečaja na kvartal. *[1 točka]*

Naloga 7 (del B)

Proizvodnja svetilk

Neko podjetje proizvaja različne svetilke.

a) Na naslednji sliki je predstavljen graf kosovne funkcije stroškov $\overline{K}$ za luči *Credas*.



Pripadajoča funkcija mejnih stroškov K' je podana z:

$K'(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$

x ... število proizvedenih KE (količinskih enot)
$K'(x)$ ... mejni stroški pri x proizvedenih KE v DE/KE (denarnih enot na količinsko enoto)

– V gornjo sliko vrišite graf funkcije mejnih stroškov K'. *[1 točka]*
– Odčitajte optimum obratovanja. *[1 točka]*
– Sestavite enačbo pripadajoče funkcije stroškov K. *[1 točka]*
– Izračunajte fiksne stroške. *[1 točka]*

b) Za osvetlitev medicinskih naprav ima podjetje monopol s produktom *Medilux*.
Pri ceni 4 DE/KE znaša prodaja 120 KE.
Pri povišanju cene na 5 DE/KE se prodaja zniža na 100 KE.

– Sestavite enačbo linearne cenovne funkcije povpraševanja, ki opisuje to situacijo. *[1 točka]*

Pri ceni 6 DE/KE znaša točkovna elastičnost povpraševanja –1,5.

– S križcem označite ustrezno izjavo. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

Zvišanje cene za 10 % povzroči upad prodaje za 50 %.	☐
Znižanje cene za 10 % povzroči povečanje prodaje za 15 %.	☐
Znižanje cene za 1 DE/KE povzroči povečanje izkupička za 9 DE.	☐
Pri ceni 6 DE/KE je izkupiček največji.	☐
Zvišanje cene povzroči tudi povišanje izkupička.	☐

c) Stroške proizvodnje visečih luči *Ecos* lahko približno opišemo s funkcijo stroškov K:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$

x ... število proizvedenih KE (količinskih enot)
$K(x)$ ... stroški pri x proizvedenih KE v DE (količinske enote v denarnih enotah)

Viseče luči se prodajajo za fiksno ceno 9 DE/KE (denarnih enot na količinske enote).

– Sestavite enačbo pripadajoče funkcije dobička. *[1 točka]*
– Določite meje dobička. *[1 točka]*
– Določite maksimalni dobiček. *[1 točka]*

d) Za kvadratno funkcijo dobička G velja:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... število prodanih KE (količinskih enot)
$G(x)$ ... dobiček pri x prodanih KE v DE (količinske enote v denarnih enotah)

Trdi se, da leži mesto ekstrema funkcije G pri $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$.

– Pokažite, da je trditev pravilna. *[1 točka]*
– Navedite, kateri pogoj mora biti izpolnjen za koeficient a, da bo na tem mestu maksimum. *[1 točka]*

Naloga 8 (del B)

Zemljišče ob jezeru

Za nakup zemljišča ob jezeru potrebuje kupec kredit v višini 865.000 €. (Stroški in dajatve niso upoštevani.)

a) Neka kreditna ustanova poda naslednjo ponudbo:
Kreditojemalec plača ob koncu vsakega leta obrok v višini 100.000 €, pri obrestni meri 6,75 % p. a.

– Izračunajte koliko polnih obrokov mora plačati kreditojemalec. *[1 točka]*
– Izračunajte višino preostalega zneska, ki zapade v plačilo eno leto po zadnjem polnem obroku. *[1 točka]*

b) Neka druga kreditna ustanova izdela odplačilni načrt za odplačevanje kredita. Izsek tega odplačilnega načrta je predstavljen v naslednji preglednici

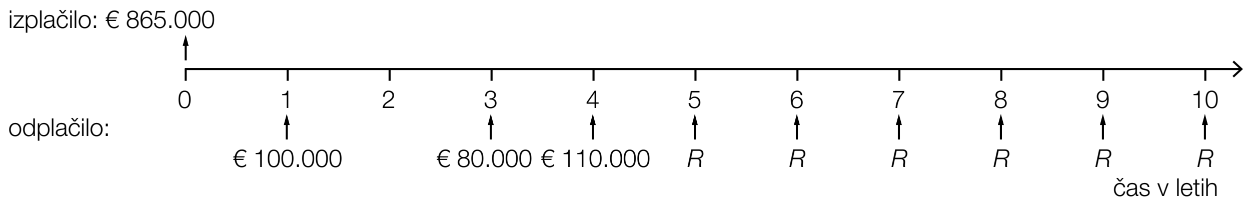
leto	delež obresti	razdolžnina *(Tilgungsanteil)*	anuiteta	preostanek dolga
0				€ 865.000
1	€ 51.467,50	€ 53.532,50		
2	€ 48.282,32	€ –48.282,32		
...				

– Določite anuiteto in preostanek dolga za leto 1. *[1 točka]*

V letu 2 se vnosa v stolpcih »delež obresti« in »razdolžnina«, razlikujeta le v predznaku.

– Opišite učinek tega na preostanek dolga v letu 2. *[1 točka]*

c) Neka nadaljnja ponudba za odplačevanje kredita v roku 10 let je lahko predstavljena s pomočjo naslednje časovne osi:



– Z besedami opišite postopek odplačevanja za ponudbo, predstavljeno na časovni osi. *[1 točka]*
– Izračunajte višino obroka *R* pri obrestni meri 6 % p. a. *[2 točki]*