Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

10. maj 2017

Uporabna matematika

del A + del B (sveženj 6)

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred vami, vsebuje 5 nalog v delu A in 3 naloge v delu B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge lahko obdelujete neodvisno drugo od druge. Na voljo imate skupno 270 minut čistega delovnega časa za del A in del B.

Pri reševanju uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte izključno zvezek z nalogami in liste za odgovore, ki so vam dani na razpolago. Na prvi strani zvezka z nalogami vpišite svoje ime v za to predvideno polje in na vsak list z odgovori Vašo kodo učenca. Pri odgovarjanju vsake delne naloge navedite oznako le-te (npr. 3c).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Uporaba s strani *»Schulbuchaktion«* potrjenega zvezka formul in elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije) je dovoljena, v kolikor ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, itraneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in v elektronski pripomoček niso implementirani lastni podatki. Priročniki za uporabo elektronskih pripomočkov so dopustni v originalni tiskani obliki ali v elektronski pripomoček integrirani obliki.

Oddati je potrebno zvezek z nalogami in vse liste z odgovori, ki jih boste uporabljali.

Smernice za reševanje *SRDP* iz uporabne matematike

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljene funkcije tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno poudariti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati (skalirati) ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z Vašo kodo učenca.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Za vrednotenje velja naslednji ključ:

45–50 točk	»Sehr gut« / prav dobro
39–44 točk	»Gut« / dobro
33–38 točk	»Befriedigend« / povoljno / zadovoljivo
23–32 točk	»Genügend« / zadostno
0–22 točk	»Nicht genügend« / nezadostno

Razlaga formatov odgovorov

Delne naloge lahko vsebujejo naslednje formate odgovorov: ***odprti format odgovora, polodprti format odgovora, konstrukcijski format, prireditveni format*** in ***multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«.***

Odprti format odgovora: pri odprtem formatu odgovora lahko poteka reševanje na različen način, npr. z izračunom ali na grafični način (z izdelavo grafikona).

Polodprti format odgovora: pri polodprtem formatu odgovora je potrebno pravilen odgovor vstaviti v vnaprej podano formulo, funkcijo itd.

Primer:

Dan je pravokotnik s stranicama a in b.

– Nastavite formulo za izračun ploščine A tega pravokotnika.

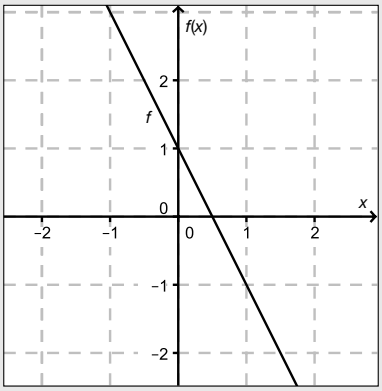
$A = a \cdot b$

Konstrukcijski format: Dan je diagram, grafikon ali slika. Zastavitev naloge zahteva dopolnitev s točkami in/ali premicami in/ali krivuljami in/ali vpisovanjem vrednosti oz. označevanjem koordinatnih osi na diagramu, v grafikonu ali na sliki.

Primer:

Dana je linearna funkcija f pri $f(x) = k \cdot x + d$.

– V naslednji koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri $k = -2$ in $d > 0$.



Prireditveni format: Za ta format je značilno, da je podanih več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerih stoji več možnosti odgovorov. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da z vstavljanjem **ustreznih črk** dotičnim izjavam priredite pravilne možnosti odgovorov.

Primer:

– Dvem enačbam priredite vsakič ustrezno oznako (izmed A do D).

1 + 1 = 2	A
2 · 2 = 4	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«: Za ta format je značilna ena zastavitev vprašanja in 5 možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno možnost odgovora**. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost odgovora.

Primer:

– S križcem označite ustrezno enačbo.

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 5 = 8	☐
5 + 5 = 5	☐

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah za označevanje s križcem:
1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato križcem označite želeni okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tukaj je bil najprej izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

Tako izberete odgovor, ki ste ga že prebarvali:
1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Obkrožite želeni prebarvani okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Tukaj je bil najprej odgovor »2 + 2 = 4« prebarvan in nato ponovno izbran.

Veliko uspeha!

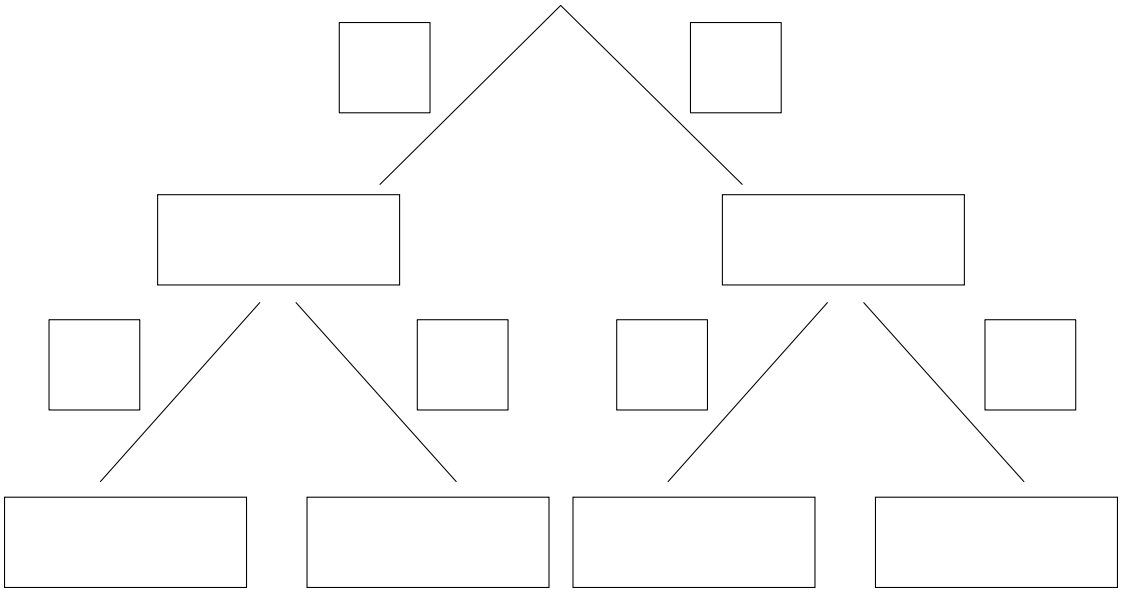
Naloga 1

Zabaviščni park

a) Pri anketi obiskovalcev v nekem zabaviščnem parku so bili zbrani naslednji podatki:

60 % obiskovalcev je iz domače države. 45 % obiskovalcev iz domače države pripotuje z osebnim avtomobilom, drugi obiskovalci iz domače države pa z javnimi prevoznimi sredstvi. 90 % obiskovalcev iz tujine pripotuje z javnimi prevoznimi sredstvi, preostali obiskovalci iz tujine pa z osebnim avtomobilom.

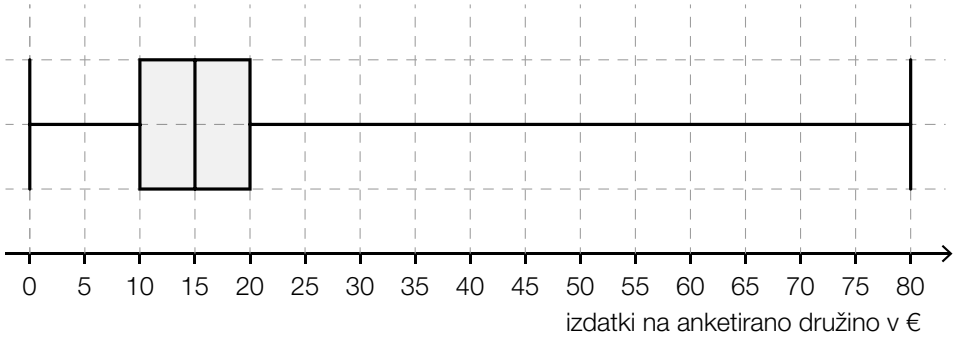
– Izpolnite naslednji drevesni diagram tako, da bo prikazoval opisano dejansko stanje. *[1 točka]*



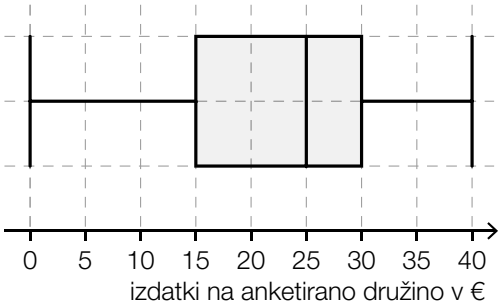
b) V nekem zabaviščnem parku so anketirali družine po njihovih izdatkih.

Naslednji škatli z brki (boxplots) predstavljata izdatke anketiranih družin za atrakcije in tiste za hrano in pijačo.

Atrakcije:



Hrana in pijača:



Andreas zatrjuje, da lahko iz obeh škatel z brki razbere naslednje: »Z gotovostjo je vsaj ena družina, ki za atrakcije ter hrano in pijačo skupaj porabi 120 evrov.«

– Utemeljite, da je Andreasova trditev napačna. *[1 točka]*

c) Iz izkušnje vemo, da vsak obiskovalec neko določeno atrakcijo v zabaviščnem parku z verjetnostjo p uporabi.

Slučajno izberemo 10 oseb.

S križcem označite tisti dogodek E, za čigar verjetnost velja: *[1 točka]*

$P(E) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1 - p)^7$ *[1 izmed 5]*

Natanko 3 od 10 oseb uporabijo to atrakcijo.	☐
Največ 7 od 10 oseb uporabi to atrakcijo.	☐
Vsaj 7 od 10 oseb uporabi to atrakcijo.	☐
Natanko 7 od 10 oseb uporabi to atrakcijo.	☐
Največ 3 od 10 oseb uporabijo to atrakcijo.	☐

Naloga 2

Nogomet v parku

Roland in Julia igrata nogomet v parku. Roland položi žogo na vodoravni travnik, vzame zalet in strelja.

Tirnico žoge lahko približno opišemo z grafom neke polinomske funkcije h 3. stopnje. Pri tem se privzema, da ima žoga obliko točke.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ pri $x \geq 0$

x … vodoravna oddaljenost žoge od izstrelišča v metrih (m)
$h(x)$ … višina žoge nad tlemi na mestu x v m

a) – Določite za to situacijo največje možno smiselno definicijsko območje funkcije h. *[1 točka]*
– Izračunajte najvišjo točko tirnice. *[1 točka]*

b) Julia ujame žogo iz višine 1,80 m.

– Določite obe vodoravni oddaljenosti od izstrelišča, na katerih se lahko Julia pri tem nahaja. *[1 točka]*

c) Roland razmišlja, če bi lahko pri tem strelu ustrelil žogo preko 2,8 m visokega plezalnega ogrodja, ki stoji v direktni smeri strela, 10 m oddaljeno od izstrelišča.

– Z dokazom preverite, če žoga pri tem strelu dejansko lahko odleti preko plezalnega ogrodja. *[1 točka]*

Naloga 3

Razgradnja zdravil

Razgradnjo zdravil v telesu lahko približno opišemo z eksponentnimi modeli.

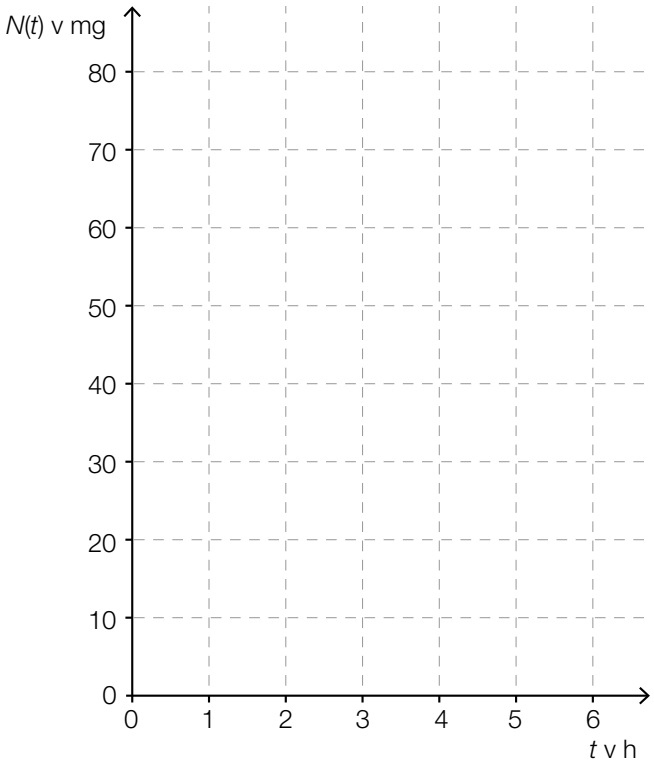
a) V naslednji preglednici je navedeno, kakšna količina $N(t)$ nekega določenega zdravila je v času t prisotna v telesu.

t v h	0	2	4
$N(t)$ v mg	100	60	36

– Pojasnite, zakaj v tabeli navedeni podatki nakazujejo na opis razgradnje zdravila z eksponentnim modelom. *[1 točka]*
– Sestavite enačbo tiste eksponentne funkcije N, ki opisuje ta razpad zdravila. *[1 točka]*
– Izračunajte tisto količino zdravila, ki je prisotna v telesu v času $t = 3$ h. *[1 točka]*

b) Neko drugo zdravilo ima v telesu razpolovni čas 1,5 h. Na začetku ($t = 0$ h) je v telesu prisotnih 80 mg zdravila.
Razgradnja zdravila v telesu je lahko približno opisana z neko eksponentno funkcijo N.

– V naslednji koordinatni sistem vrišite graf funkcije N na časovnem intervalu [0 h; 6 h]. *[1 točka]*



c) Neko zdravilo ima v telesu razpolovni čas $T_{1/2}$.

– S križcem označite ustrezno izjavo. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

Po času $3 \cdot T_{1/2}$ je prisotna $\frac{1}{6}$ izhodiščne količine.	☐
Po času $2 \cdot T_{1/2}$ je razgrajenih 75 % izhodiščne količine.	☐
Po času $2 \cdot T_{1/2}$ je prisotnih 50 % izhodiščne količine.	☐
Po času $3 \cdot T_{1/2}$ je razgrajena manj kot $\frac{1}{8}$ izhodiščne količine.	☐
Po času $5 \cdot T_{1/2}$ je prisotnih 10 % izhodiščne količine.	☐

d) Razgradnja nekega drugega zdravila je lahko v telesu približno opisana z eksponentno funkcijo N:

$N(t) = 200 \cdot e^{-0,3 \cdot t}$

t ... čas, odkar je bilo zdravilo dano v h
$N(t)$ ... prisotna količina zdravila v telesu ob času t v mg

Zdravilo mora biti ponovno dano, čim je v telesu prisotno samo še 15 % izhodiščne količine.

– Izračunajte tisti časovni trenutek, ob katerem mora biti zdravilo ponovno dano. *[1 točka]*

Naloga 4

Proizvodnja surovega mleka

a) V letu 1995 je znašala proizvodnja surovega mleka krav v Avstriji skupno 2,948 milijonov ton, v letu 2013 pa je le-ta znašala 3,393 milijonov ton. Letni absolutni prirastek proizvodnje surovega mleka privzamemo kot konstanten.

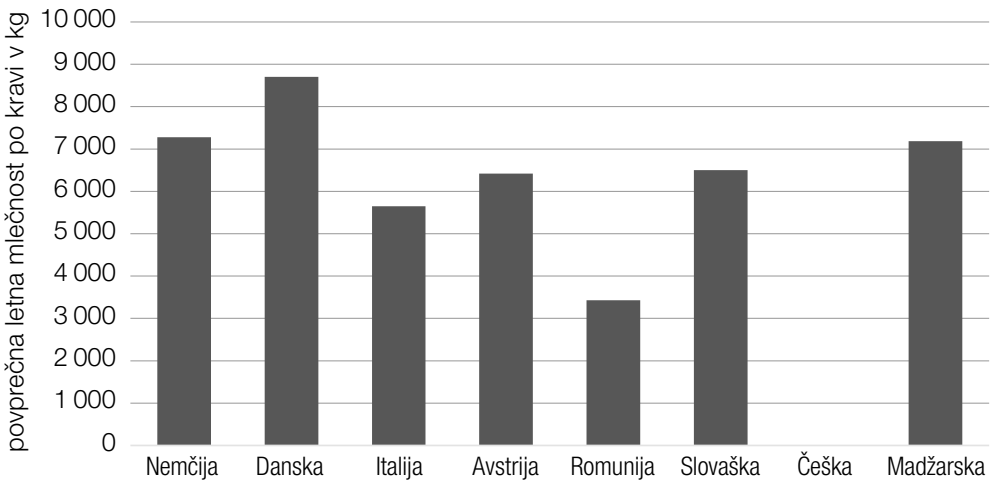
– Sestavite enačbo funkcije f, ki opisuje proizvodnjo surovega mleka v odvisnosti od časa t. Izberite $t = 0$ za leto 1995. *[1 točka]*
– S pomočjo funkcije f izračunajte predvideno proizvodnjo mleka v letu 2017. *[1 točka]*

b) V naslednji preglednici je navedena povprečna letna mlečnost po kravi v kilogramih (kg) za nekatere izbrane evropske države v letu 2012.

država	povprečna letna mlečnost po kravi v kg
Nemčija	7 280
Danska	8 701
Italija	5 650
Avstrija	6 418
Romunija	3 429
Slovaška	6 501
Češka	7 705
Madžarska	7 184

– Določite za koliko odstotkov je bila povprečna letna mlečnost po kravi na Danskem višja kot v Romuniji. *[1 točka]*

Ti podatki so, z izjemo povprečne letne mlečnosti po kravi na Češkem, predstavljeni v naslednjem diagramu.



– V gornjem diagramu vrišite manjkajoči stolpec za Češko. *[1 točka]*

c) V Avstriji proizvedeno surovo mleko vsebuje neposredno po molži povprečno 20 000 klic na mililiter (ml). Po nekem modelu se izhaja, da se število klic vsakih 25 minut podvoji.

– Utemeljite, da spodaj navedena funkcija N ne ustreza temu modelu.

$N(t) = 20\,000 + 800 \cdot t$

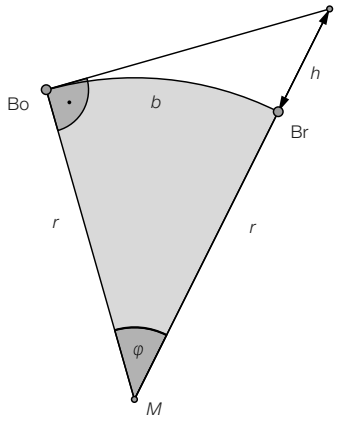
t … čas po molži v min
$N(t)$ … število klic na ml ob času t *[1 točka]*

Naloga 5

Bodensko jezero

a) Bodensko jezero meri v svojem najdaljšem razponu od Bregenza (Br) do Bodmana (Bo) 66 kilometrov (km). Zaradi ukrivljenosti Zemlje, iz Bregenza ne moremo videti jezerske obale pri Bodmanu (glej naslednjo skico, ki ni v natančnem merilu):

r … polmer Zemlje (6 371 km)
b … dolžina loka, ustreza razdalji med Bregenzom in Bodmanom
M … središče Zemlje

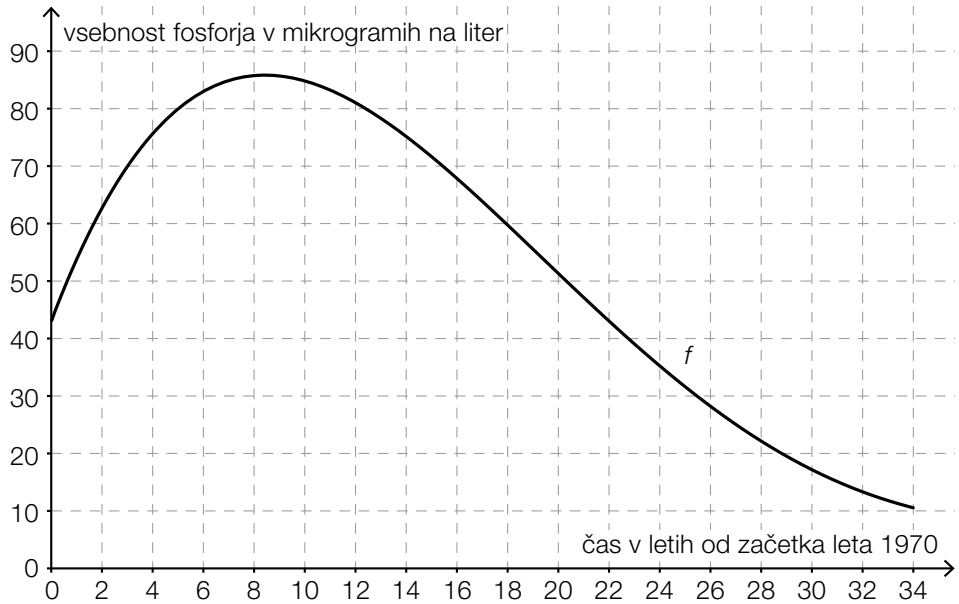


– Izračunajte kot φ. *[1 točka]*

Da bi lahko pri zelo dobri vidljivosti iz Bregenza videl na jezersko obalo pri Bodmanu, bi se moral opazovalec v Bregenzu nahajati vsaj na višini h nad gladino jezera (glej gornjo skico, ki ni v natančnem merilu).

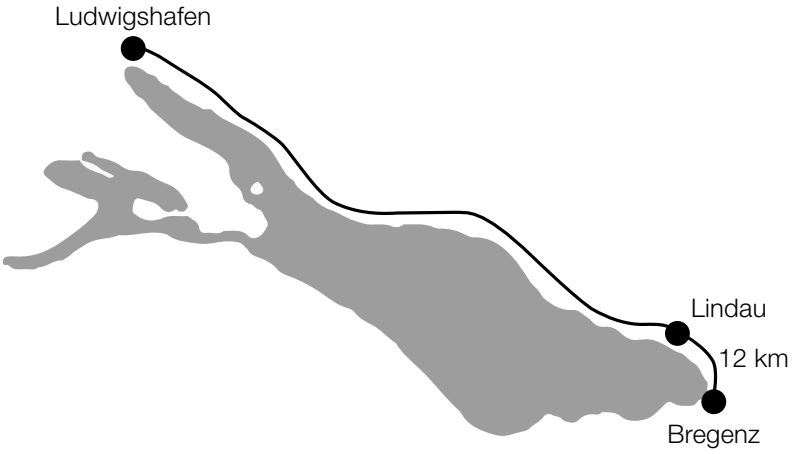
– Izračunajte višino h. *[1 točka]*

b) Vsebnost fosforja v Bodenskem jezeru lahko v časovnem obdobju od 1970 do 2004 približno opišemo s polinomsko funkcijo f.

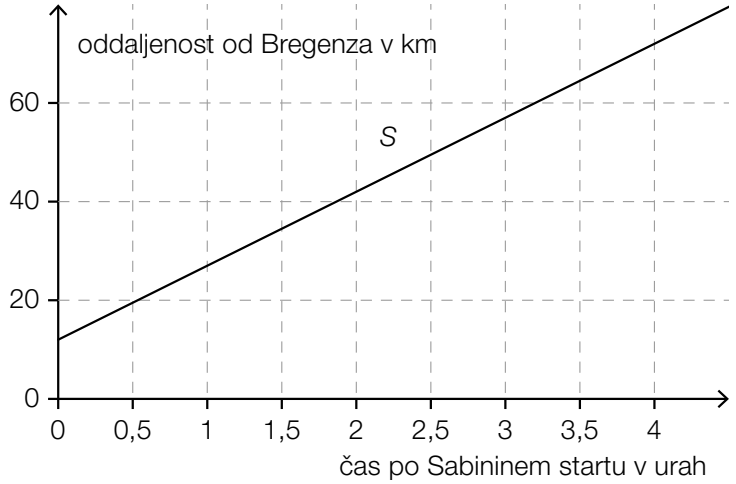


– S pomočjo zgoraj predstavljenega grafa funkcije f določite povprečno hitrost spreminjanja *(mittlere Änderungsrate)* vsebnosti fosforja na časovnem intervalu [12; 18]. *[1 točka]*
– Dokumentirajte z besedami, kako lahko s pomočjo diferencialnega računa izračunamo, kdaj je vsebnost fosforja najmočneje padla. *[1 točka]*

c) Sabina in Johana se peljeta s svojimi kolesi po kolesarski poti v smeri Ludwigshafna (glej naslednjo skico). Sabina starta v kraju Lindau, ki je od Bregenza oddaljen 12 km in pelje s konstantno hitrostjo 15 km/h. Johana starta s kolesom e-bike eno uro kasneje v Bregenzu in pelje s konstantno hitrostjo 30 km/h.



Sabinino oddaljenost od Bregenza lahko približno opišemo z linearno funkcijo S.



– V zgornji diagram narišite graf linearne funkcije J, ki predstavlja Johanino oddaljenost od Bregenza. *[1 točka]*

– Odčitajte kako dolgo je Johana na poti do takrat, ko dohiti Sabino. *[1 točka]*

Tudi Otto se pelje po tej kolesarski poti od Bregenza v smeri Ludwigshafna. Njegovo hitrost lahko opišemo z neko funkcijo v.

t ... čas v h
$v(t)$ ... hitrost ob času t v km/h

– Ob navedbi ustrezne enote opišite, kaj se v dani vsebinski povezavi izračuna z $\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t$. *[1 točka]*

Naloga 6 (del B)

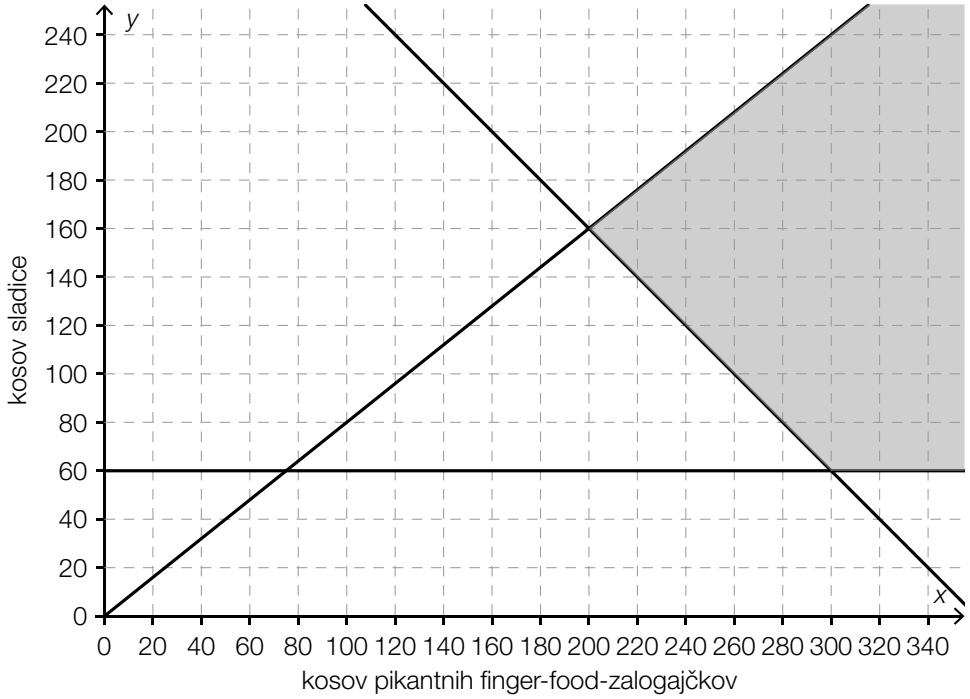
Catering

V okviru šolskega projekta mora skupina učencev izvesti catering na nekih prireditvah.
Pri tem mora biti dobavljeno x kosov pikantnih finger-food-prigrizkov in y kosov sladice.

a) Za neki dogodek je treba dobaviti skupaj vsaj 270 kosov, od tega naj bo največ 100 kosov sladice. Skupaj naj bo pikantnih finger-food-prigrizkov dobavljenih vsaj dvakrat toliko kosov kot kosov sladice.

– Sestavite neenačbe, ki opisujejo to dejansko stanje. *[3 točke]*

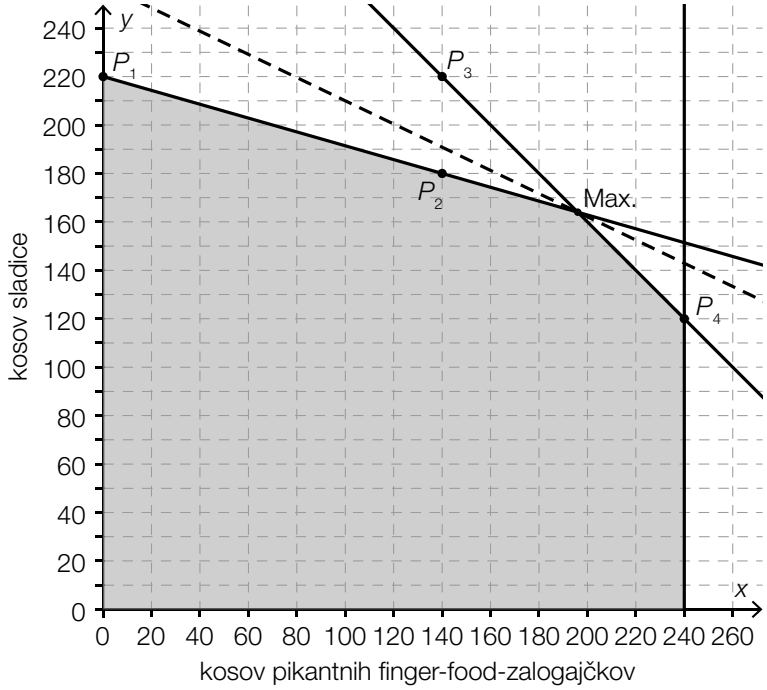
b) Na naslednji sliki je predstavljeno območje rešitve sistema neenačb za zahteve neke druge prireditve.



Proizvodni stroški za vsak kos pikantnega finger-food-prigrizka znašajo 0,80 €, za vsak kos sladice pa 1 €. Skupni proizvodni stroški naj bi bili po možnosti čim nižji.

– Sestavite enačbo pripadajoče ciljne funkcije *(Zielfunktion)*. *[1 točka]*
– V zgornjo sliko vrišite tisto premico, za katero se v območju rešitve sistema neenačb privzema minimalna vrednost ciljne funkcije. *[1 točka]*
– Iz gornje slike odčitajte tisto proizvodno količino, pri kateri so skupni proizvodni stroški najmanjši. *[1 točka]*

c) Na naslednji sliki je predstavljeno območje rešitve za določitev maksimalnega dobička pri cateringu za neki drugi dogodek. Premica, za katero se privzema optimalna vrednost ciljne funkcije, je vrisana črtkano.



Točke P_1, P_2, P_3 in P_4 ležijo na koordinatni mreži.

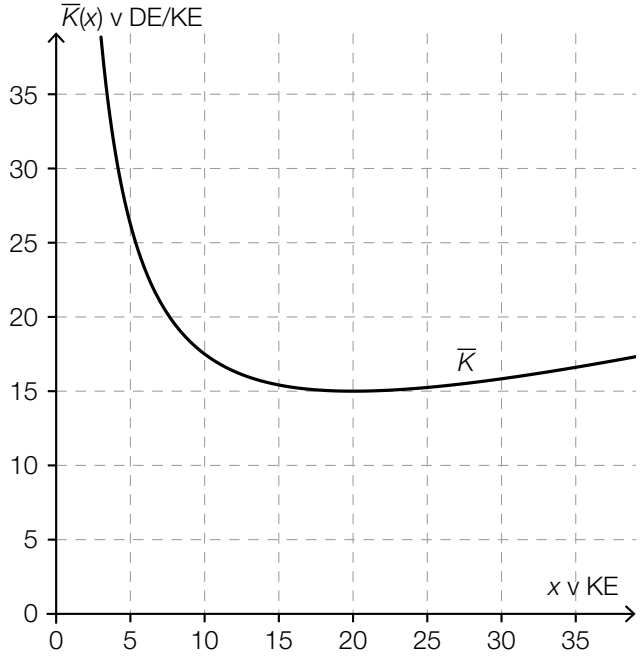
– S pomočjo vrisanih točk sestavite enačbi obeh mejnih premic, ki sta potrebni za določitev proizvodnih količin za maksimalni dobiček. *[2 točki]*
– Izračunajte tisti števili kosov pikantnih finger-food-prigrizkov in sladic, pri katerih je dosežen maksimalni dobiček. *[1 točka]*

Naloga 7 (del B)

Proizvodnja svetilk

Neko podjetje proizvaja različne svetilke.

a) Na naslednji sliki je predstavljen graf kosovne funkcije stroškov $\overline{K}$ za luči *Credas*.



Pripadajoča funkcija mejnih stroškov K' je podana z:

$K'(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$

x ... število proizvedenih KE (količinskih enot)
$K'(x)$ ... mejni stroški pri x proizvedenih KE v DE/KE (denarnih enot na količinsko enoto)

– V gornjo sliko vrišite graf funkcije mejnih stroškov K'. *[1 točka]*
– Odčitajte optimum obratovanja. *[1 točka]*
– Sestavite enačbo pripadajoče funkcije stroškov K. *[1 točka]*
– Izračunajte fiksne stroške. *[1 točka]*

b) Stroške proizvodnje visečih luči *Ecos* lahko približno opišemo s funkcijo stroškov K:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$

x ... število proizvedenih KE (količinskih enot)
$K(x)$ ... stroški pri x proizvedenih KE v DE (količinske enote v denarnih enotah)

Viseče luči se prodajajo za fiksno ceno 9 DE/KE (denarnih enot na količinske enote).

– Sestavite enačbo pripadajoče funkcije dobička. *[1 točka]*
– Določite meje dobička. *[1 točka]*
– Določite maksimalni dobiček. *[1 točka]*

c) Za kvadratno funkcijo dobička G velja:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... število prodanih KE (količinskih enot)
$G(x)$ ... dobiček pri x prodanih KE v DE (količinske enote v denarnih enotah)

Trdi se, da leži mesto ekstrema funkcije G pri $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$.

– Pokažite, da je trditev pravilna. *[1 točka]*
– Navedite, kateri pogoj mora biti izpolnjen za koeficient a, da bo na tem mestu maksimum. *[1 točka]*

Naloga 8 (del B)

Zemljišče ob jezeru

Za nakup zemljišča ob jezeru potrebuje kupec kredit v višini 865.000 €. (Stroški in dajatve niso upoštevani.)

a) Neka kreditna ustanova poda naslednjo ponudbo:
Kreditojemalec plača ob koncu vsakega leta obrok v višini 100.000 €, pri obrestni meri 6,75 % p. a.

– Izračunajte koliko polnih obrokov mora plačati kreditojemalec. *[1 točka]*
– Izračunajte višino preostalega zneska, ki zapade v plačilo eno leto po zadnjem polnem obroku. *[1 točka]*

b) Neka druga kreditna ustanova izdela odplačilni načrt za odplačevanje kredita. Izsek tega odplačilnega načrta je predstavljen v naslednji preglednici

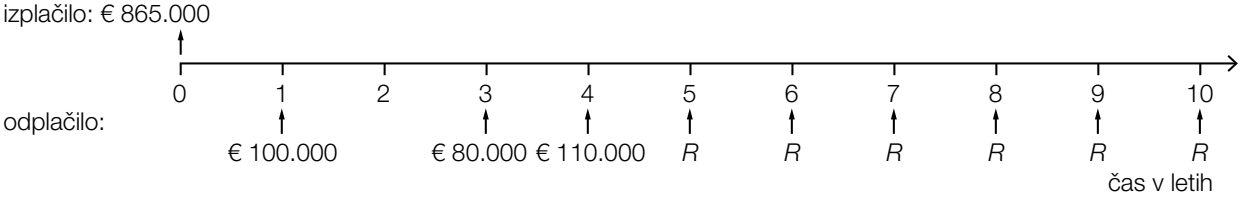
leto	delež obresti	razdolžnina *(Tilgungsanteil)*	anuiteta	preostanek dolga
0				€ 865.000
1	€ 51.467,50	€ 53.532,50		
2	€ 48.282,32	€ –48.282,32		
...				

– Določite anuiteto in preostanek dolga za leto 1. *[1 točka]*

V letu 2 se vnosa v stolpcih »delež obresti« in »razdolžnina«, razlikujeta le v predznaku.

– Opišite učinek tega na preostanek dolga v letu 2. *[1 točka]*

c) Neka nadaljnja ponudba za odplačevanje kredita v roku 10 let je lahko predstavljena s pomočjo naslednje časovne osi:



– Z besedami opišite postopek odplačevanja za ponudbo, predstavljeno na časovni osi. *[1 točka]*
– Izračunajte višino obroka *R* pri obrestni meri 6 % p. a. *[2 točki]*