

Ime:	
Razred/Letnik:	



Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

28. september 2017

Uporabna matematika

del A + del B (sveženj 8)

BMB

Bundesministerium
für Bildung



Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred vami, vsebuje 6 nalog v delu A in 3 naloge v delu B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge lahko obdelujete neodvisno drugo od druge. Na voljo imate skupno 270 minut čistega delovnega časa za del A in del B.

Pri reševanju uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte izključno zvezek z nalogami in liste za odgovore, ki so vam dani na razpolago. Vpišite svoje ime v za to predvideno polje na prvi strani zvezka z nalogami in na vsak list z odgovori. Pri odgovarjanju vsake delne naloge navedite oznako le-te (npr. 3c).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Uporaba s strani »Schulbuchaktion« potrjenih zvezkov formul oz. zbirke formul za SRDP iz uporabne matematike in elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računalja ali druge ustrezne tehnologije) je dovoljena, če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, itraneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in v elektronski pripomoček niso implementirani lastni podatki. Priročniki za uporabo elektronskih pripomočkov so dopustni v originalni tiskani obliki ali v elektronski pripomoček integrirani obliki.

Oddati je potrebno zvezek z nalogami in vse liste z odgovori, ki jih boste uporabljali.

Smernice za reševanje SRDP iz uporabne matematike

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljene funkcije tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno poudariti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati (skalirati) ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z vašim imenom.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Za vrednotenje velja naslednji ključ:

44–48 točk	»Sehr gut« / prav dobro
39–43 točk	»Gut« / dobro
34–38 točk	»Befriedigend« / povoljno / zadovoljivo
23–33 točk	»Genügend« / zadostno
0–22 točk	»Nicht genügend« / nezadostno

Razlaga formatov odgovorov

Delne naloge lahko vsebujejo naslednje formate odgovorov: *odprti format odgovora*, *polodprti format odgovora*, *konstrukcijski format*, *prireditveni format* in *multiple-choice-format* v različici »1 izmed 5«.

Odprti format odgovora: pri odprtem formatu odgovora lahko poteka reševanje na zelo različne načine, npr. z izračunom ali na grafični način (z izdelavo grafikona).

Polodprti format odgovora: pri polodprtem formatu odgovora je potrebno pravilni odgovor vstaviti v vnaprej podano formulo, funkcijo itd.

Primer:

Dan je pravokotnik s stranicama a in b .

– Nastavite formulo za izračun ploščine A tega pravokotnika.

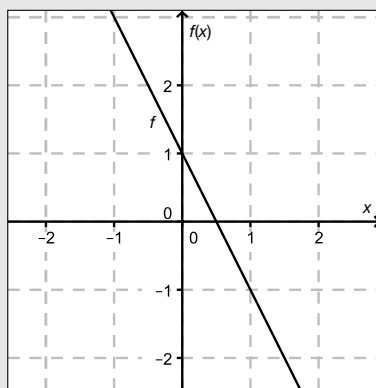
$$A = \underline{a \cdot b}$$

Konstrukcijski format: Dan je diagram, grafikon ali slika. Zastavitev naloge zahteva dopolnitev s točkami in/ali premicami in/ali krivuljami in/ali vpisovanjem vrednosti oz. označevanjem koordinatnih osi na diagramu, v grafikonu ali na sliki.

Primer:

Dana je linearna funkcija f pri $f(x) = k \cdot x + d$.

– V naslednji koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri $k = -2$ in $d > 0$.



Prireditveni format: Za ta format je značilno, da je podanih več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerih stoji več možnosti odgovorov. Nalogo tega formata pravilno rešite tako, da z vstavljanjem **ustreznih črk** dotičnim izjavam priredite pravilne možnosti odgovorov.

Primer:

- Dvem enačbam priredite vsakič ustrezno oznako (izmed A do D).

$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«: Za ta format je značilna ena zastavitev vprašanja in 5 možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno možnost odgovora**. Nalogo tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost odgovora.

Primer:

- S križcem označite ustrezno enačbo.

$1 + 1 = 1$	☐
$2 + 2 = 4$	☒
$3 + 3 = 3$	☐
$4 + 5 = 8$	☐
$5 + 5 = 5$	☐

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah za označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato križcem označite želeni okvirček.

$1 + 1 = 3$	☐
$2 + 2 = 4$	☒
$3 + 3 = 5$	☐
$4 + 4 = 4$	☐
$5 + 5 = 9$	☒

Tukaj je bil najprej izbran odgovor » $5 + 5 = 9$ « in nato spremenjen na » $2 + 2 = 4$ «.

Tako izberete odgovor, ki ste ga že prebarvali:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Obkrožite želeni prebarvani okvirček.

$1 + 1 = 3$	☐
$2 + 2 = 4$	☒
$3 + 3 = 5$	☐
$4 + 4 = 4$	☒
$5 + 5 = 9$	☐

Tukaj je bil najprej odgovor » $2 + 2 = 4$ « prebarvan in nato ponovno izbran.

Veliko uspeha!

Naloga 1

Wellness

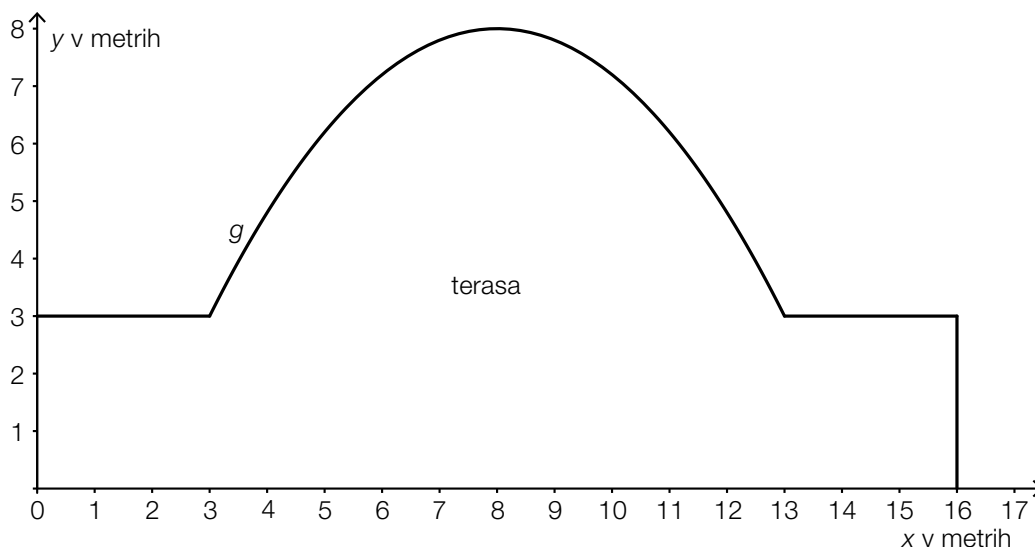
- a) V savnah se za merjenje časa večinoma uporabljajo peščene ure. Pesek v taki peščeni uri potrebuje 15 minut, da popolnoma spolzi od zgoraj navzdol. Na minuto od zgoraj navzdol spolzi 4 grame peska. Ob začetku ($t = 0$) se nahaja celotna količina peska v zgornjem delu peščene ure (glej skico ob robu).



- Nastavite enačbo tiste linearne funkcije, ki času t , v minutah, priredi količino peska v zgornjem delu peščene ure, v gramih.

[1 točka]

- b) V zunanjem delu neke savne načrtujejo novo teraso z naslednjo osnovno ploskvijo (glej grafiko):



V danem koordinatnem sistemu je zaokrožitev terase na intervalu $[3; 13]$ opisana z grafom funkcije g .

- Sestavite formulo za izračun ploščine osnovne ploskve terase, če je funkcija g znana.

$A =$ _____

[1 točka]

Da bi po terasi položili ploščice iz peščenjaka, je bilo kupljenih 90 m^2 ploščic. Ploščice iz peščenjaka stanejo neto (brez 20 % prometnega davka) 56 € po kvadratnem metru.

- Izračunajte skupne stroške za ploščice iz peščenjaka, vključujoč prometni davek, če je bil priznan 3 %-ni popust.

[1 točka]

Naloga 2

Menjalni tečaji

Za dopust izven evro območja je potrebno denar zamenjati v ustrezno nacionalno valuto.

- a) Postopek menjave se izvaja na naslednji način:
od zneska B v evrih, ki ga želimo menjati, se odtegne fiksna provizija G v evrih. Preostali znesek se pomnoži z menjalnim tečajem w in tako dobimo znesek F v tuji valuti, ki se izplača.

– Sestavite formulo za izračun F iz B , G in w .

$$F = \underline{\hspace{10cm}} \quad [1 \text{ točka}]$$

- b) Za brezgotovinsko plačilo v počitniški deželi izven evro območja ima neka dopustnica na voljo dve možnosti preračuna A in B :

Za preračun zneska tuje valute v ustrezni znesek v evrih se modelno uporabljata naslednji linearni funkciji:

$$\text{možnost A: } E_A(F) = 0,134 \cdot F + 3,83$$

$$\text{možnost B: } E_B(F) = 0,135 \cdot F + 2,02$$

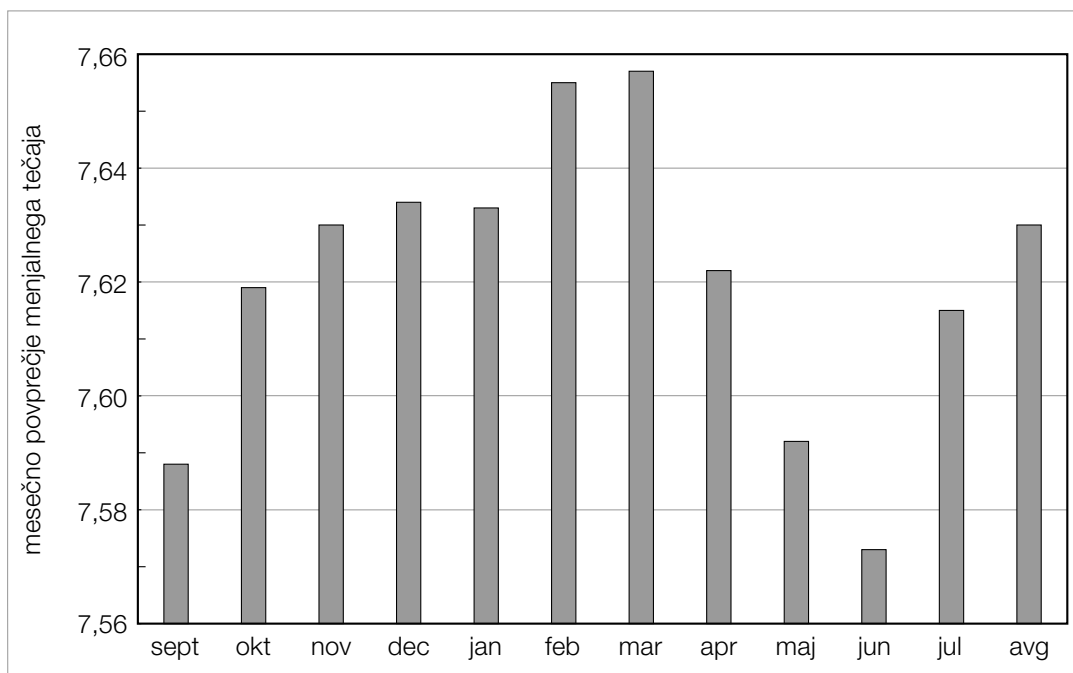
F ... znesek v tuji valuti

$E_A(F)$, $E_B(F)$... znesek v evrih, ki ustreza znesku F v tuji valuti

– Določite za katere zneske v tuji valuti je plačilo z možnostjo A za dopustnico ugodnejše.

[2 točki]

- c) V naslednjem diagramu so za eno leto predstavljena mesečna povprečja menjalnega tečaja neke tuje valute glede na evro.



Nekdo zatrjuje: »Mesečno povprečje menjalnega tečaja je bilo v mesecu oktobru približno dvakrat tako veliko kot mesečno povprečje menjalnega tečaja v mesecu septembru, ker je pripadajoči stolpec v diagramu približno dvakrat tako visok.«

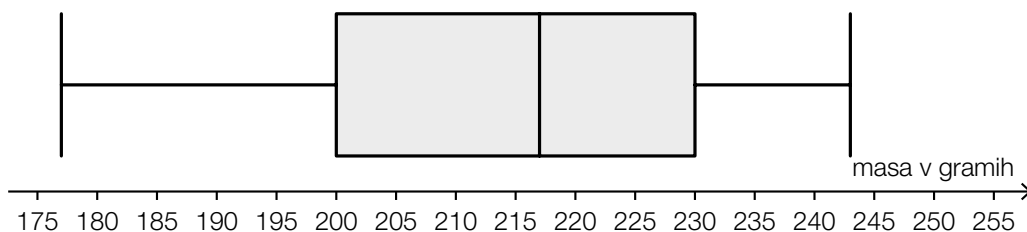
– Pojasnite, zakaj je ta utemeljitev napačna.

[1 točka]

Naloga 3

Jabolka

- a) Jabolka neke velike pošiljke so posamično stehali. Podatki so predstavljeni v obliki Boxplot-diagrama (škatle z brki):



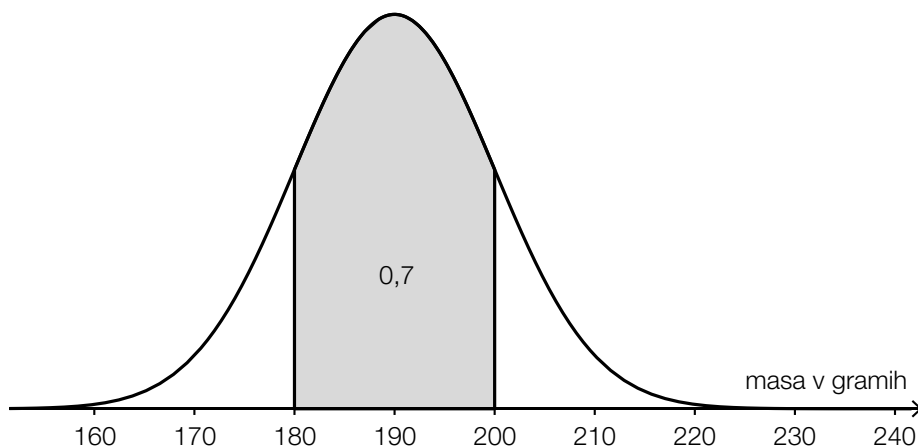
V strokovni literaturi se neka vrednost označuje kot »navzgornji ubežnik«, če leži ta vrednost dlje kot za 1,5-kratnik interkvartilnega razmika desno od 3. kvartila. Takšni ubežniki v gornjem Boxplot-diagramu niso upoštevani.

– Navedite od katere mase naprej se neko jabolko označi kot »navzgornji ubežnik«. [1 točka]

- b) Masa jabolk neke določene sorte je približno normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo 200 g in standardnim odklonom 50 g.

– Izračunajte tisti simetrični interval okoli pričakovane vrednosti, v katerem leži masa nekega slučajno izbranega jabolka z verjetnostjo 90 %. [1 točka]

- c) Masa jabolk v neki pošiljki je približno normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo 190 g. Na naslednji sliki je predstavljen graf pripadajoče funkcije gostote verjetnosti.



– V dani vsebinski povezavi interpretirajte pomen markirane ploskve. [1 točka]

– S pomočjo gornje slike določite, s kakšno verjetnostjo ima neko slučajno izbrano jabolko maso večjo kot 200 g. [1 točka]

d) Iz izkušnje je znano, da je $\frac{1}{30}$ vseh jabolk neke pošiljke črvivih.

– Izračunajte verjetnost, da je v nekem slučajnem vzorcu, ki vsebuje 200 jabolk, največ 5 jabolk, črvivih. *[1 točka]*

Naloga 4

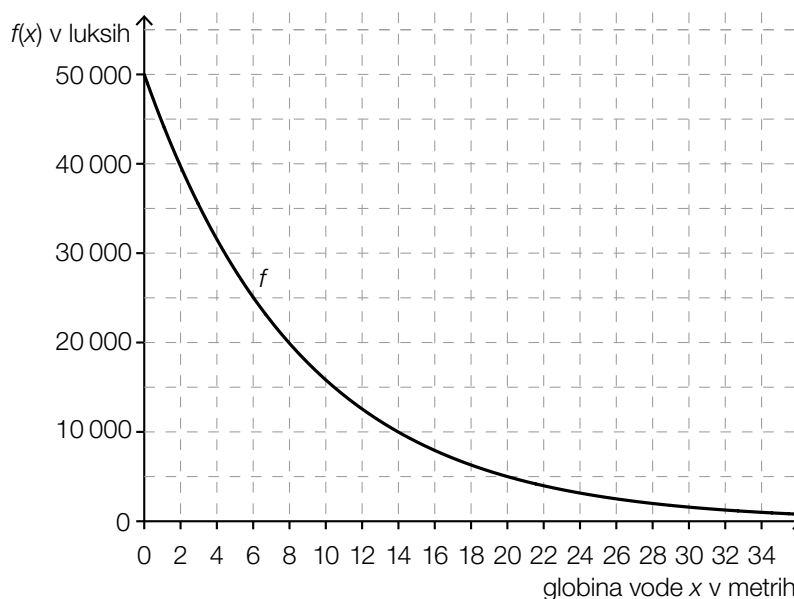
Pod vodo

- a) Neposredno pod vodno gladino znaša tlak 1 bar. Z naraščajočo globino vode tlak enakomerno narašča, in sicer za 1 bar na 10 metrov vodne globine.

– Izračunajte, na kateri globini vode vlada tlak 3,9 barov.

[1 točka]

- b) Pojemanje osvetljenosti poteka pod vodo eksponentno in ga je moč približno opisati s funkcijo f . Graf funkcije f je predstavljen na naslednji sliki.



– Iz gornje slike odčitajte, na kateri globini znaša osvetljenost samo še 10 % svoje izhodiščne vrednosti.

[1 točka]

– Nastavite enačbo funkcije f .

[1 točka]

- c) Izvedena je bila meritev za določitev hitrosti zvoka pod vodo. Zvok je potreboval 0,4 milisekund, da je opravil pot z dolžino 0,57 metra.

– S podatki tega poskusa izračunajte hitrost zvoka v metrih na sekundo.

[1 točka]

- d) Skozi neko določeno potapljaško masko zaznamo vse predmete pod vodo za tretjino večje, kot so v resnici.

– Določite, za koliko odstotkov je dejanska velikost manjša kot tista velikost, ki jo zaznamo.

[1 točka]

Naloga 5

Postavljanje mlaja

Mlaj z višino H stoji navpično na vodoravnem zemljišču.

- a) Mlaj z višino H ima v nekem določenem trenutku 10,00 m dolgo senco. Sonce je pri tem videti pod višinskim kotom α .

Hans se postavi tako, da se njegova senca konča na istem mestu kot senca mlaja. Hans je visok 1,76 m in je 8,50 m oddaljen od mlaja.

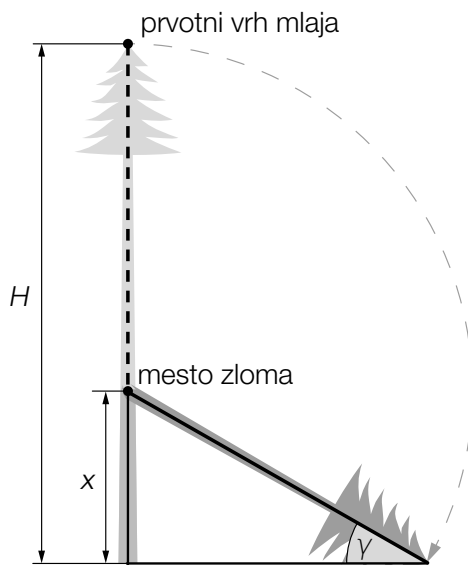
- Prikažite stanje s skico, v kateri so označene vse dane količine, kakor tudi višinski kot α in višina H . [1 točka]
- Izračunajte višinski kot α . [1 točka]

- b) Na vodoravni oddaljenosti 50 m od mlaja, izmeri Martin višinski kot $\beta = 26,6^\circ$ do vrha mlaja. Za tem skrajša svojo vodoravno oddaljenost na polovico. Trdi, da se je s tem višinski kot do vrha podvojil.

- Dokazljivo preverite, če je Martinova trditev pravilna. [1 točka]

- c) Pri nekem močnem neurju se je mlaj z višino H zlomil.

Odlomljeni del oklepa z vodoravnimi tlemi kot γ (glej spodnjo skico, ki ni v pravem merilu).



- Nastavite formulo za izračun x iz H in γ .

$x =$ _____

[1 točka]

Naloga 6

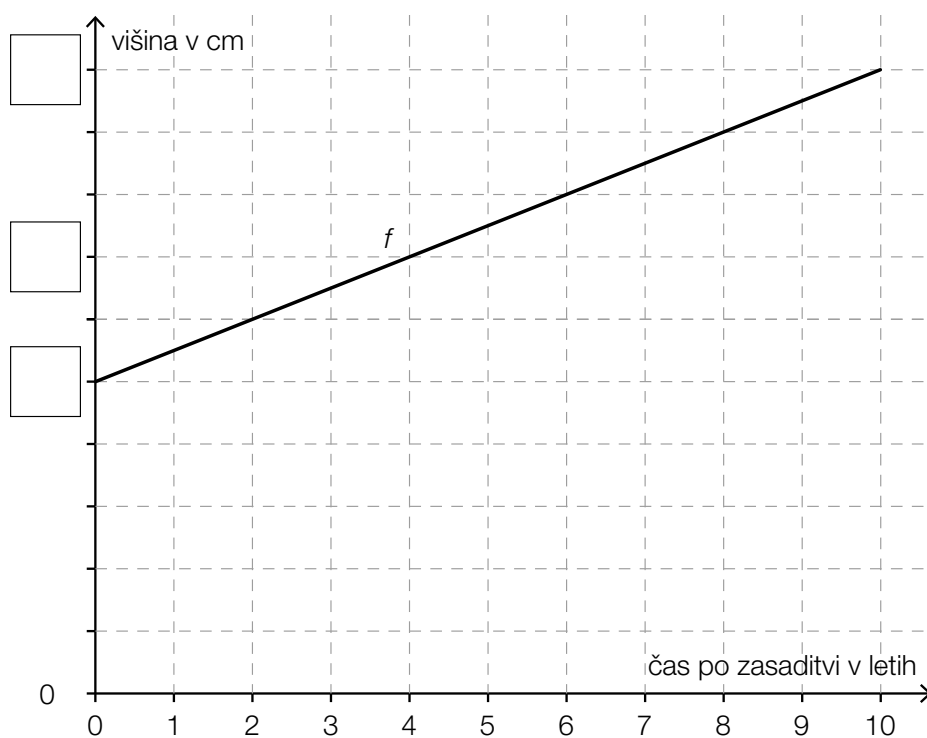
Pušpani (zelenike)

V ponudbi so razne sorte pušpanov z različno višinsko rastjo.

- a) Nek določen pušpan sorte A je v prvih 10-letih po zasaditvi zrastel 3 cm vsako leto. 4 leta po zasaditvi je bil pušpan visok 42 cm. Višina pušpana, v odvisnosti od časa po zasaditvi, je opisana z linearno funkcijo f . Graf te funkcije je predstavljen v naslednjem koordinatnem sistemu. Pri tem manjkajo vrednostne oznake na navpični koordinatni osi.

– Vstavite manjkajoče vrednosti v zato predvidene okvirčke.

[1 točka]

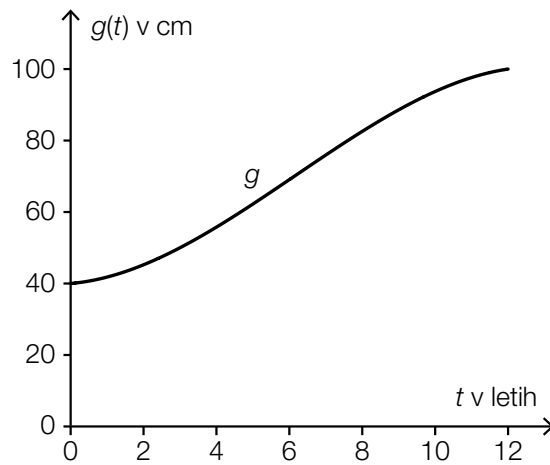


b) V prvih 12 letih po zasaditvi je moč višino nekega pušpana sorte B približno opisati s funkcijo g :

$$g(t) = -0,053 \cdot t^3 + 0,98 \cdot t^2 + 0,872 \cdot t + 40 \quad \text{pri } 0 \leq t \leq 12$$

t ... čas po zasaditvi pušpana v letih

$g(t)$... višina pušpana ob času t v cm



– Izračunajte časovni trenutek najmočnejše višinske rasti.

[1 točka]

– Opišite kaj se v dani vsebinski povezavi izračuna z naslednjim izrazom:

$$g(5) - g(0)$$

[1 točka]

Naloga 7 (del B)

Stanovanja

Strokovno združenje nepremičninskih in premoženjskih (fiduciarnih) upraviteljev sestavlja statistike za trende na nepremičninskem trgu. Zberejo se podatki o nakupnih cenah in najemninah. Višina nakupnih cen oz. najemnin je praviloma zelo odvisna od velikosti, opreme in lege stanovanj.

- a) Za neko avstrijsko deželno glavno mesto je strokovno združenje nepremičninskih in premoženjskih upraviteljev zbralo podatke o ceni najemnin v evrih na m² za stanovanja do 60 m² z dobro bivalno vrednostjo:

konec leta ...	cena najemnine v evrih na m ²
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Cena najemnine v evrih na m² naj bo opisana v odvisnosti od časa t v letih.

- S pomočjo linearne regresije določite enačbo pripadajoče funkcije. Izberite $t = 0$ za konec leta 2003. [1 točka]
- V dani vsebinski povezavi interpretirajte vrednost vzpona (smernega koeficienta) te regresijske funkcije. [1 točka]
- S pomočjo te regresijske funkcije določite prognozo za ceno najemnine na m² za konec leta 2018. [1 točka]

Neki drugi model uporablja za opis razvoja cene najemnine funkcijo B .

$$B(t) = 7,77 \cdot 1,035^t$$

t ... čas v letih od konca leta 2003

$B(t)$... cena najemnine ob času t v evrih na m²

- V dani vsebinski povezavi interpretirajte pomen parametra 1,035. [1 točka]

- b) Po neki anketi iz leta 2001 je v zvezni deželi Tirolski v 303 632 stanovanjih živel 661 026 oseb. Naslednja preglednica podaja število teh stanovanj, navedenih po značilnosti »število bivalnih prostorov«:

število bivalnih prostorov	število stanovanj
1	19 372
2	28 973
3	61 002
4	80 331
5	56 878
6	57 076
vsota	303 632

– Z besedami opišite, kaj se v dani vsebinski povezavi izračuna z naslednjimi izrazi:

$$(1) \frac{661\,026}{303\,632} \approx 2,18 \quad [1 \text{ točka}]$$

$$(2) \frac{1 \cdot 19\,372 + 2 \cdot 28\,973 + 3 \cdot 61\,002 + 4 \cdot 80\,331 + 5 \cdot 56\,878 + 6 \cdot 57\,076}{303\,632} \approx 3,98 \quad [1 \text{ točka}]$$

- c) V nekem deželnem glavnem mestu vsakič ob koncu leta zabeležijo podatek o povprečni ceni za lastniška stanovanja z dobro bivalno vrednostjo.

Naslednja preglednica podaja odstotni dvig cene na m² ob koncu leta, glede na ceno na m² ob koncu vsakokratnega predhodnega leta, za leta 2009 do 2013.

konec leta ...	povečanja cene glede na ceno na m ² ob koncu vsakokratnega predhodnega leta
2009	5,5 %
2010	1,2 %
2011	7,1 %
2012	6,7 %
2013	5,4 %

Ob koncu leta 2013 je stalo lastniško stanovanje z dobro bivalno vrednostjo povprečno 3.362 € na m².

- Izračunajte povprečno ceno na m² za lastniško stanovanje z dobro bivalno vrednostjo ob koncu leta 2010. [1 točka]
- Izračunajte povprečni odstotni dvig cene na leto za časovno obdobje od začetka 2009 do konca 2013. [1 točka]

- d) V nekem deželnem glavnem mestu je 90 % stanovanj uvrščenih kot stanovanja s srednjo bivalno vrednostjo, 10 % stanovanj pa kot stanovanja z dobro bivalno vrednostjo. 20 % stanovanj ima velikost manjšo kot 60 m². 16 % vseh stanovanj ima velikost manjšo kot 60 m² in srednjo bivalno vrednost.

– Izpolnite naslednjo tabelo s štirimi polji tako, da le-ta podaja opisano stvarno povezavo.

[1 točka]

	velikost stanovanja manjša kot 60 m ²	velikost stanovanja vsaj 60 m ²	vsota
srednja bivalna vrednost			
dobra bivalna vrednost			
vsota			

- Dokažite, da sta značilnosti »velikost stanovanja« in »bivalna vrednost« (stohastično) med seboj odvisni. [1 točka]
- Izračunajte verjetnost, da ima neko slučajno izbrano stanovanje manj kot 60 m² bivalne površine, če vemo, da ima srednjo bivalno vrednost. [1 točka]

Naloga 8 (del B)

Mejni stroški in mejni izkupiček

- a) Proizvodne stroške nekega podjetja je moč približno opisati z naslednjo funkcijo stroškov K :

$$K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,115 \cdot x^2 + 5,2 \cdot x + 50$$

x ... proizvodna količina v količinskih enotah (KE)

$K(x)$... stroški pri proizvodni količini x v denarnih enotah (DE)

- Izračunajte srednji obrok (srednjo mero) spreminjanja za K , če se proizvodnja poveša od 20 KE na 25 KE. [1 točka]
- Izračunajte mejne stroške pri proizvodnji 20 KE. [1 točka]
- Interpretirajte to vrednost mejnih stroškov v dani vsebinski povezavi. [1 točka]

- b) Da bi za neko funkcijo stroškov po zakonu donosnosti K , pri $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$, določili optimum obratovanja, je bil nastavljen naslednji izračun:

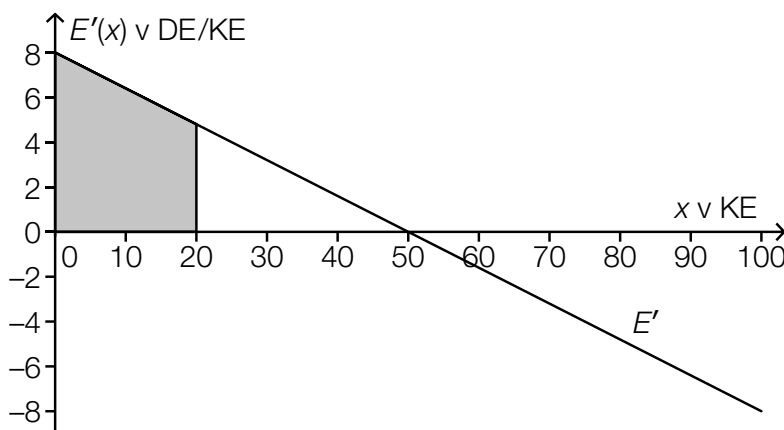
$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Pri tem je izračun funkcije odvoda napačen.

- Pravilno nastavite izračun funkcije odvoda. [1 točka]

- c) Na naslednji sliki je predstavljen graf neke linearne funkcije mejnega izkupička E' .



- Nastavite enačbo za E' . [1 točka]
- Izračunajte ploščino markiranega območja. [1 točka]
- Ob navedbi ustreznih enot interpretirajte ploščino markirane ploskve v dani vsebinski povezavi. [1 točka]
- V dani vsebinski povezavi interpretirajte pomen ničle od E' , glede na pripadajočo funkcijo izkupička E . [1 točka]

Naloga 9 (del B)

Pokojninska preventiva

Alexander želi varčevati za čas svoje upokojitve. V naslednjih nalogah ni upoštevan davek na kapitalski donos.

- a) 15 let mesečno vplačuje prenumerandno 400 € na svoj zasebni pokojninski račun z obrestno mero 0,27 % p. m., ter za tem pusti denar 25 let naloženega pri enaki obrestni meri.

– Izračunajte njegov zasebni pokojninski znesek po 40 letih. [1 točka]

- b) Neka banka mu ponudi naslednji predlog:

Pri plačilu 20.000 € takoj, 30.000 € po 5 letih in 40.000 € po 15 letih, mu po skupno 40 letih zagotavljajo privarčevani kapital v višini 200.000 €.

– Ponazorite ta tok plačil (vplačila in privarčevani kapital) na časovni osi. [1 točka]

– Izračunajte pripadajočo obrestno mero. [1 točka]

- c) Na svojem zasebnem pokojninskem računu, ki se obrestuje po 2 % p. a., je prihranil znesek v višini 200.000 €.

Sedaj primerja dve varianti izplačevanja:

varianta 1: Na koncu vsakega leta dvigne 12.000 €.

varianta 2: Na koncu vsakega leta dvigne 4.000 €.

– Izračunajte koliko krat bo lahko pri varianti 1 dvignil polni znesek. [1 točka]

– Pojasnite, zakaj ostane pri varianti 2 prihranjeni kapital na pokojninskem računu ohranjen.

[1 točka]