

Standardisierte kompetenzorientierte  
schriftliche Reifeprüfung

AHS

9. Mai 2018

# Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

# Aufgabe 1

## Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

a) Lösungserwartung:

Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen:  $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$

Eine Nullstelle ist daher  $x_1 = 0$ .

Berechnung weiterer Nullstellen:  $a \cdot x^2 + b = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten  $a$  und  $b$  unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt:  $-\frac{b}{a} > 0$ .

Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion  $f$  hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von  $f$  an einer Stelle  $x$  entspricht dem Wert  $f'(x)$ .

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \Rightarrow f'(0) = b$$

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

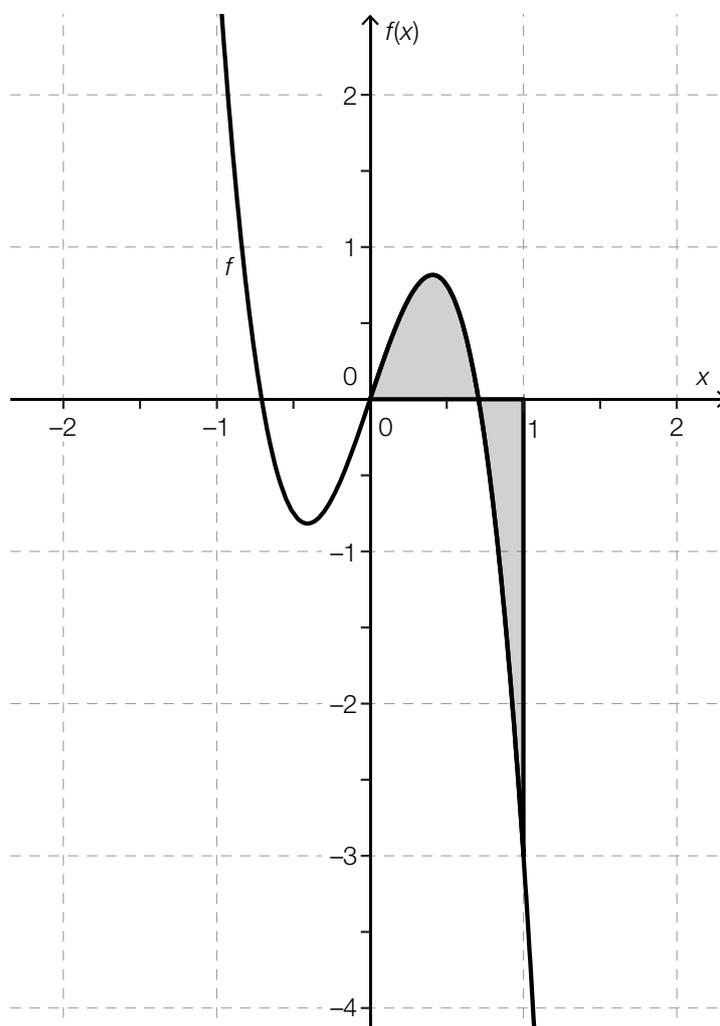
Mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x) dx = \left( a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von  $f$  und von der  $x$ -Achse begrenzt werden. Hätte  $f$  keine Nullstelle im Intervall  $(0; 1)$ , dann würde der Graph von  $f$  in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der  $x$ -Achse (mit  $f(x) > 0$  für alle  $x \in (0; 1)$ ) oder zur Gänze unterhalb der  $x$ -Achse (mit  $f(x) < 0$  für alle  $x \in (0; 1)$ ) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von  $f$  im Intervall  $(0; 1)$  entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von  $f$ :



Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen  $a$  und  $b$ .
- Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von  $f$ . Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

# Aufgabe 2

## Hopfen

### a) Lösungserwartung:

möglicher Ausdruck:  $h(t_1) - h(0)$

$$h(10) - h(0) \approx 6,45$$

Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.

Die mit der Modellfunktion  $h$  berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall  $[0; 10]$  ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

### Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung.  
Toleranzintervall für den Wert:  $[6,4 \text{ m}; 6,5 \text{ m}]$

### b) Lösungserwartung:

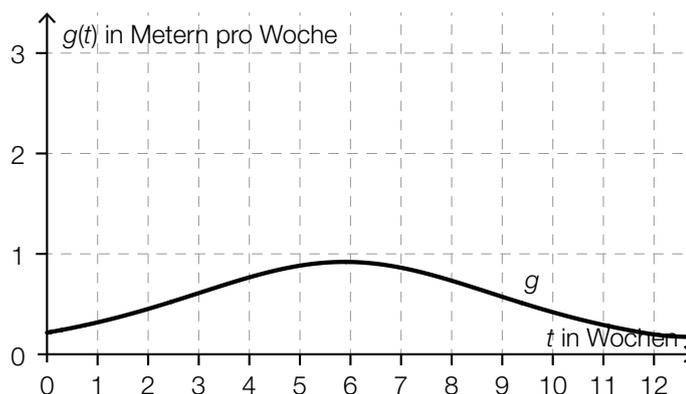
Mögliche Gleichung:

$$h''(t) = 0 \Rightarrow t_2$$

$$t_2 \approx 5,9 \text{ Wochen}$$

$$h'(t_2) \approx 0,92$$

Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen“ nicht angeführt sein muss.  
Toleranzintervall:  $[5,4 \text{ Wochen}; 6,3 \text{ Wochen}]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche“ nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von  $g$ .  
Toleranzintervall:  $[0,90 \text{ Meter pro Woche}; 1 \text{ Meter pro Woche}]$

c) Lösungserwartung:

Mögliche Funktionsgleichung von  $h_1$ :

$$h_1(t) = 0,583 \cdot t + 0,6$$

Mögliche Interpretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:

Die Steigung von  $h$  ist anfangs kleiner als jene von  $h_1$ , dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten. Toleranzintervall für die Steigung:  $[0,58; 0,59]$
- Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) Lösungserwartung:

Möglicher Nachweis:

Für alle  $k < 0$  gilt:  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{k \cdot t} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$ , also ist  $h_{\max}$  unabhängig von  $k$ .  
 $h_{\max} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss  $a$  vergrößert und  $k$  verkleinert werden.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von  $a$  und  $k$ .

# Aufgabe 3

## Abstandsmessung

### a) Lösungserwartung:

$$q_1 = 0,9$$

$$q_3 = 2,1$$

Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchstens 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen in etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:

$$130 \text{ km/h} = 36,1 \text{ m/s}$$

$36,1 \text{ m/s} \cdot 0,9 \text{ s} = 32,5 \text{ m} \Rightarrow$  Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

### Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden richtigen Werte und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
- Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

### b) Lösungserwartung:

ein möglicher größerer Prozentsatz: 25 %

Mögliche Begründung:

Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:

Zufallsvariable  $X$  = Anzahl der Kraftfahrer/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

$p = 0,25$  ... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurde

$n = 10$  ... Anzahl der ausgewählten Messungen

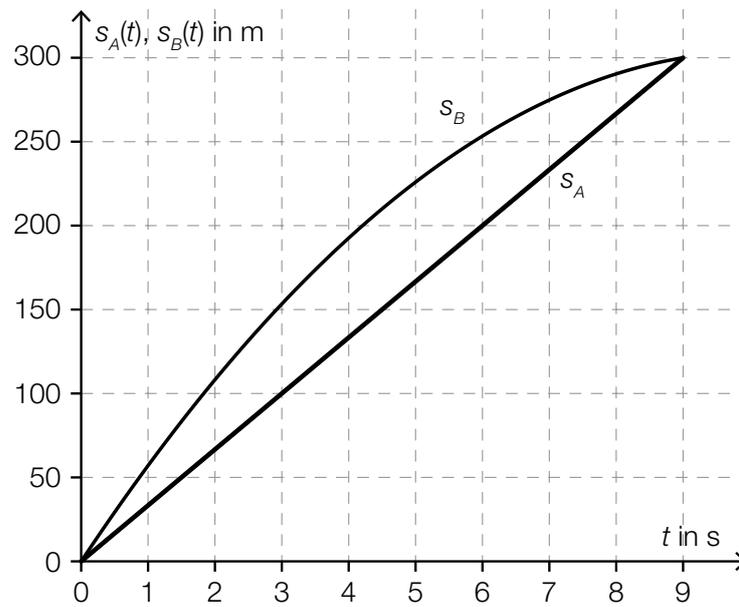
$$P(X \geq 6) \approx 0,0197$$

### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Wertes und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.  
Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung für den von der Kandidatin/vom Kandidaten gewählten Wert richtig sein muss. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.



Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Darstellung von  $s_A$ .
- Ein Punkt für eine korrekte Skizze eines möglichen Graphen von  $s_B$ .

# Aufgabe 4

## Bitcoin

### a) Lösungserwartung:

Monat: August

Kursverlust:  $\approx \text{€ } 55$

$$\frac{K_2 - K_1}{AT} \approx -1,8$$

Mögliche Interpretation:

Im August 2015 betrug die durchschnittliche Kursänderung pro Tag ca.  $\text{€ } -1,8$ .

oder:

Im August 2015 betrug der durchschnittliche Kursverlust pro Tag ca.  $\text{€ } 1,8$ .

### Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Monats sowie des korrekten Wertes für den Kursverlust.

Toleranzintervall: [ $\text{€ } 50$ ;  $\text{€ } 70$ ]

– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.

Toleranzintervall: [ $-2,3$ ;  $-1,5$ ] bzw. [ $1,5$ ;  $2,3$ ]

### b) Lösungserwartung:

$$\frac{f(8) - f(7)}{f(7)} \approx 0,065$$

Mögliche Interpretation:

Die Anzahl der im Umlauf befindlichen Bitcoins nimmt im Zeitraum von Anfang Jänner 2016 bis Anfang Jänner 2017 um ca. 6,5 % zu.

Mögliche Gleichung:

$$f(t) = 20 \cdot 10^6$$

Lösung der Gleichung:  $t \approx 17$

Ungefähr Anfang Jänner 2026 kann nur mehr 1 Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden.

### Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.

Toleranzintervall: [ $0,06$ ;  $0,07$ ] bzw. [ $6 \%$ ;  $7 \%$ ]

– Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Andere korrekte Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall [ $16$ ;  $17$ ] bzw. [ $2025$ ;  $2026$ ]

c) Lösungserwartung:

$$n = 171 \quad h \approx 0,807$$

$$0,807 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,807 \cdot (1 - 0,807)}{171}} \approx 0,807 \pm 0,059 \Rightarrow [0,748; 0,866]$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$0,880 - \frac{138}{171} \approx 0,073$$

$$0,073 \leq z \cdot \sqrt{\frac{0,807 \cdot (1 - 0,807)}{171}} \Rightarrow z \geq 2,418$$

$$2 \cdot \Phi(2,418) - 1 \approx 0,984$$

Das Konfidenzniveau muss mindestens 98,4 % betragen.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Ausgleichspunkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.  
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,74; 0,75]  
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,86; 0,87]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [0,98; 0,99] bzw. [98 %; 99 %]