Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 8
Angabe für **Prüfer/innen**

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

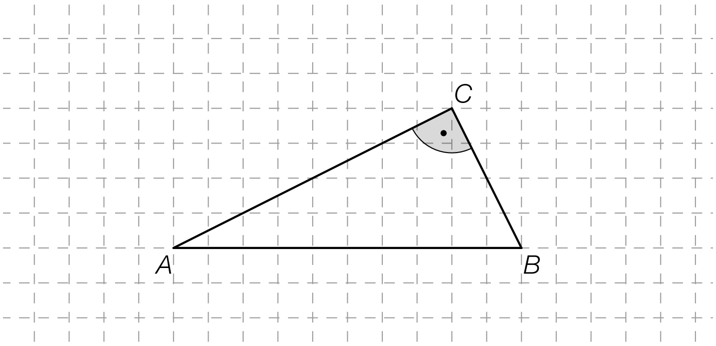
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Rechtwinkeliges Dreieck

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$. Die Seite BC ist halb so lang wie die Seite AC.



In diesem Dreieck gilt für die beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $2 \cdot \vec{u} = \overrightarrow{BC}$ und $4 \cdot \vec{v} = \overrightarrow{CA}$.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie sowohl den Vektor $\vec{u}$ als auch den Vektor $\vec{v}$ mit A als Ausgangspunkt ein!

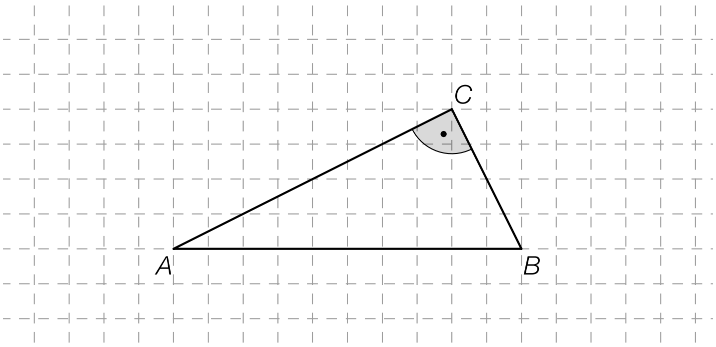
Leitfrage:

Für einen Punkt D gelten beide nachstehend angeführten Bedingungen.

(1) Es existiert ein Parameterwert $t \in \mathbb{R}$, für den $D = C + t \cdot \vec{v}$ gilt.

(2) Für die beiden Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BD}$ gilt: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

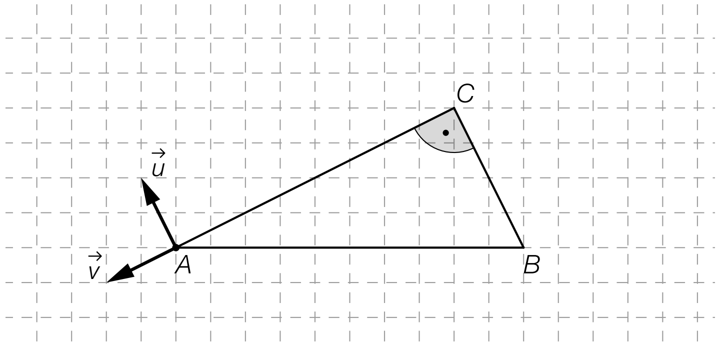
Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Punkt D ein und geben Sie den Wert des Parameters t an! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!



Lösung zur Aufgabe 1

Rechtwinkeliges Dreieck

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

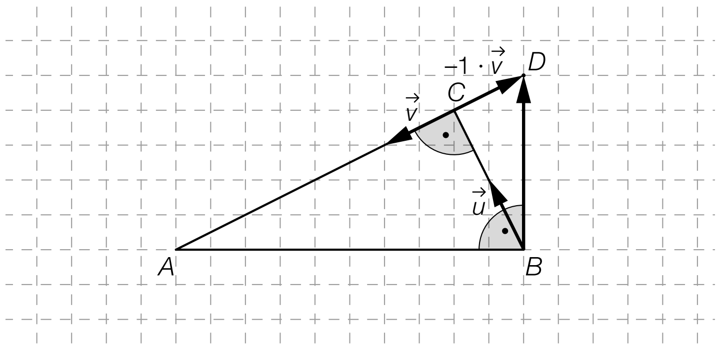
Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ korrekt eingezeichnet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Vorgehensweise:

Aus (1) folgt, dass der Punkt D auf der durch A und C verlaufenden Geraden liegt.

Aus (2) folgt, dass die beiden Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BD}$ aufeinander normal stehen.



Aus der Zeichnung kann $t = -1$ abgelesen werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Punkt D korrekt eingezeichnet, der richtige Parameterwert angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Aufgabe 2

Zentripetalkraft

Ein Körper mit der Masse $m > 0$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v > 0$ auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r > 0$. Der Betrag der Kraft F, die dabei auf den Körper wirkt, kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

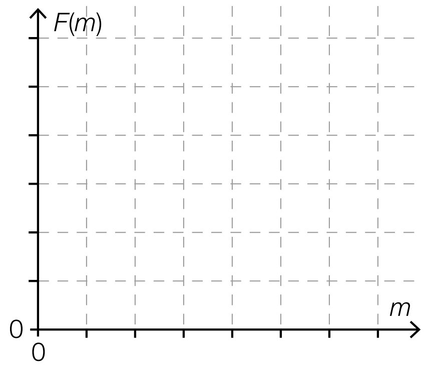
Aufgabenstellung:

Geben Sie jeweils an, wie sich die Verdoppelung einer der Größen m, v bzw. r auf den Betrag der Kraft F auswirkt, wenn die beiden anderen Größen konstant sind!

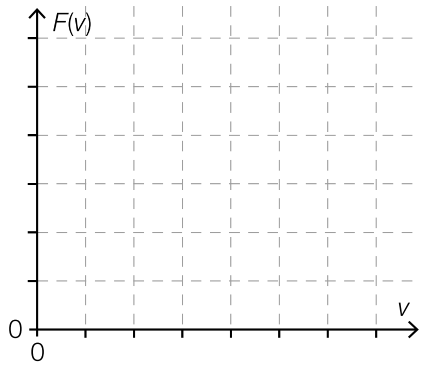
Leitfrage:

Stellen Sie mögliche Graphen der folgenden Funktionen jeweils in dem entsprechenden nachstehenden Koordinatensystem dar!

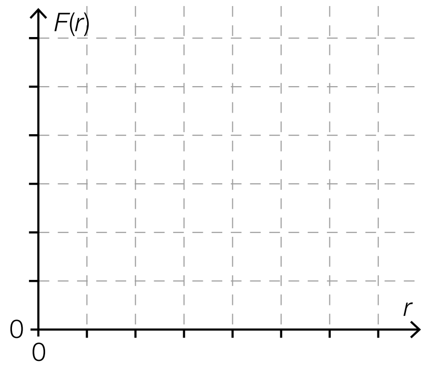
$F(m)$ mit v, r konstant



$F(v)$ mit m, r konstant



$F(r)$ mit v, m konstant



Geben Sie für jede der Funktionen an, wie z jeweils zu wählen ist, damit die Graphen Darstellungen von Funktionen der Art $f(x) = a \cdot x^z + b$ sind!

Lösung zur Aufgabe 2

Zentripetalkraft

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wenn m verdoppelt wird (und v und r konstant sind), so wird der Betrag von F ebenfalls verdoppelt.

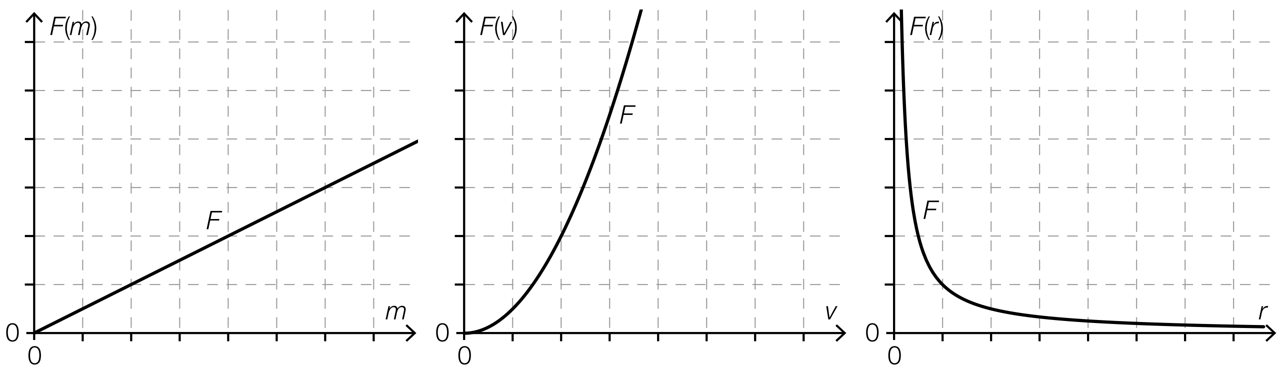
Wenn v verdoppelt wird (und m und r konstant sind), so wird der Betrag von F vervierfacht.

Wenn r verdoppelt wird (und v und m konstant sind), so wird der Betrag von F halbiert.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn jeweils die richtige Änderung der Kraft F angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



$z = 1$ $z = 2$ $z = -1$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der drei Funktionen ein möglicher Graph korrekt skizziert und z jeweils richtig angegeben wird.

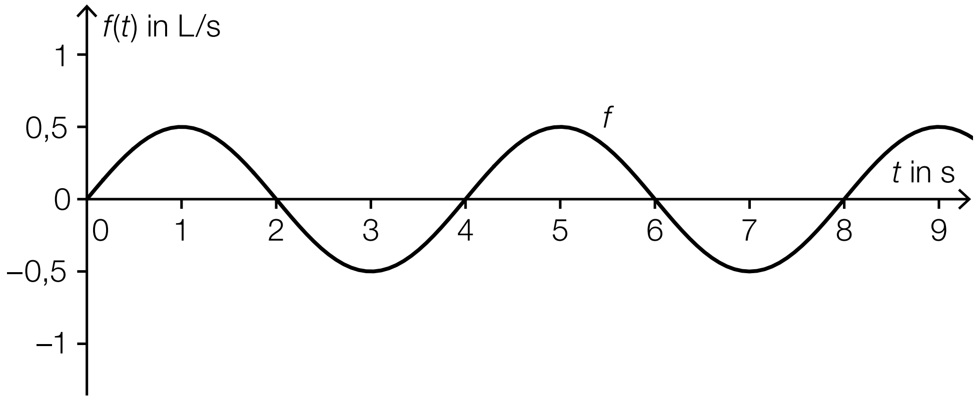
Aufgabe 3

Atemstromstärke

Unter der sogenannten *Atemstromstärke* versteht man die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge in Abhängigkeit von der Zeit t. Sie wird in Litern pro Sekunde (L/s) angegeben und ihr Wert ist während des Einatmens positiv.

Die Atemstromstärke kann für eine ruhende Testperson durch eine Sinusfunktion f mit der Gleichung $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ modelliert werden. Dabei gibt $f(t)$ die Atemstromstärke t Sekunden nach dem Beobachtungsbeginn ($t = 0$) an.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion f für eine ruhende Testperson dargestellt.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Werte von a und b der Funktion f!

a = ____

b = ____

Leitfrage:

Geben Sie die Periodenlänge der Funktion f an und deuten Sie diesen Wert im Hinblick auf den Atemvorgang!

Geben Sie an, zu welchen Zeitpunkten $t \in [0\text{ s}; 9\text{ s}]$ das Luftvolumen in der Lunge der Testperson maximal ist, und erläutern Sie Ihre Überlegungen anhand der obigen Abbildung!

Geben Sie an, wie sich der Parameter b verändert, wenn die Testperson bei sportlicher Belastung schneller atmet, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 3

Atemstromstärke

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a = 0{,}5$

$\frac{2\pi}{b} = 4 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\pi}{2}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von a und b angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Periodenlänge beträgt 4 s und gibt die Dauer eines Atemzyklus (einmal Ein- und Ausatmen) an.

Das Luftvolumen in der Lunge der Testperson ist zu denjenigen Zeitpunkten maximal, bei denen die Testperson vom Einatmen zum Ausatmen übergeht, also im Intervall [0 s; 9 s] nach 2 s und nach 6 s.

Der Parameter b wird größer, da die Periodenlänge bei schnellerer Atmung kleiner wird.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Periodenlänge angegeben und (sinngemäß) korrekt gedeutet wird und sowohl die Zeitpunkte des maximalen Luftvolumens als auch die Veränderung des Parameters b richtig angegeben und erläutert werden.

Aufgabe 4

Stammfunktion

Für eine Funktion f gilt $f(4) = -4$, die Gleichung ihrer Ableitungsfunktion f' lautet $f'(x) = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an!

Leitfrage:

Die Funktion g ist eine Stammfunktion von f. Der Graph von g und die x-Achse begrenzen eine Fläche der Größe 144 Flächeneinheiten.
Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 4

Stammfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(x) = -x + c$
Wegen $f(4) = -4$ ergibt sich $c = 0$. Also: $f(x) = -x$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung der Funktion f angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Vorgehensweise:

$g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + d \quad \text{mit} \quad d \in \mathbb{R}$

$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2 \cdot d}$

$\int_{-\sqrt{2\cdot d}}^{\sqrt{2\cdot d}} \left(-\frac{1}{2} \cdot x^2 + d\right) \mathrm{d}x = 144 \quad \Rightarrow \quad d = 18$

somit: $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 18$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung der Funktion g angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Aufgabe 5

Augensumme

Zwei „faire“ Spielwürfel, deren Seitenflächen mit den Augenzahlen 1 bis 6 beschriftet sind, werden geworfen. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Die Zufallsvariable X beschreibt dabei die Augensumme.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Augensummen auftreten können und welche Augensumme mit der höchsten Wahrscheinlichkeit auftritt!

Ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit!

Leitfrage:

Ziel eines Spiels ist es, mit beiden Würfeln dieselbe Augenzahl zu würfeln.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ziel bei 100 Würfen mehr als zehnmal erreicht wird!

Lösung zur Aufgabe 5

Augensumme

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Es gibt 11 unterschiedliche Augensummen und die Augensumme mit der höchsten Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme 7.

Diese tritt mit der Wahrscheinlichkeit $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}67~\%$ auf.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl die Anzahl der unterschiedlichen Augensummen als auch die wahrscheinlichste Augensumme samt der dazugehörigen Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\ n = 100$

$P(X > 10) \approx 0{,}9573$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die gesuchte Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben wird.