

# Medikamentenherstellung

Aufgabennummer: B\_368

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Ein Pharmaunternehmen stellt ein Medikament  $E$  aus den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  her, die bei der Produktion zu Zwischenprodukten  $Z_1$  und  $Z_2$  verarbeitet werden.  
Die Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten der Produktion sind im nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt. Die Angaben für jeweils 1 Mengeneinheit (ME) des Zwischenprodukts bzw. für 1 ME des Endprodukts sind in ME zu verstehen.

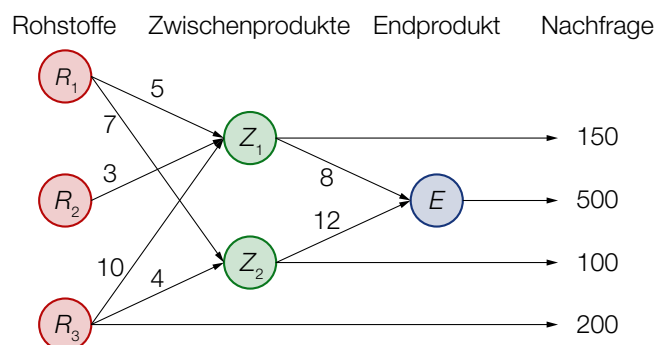


Abbildung 1

- Lesen Sie aus dem Gozinto-Graphen ab, aus welchen Rohstoffmengen 1 ME des Zwischenprodukts  $Z_2$  hergestellt wird.  
– Beschreiben Sie, welche Rohstoffe und Zwischenprodukte direkt nachgefragt werden.  
– Erklären Sie, wie man mithilfe des Gozinto-Graphen die benötigten ME der Rohstoffe für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts berechnen kann.  
– Berechnen Sie den Rohstoffbedarf für 1 ME des Endprodukts  $E$ .
- Erstellen Sie eine quadratische Verflechtungsmatrix  $\mathbf{A}$ , die die im Gozinto-Graphen dargestellte Produktionsverflechtung zwischen Rohstoff, Zwischenprodukt und Endprodukt darstellt.  
– Erstellen Sie aus der in Abbildung 1 dargestellten Nachfrage den zugehörigen Nachfragevektor  $\vec{n}$  für  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $E$ .

Die für die gegebene Nachfrage benötigten ME von  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $E$  können in einem Produktionsvektor  $\vec{x}$  zusammengefasst werden.

- Berechnen Sie unter Verwendung der Gleichung  $\vec{x} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \vec{n}$  den Produktionsvektor  $\vec{x}$  zu dieser Nachfrage.

- c) Der Materialbestand im Lager beträgt 80 000 ME von  $R_1$ , 20 000 ME von  $R_2$  und 76 800 ME von  $R_3$ .

Aus diesem Materialbestand sollen 600 ME des Endprodukts  $E$  hergestellt und keine Rohstoffe oder Zwischenprodukte an den Markt direkt abgegeben werden.

Die Matrix  **$RZ$**  beschreibt diejenigen Rohstoffmengen, die für die Zwischenprodukte benötigt werden. Die Matrix  **$ZE$**  beschreibt diejenigen Mengen von Zwischenprodukten, die für die Herstellung des Endprodukts gebraucht werden.

- Erstellen Sie die Matrix  **$RZ$** .
- Erstellen Sie die Matrix  **$ZE$** .
- Erklären Sie, was mit dem Ausdruck  $(RZ \cdot ZE) \cdot 600$  berechnet wird.
- Berechnen Sie, wie viel von den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  im Lager übrig bleiben.

*Hinweis zur Aufgabe:*

*Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.*

## Möglicher Lösungsweg

- a) 1 ME von  $Z_2$  wird aus 7 ME  $R_1$  und aus 4 ME  $R_3$  hergestellt.

Der Rohstoff  $R_3$  und die Zwischenprodukte  $Z_1$  und  $Z_2$  werden direkt nachgefragt.

Für die benötigte Menge von  $R_1$  werden zunächst alle Pfade ausgewählt, die von  $R_1$  zu  $E$  führen. Die Zahlen längs eines Pfades werden miteinander multipliziert. Die Produkte aller relevanten Pfade werden abschließend summiert. Für die anderen Rohstoffe wird dieser Vorgang wiederholt.

$$R_1: 5 \cdot 8 + 7 \cdot 12 = 124$$

$$R_2: 3 \cdot 8 = 24$$

$$R_3: 10 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 128$$

Für 1 ME von  $E$  werden 124 ME von  $R_1$ , 24 ME von  $R_2$  und 128 ME von  $R_3$  benötigt.

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{Nachfrage } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Der Rechenweg für  $\vec{x}$  ohne Matrizen kann mithilfe der angegebenen Gleichung über das folgende lineare Gleichungssystem erfolgen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 \\ x_2 &= 3 \cdot x_4 \\ x_3 &= 10 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 200 \\ x_4 &= 8 \cdot x_6 + 150 \\ x_5 &= 12 \cdot x_6 + 100 \\ x_6 &= 500 \end{aligned} \quad \text{Dabei gilt: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz liefert den Produktionsvektor  $\vec{x}$ :

$$x_1 = 63\,450; x_2 = 12\,450; x_3 = 66\,100; x_4 = 4\,150; x_5 = 6\,100; x_6 = 500$$

Alternativer Rechenweg mit der inversen Matrix:

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 4 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Produktionsvektor } \vec{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 63\,450 \\ 12\,450 \\ 66\,100 \\ 4\,150 \\ 6\,100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{RZ} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{ZE} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Mit dem Ausdruck  $(\mathbf{RZ} \cdot \mathbf{ZE}) \cdot 600$  berechnet man den Bedarf an Rohstoffen für die Nachfrage nach 600 ME von  $E$ .

$$\text{Rohstoffmengen für die Nachfrage: } \left[ \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \right] \cdot 600 = \begin{pmatrix} 74\,400 \\ 14\,400 \\ 76\,800 \end{pmatrix}$$

Von  $R_1$  und  $R_2$  bleiben jeweils 5 600 ME Restbestände übrig,  $R_3$  wird zur Gänze aufgebraucht.

# Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

**Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:**

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie

**Nebeninhaltsdimension:**

- a) —
- b) —
- c) —

**Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:**

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

**Nebenhandlungsdimension:**

- a) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz, D Argumentieren und Kommunizieren

**Schwierigkeitsgrad:**

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

**Punkteanzahl:**

- a) 4
- b) 4
- c) 4

**Thema:** Wirtschaft

**Quellen:** —