

Ime:	
Razred:	



Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni izpit

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

8. maj 2019

Matematika

1. del in 2. del – naloge



Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge 1. dela in naloge 2. dela (sestavljene iz delnih nalog). Naloge oz. delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na voljo imate skupno 270 minut čistega časa za reševanje.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni listi, ki vam je dan na razpolago. Svoje ime in razred vpišite na čelno stran zvezka z nalogami v za to predvideni polji, ter svoje ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri reševanju vsake delne naloge na delovni papir zapišite njeno oznako.

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano. Rešitev naloge mora biti pri tem jasno razvidna. Če rešitev ni jasno razvidna, ali če so navedene različne rešitve, velja naloga za nerešeno.

Uporabljati smete zbirko formul, dovoljeno za ta termin, kakor tudi dovoljene elektronske pripomočke, v kolikor ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in ni možen dostop do lastnih podatkov v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je na razpolago v izpitnem prostoru in ga je na željo moč dobiti v vpogled.

Oddati je potrebno zvezek z nalogami in vse liste, ki ste jih uporabljali.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, pri katerih je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	☒

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite želeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☒
5 + 5 = 9	☐

Vrednotenje

Naloge v 1. delu se vrednotijo z 0 točkami ali z 1 točko oz. z 0 točkami, z ½ ali z 1 točko. Točke, ki jih je moč doseči na nalogo, so navedene pri vsaki nalogi 1. dela v zvezku za reševanje.

Vsaka delna naloga v 2. delu se vrednoti z 0, z 1 ali z 2 točkama. Z **A** označene zastavitve nalog se vrednotijo z 0 točkami ali z 1 točko.

Dve poti ocenjevanja

- 1) Če ste dosegli **najmanj 16** od 28 točk (24 točk 1. dela + 4 **A**-točke iz 2. dela), velja naslednji ključ ocenjevanja:

zadostno	Genügend	16–23,5 točk
povoljono (zadovoljivo)	Befriedigend	24–32,5 točk
dobro	Gut	33–40,5 točk
zelo dobro	Sehr gut	41–48 točk

- 2) Če ste dosegli **manj kot 16** od 28 točk (24 točk 1. dela + 4 **A**-točke iz 2. dela), vendar **skupaj 24 točk ali več** (iz nalog 1. dela in nalog 2. dela), potem lahko po tej poti dosežete »Genügend« ali »Befriedigend«:

zadostno	Genügend	24–28,5 točk
povoljono (zadovoljivo)	Befriedigend	29–35,5 točk

Od 36 doseženih točk naprej velja ključ ocenjevanja, ki je naveden pod 1).

Izdelek bo ocenjen z »nezadostno«/»Nicht genügend«, če je bilo v 1. delu, ob upoštevanju **A** označenih zastavitev nalog iz 2. dela, doseženih manj kot 16 točk in skupaj manj kot 24 točk.

Veliko uspeha!

Naloga 1

Računske operacije

Za dve celi števili a, b pri $a < 0$ in $b < 0$ velja: $b = 2 \cdot a$.

Zastavitev naloge:

Katera od naslednjih izračunov imata za rezultat vedno naravno število?
S križcem označite oba ustrezna izračuna.

$a + b$	☐
$b : a$	☐
$a : b$	☐
$a \cdot b$	☐
$b - a$	☐

[0 točk / 1 točka]

Naloga 2

Pot zaustavljanja

Učenke in učenci neke šole vožnje se za približni izračun poti zaustavljanja s naučijo naslednjo formulo. Pri tem je v hitrost vozila (s v m, v v km/h).

$$s = \frac{v}{10} \cdot 3 + \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

Pri »vidljivosti prilagojeni vožnji« je potrebno vsak trenutek hitrost izbrati tako, da se je v dosegu pogleda moč ustaviti. »Doseg pogleda« pri tem označuje dolžino odseka poti, ki ga je moč videti.

Zastavitev naloge:

Izračunajte največjo dopustno hitrost pri dosegu pogleda 25 m.

Največja dopustna hitrost znaša $\approx$ _____ km/h.

[0 točk/ 1 točka]

Naloga 3

Reševanje neenačb

Dani sta dve linearni neenačbi.

$$\text{I: } 7 \cdot x + 67 > -17$$

$$\text{II: } -25 - 4 \cdot x > 7$$

Zastavitev naloge:

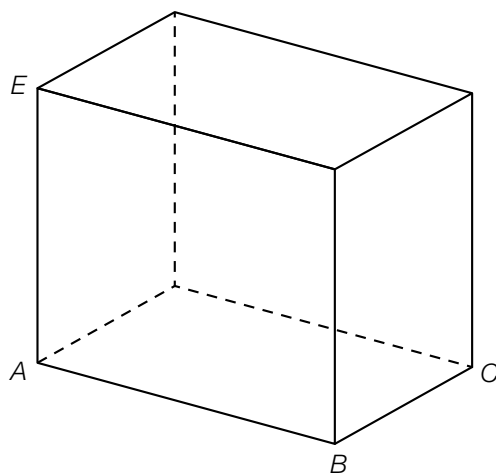
Iščemo vsa realna števila x , ki ustrezajo obema neenačbama.
Navedite množico teh števil kot interval.

[0 točk/1 točka]

Naloga 4

Oglišča kvadra

Na naslednji sliki je predstavljen neki kvader. Označena so oglišča A , B , C in E .



Zastavitev naloge:

Za nadaljnja oglišča R , S in T tega kvadra velja:

$$R = E + \overrightarrow{AB}$$

$$S = A + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$$

$$T = E + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE}$$

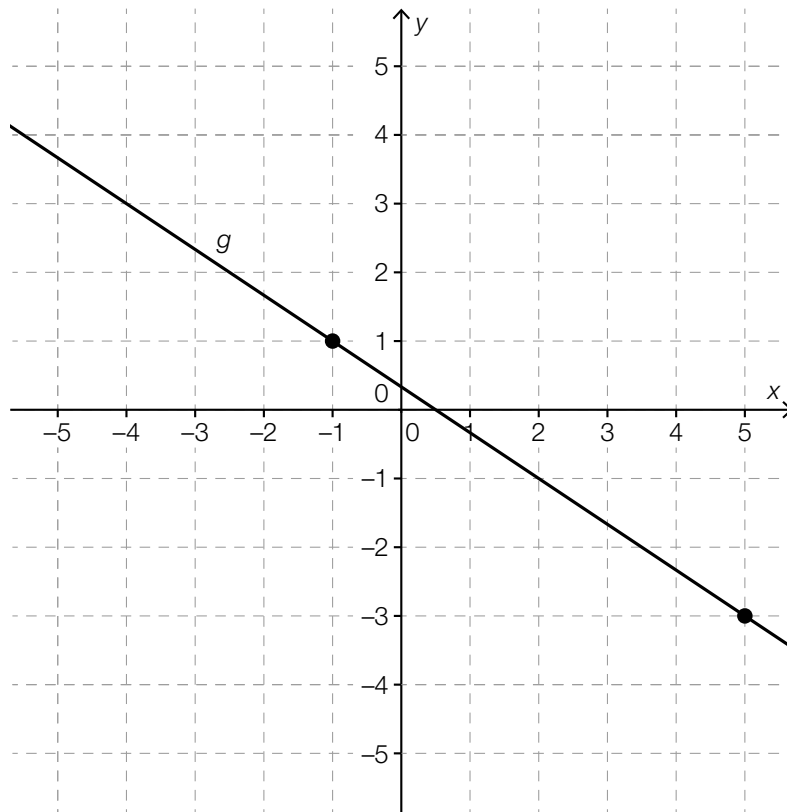
Na gornji sliki jasno razpoznavno označite oglišča R , S in T .

[0 točk/1 točka]

Naloga 5

Parametrična predstavitev premice

Na naslednji sliki je predstavljena premica g . Označeni točki premice g imata celoštevilski koordinati.



Zastavitev naloge:

Izpopolnite naslednjo parametrično predstavitev premice g z navedbo vrednosti za a in b pri $a, b \in \mathbb{R}$.

$$g: X = \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix} \text{ pri } t \in \mathbb{R}$$

$a =$ _____

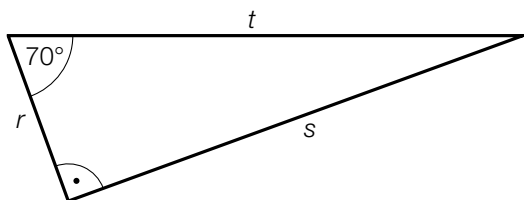
$b =$ _____

[0 točk/1 točka]

Naloga 6

Trikotnik

Dan je naslednji trikotnik z dolžinami stranic r , s in t .



Zastavitev naloge:

Izračunajte razmerje $\frac{r}{t}$ za ta trikotnik.

[0 točk / 1 točka]

Naloga 7

Prerejanje funkcij

Dana je formula $F = \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$ pri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ in $c \neq 0$, $n \neq 0$.

Če privzamemo, da je ena od količin a, b, c, d ali n spremenljiva in druge količine konstantne, potem lahko F interpretiramo kot funkcijo v odvisnosti od količine, ki se spreminja.

Zastavitev naloge:

Kateri od spodaj navedenih prirejanj opisujeta (z ustreznim definicijskim območjem in zalogo vrednosti) neko linearno funkcijo?

S križcem označite obe ustrezni prirejanji.

$a \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$b \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$c \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$d \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$n \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐

[0 točk/1 točka]

Naloga 8

Stopnja brezposelnosti

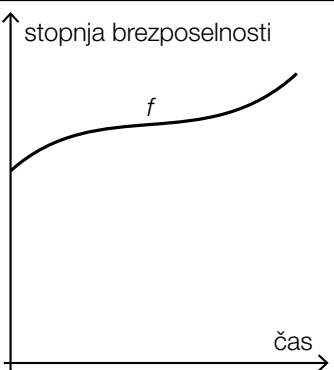
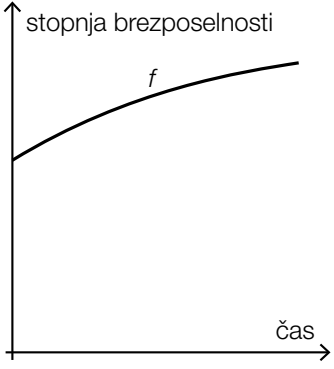
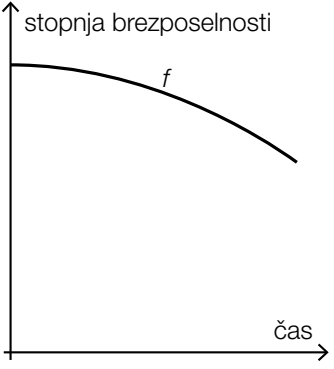
Neki politik, ki želi povzdigniti uspešno politiko na trgu dela neke vladne stranke, pravi: »Prirastek stopnje brezposelnosti se je med celim letom zmanjševal.«

Neki politik opozicije na to pravi: »Stopnja brezposelnosti je med celim letom naraščala.«

Zastavitev naloge:

Razvoj stopnje brezposelnosti med tem letom je moč modelirati s funkcijo f v odvisnosti od časa. Kateri od naslednjih grafov predstavlja razvoj stopnje brezposelnosti med tem letom, če sta izjavi obeh politikov pravilni?

S križcem označite ustrezen graf.

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

[0 točk/1 točka]

Naloga 9

Vodni zbiralnik

V nekem vodnem zbiralniku v obliki kvadra stoji tekočina 40 cm visoko. Ta tekočina v 8 minutah od odprtja iztoka popolnoma izteče.

Linearna funkcija h , pri $h(t) = k \cdot t + d$ opisuje za $t \in [0; 8]$ višino nivoja tekočine v vodnem zbiralniku (v cm), t minut od odprtja iztoka.

Zastavitev naloge:

Določite vrednosti k in d .

$k =$ _____

$d =$ _____

[0 točk / 1 točka]

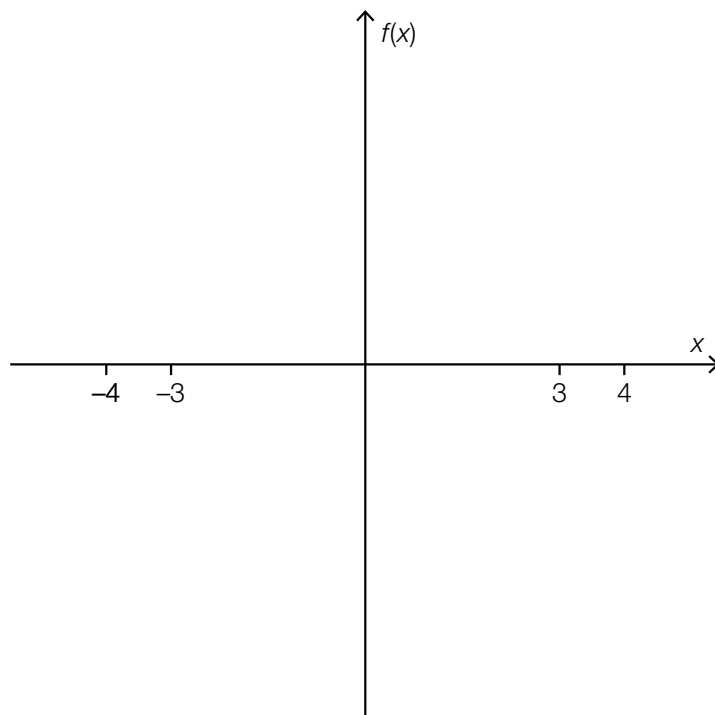
Naloga 10

Potek polinomske funkcije četrte stopnje

Obstajajo polinomske funkcije četrte stopnje, ki imajo natanko tri ničle x_1, x_2 in x_3 pri $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ in $x_1 < x_2 < x_3$.

Zastavitev naloge:

V naslednji koordinatni sistem skicirajte na intervalu $[-4; 4]$ potek grafa ene take funkcije f z vsemi tremi ničlami na intervalu $[-3; 3]$.



[0 točk/1 točka]

Naloga 11

Učinkovina

Zmanjševanje količine učinkovine nekega zdravila v krvi je moč modelirati z neko eksponentno funkcijo.

Po eni uri je bilo razgrajenih 10 % začetne količine učinkovine.

Zastavitev naloge:

Izračunajte kolikšen odstotek začetne količine učinkovine je v krvi še prisoten po skupno štirih urah.

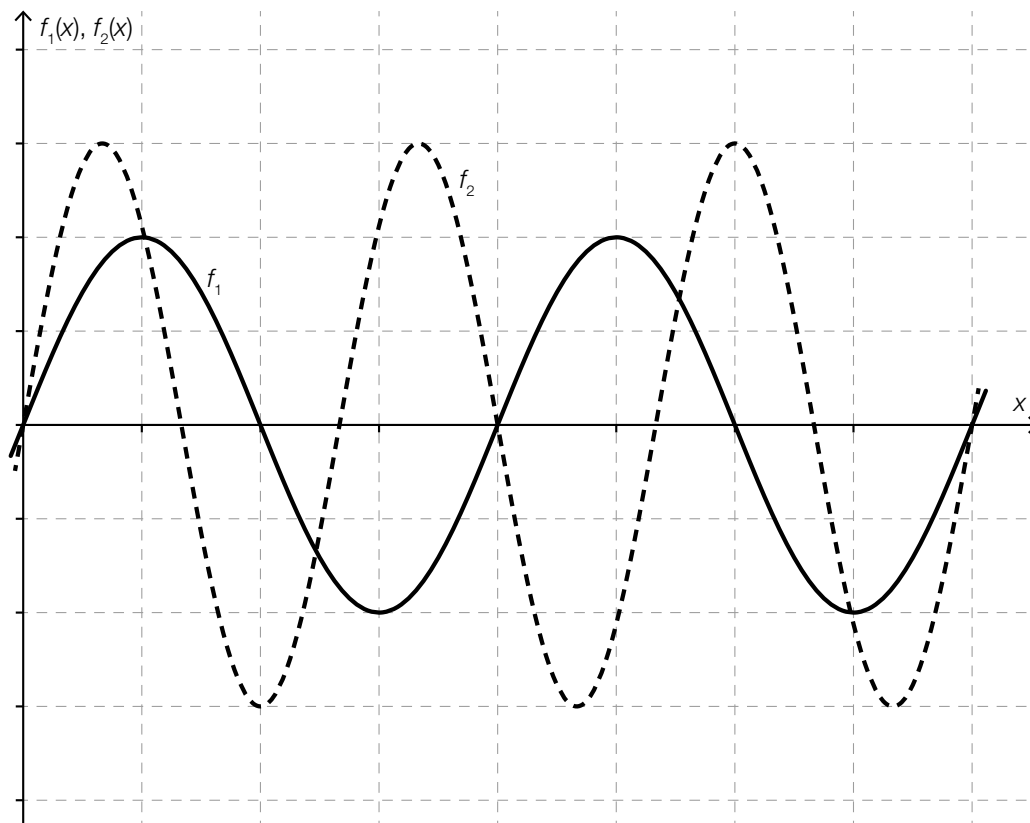
_____ % začetne količine

[0 točk/1 točka]

Naloga 12

Grafa dveh kotnih funkcij

Naslednja slika prikazuje grafa funkcij $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pri $f_1(x) = a_1 \cdot \sin(b_1 \cdot x)$ ter $f_2(x) = a_2 \cdot \sin(b_2 \cdot x)$, za $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$.



Zastavitev naloge:

V naslednjem stavku dopolnite vrzeli v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezen del stavka tako, da nastane pravilna izjava.

Za vrednosti parametrov velja ① in ②.

①	
$a_2 < a_1$	☐
$a_1 \leq a_2 \leq 2 \cdot a_1$	☐
$a_2 > 2 \cdot a_1$	☐

②	
$b_2 < b_1$	☐
$b_1 \leq b_2 \leq 2 \cdot b_1$	☐
$b_2 > 2 \cdot b_1$	☐

[0 točk/½ točke/1 točka]

Naloga 13

Statistika kriminala 2010–2011

Naslednja preglednica podaja koliko primerov kriminala je bilo prijavljenih v posamezni zvezni deželi Avstrije v letih 2010 in 2011.

zvezna dežela	prijavljeni primeri kriminala 2010	prijavljeni primeri kriminala 2011
Gradiščanska (Burgenland)	9 306	10 391
Koroška (Kärnten)	30 192	29 710
Spodnja Avstrija (Niederösterreich)	73 146	78 634
Gornja Avstrija (Oberösterreich)	66 141	67 477
Salzburg (Salzburg)	29 382	30 948
Štajerska (Steiermark)	55 167	55 472
Tirolska (Tirol)	44 185	45 944
Predarlška (Vorarlberg)	20 662	20 611
Dunaj (Wien)	207 564	200 820

Vir: http://www.bmi.gv.at/cms/BK/publikationen/krim_statistik/files/2011/KrimStat_Entwicklung_2011.pdf [24.10.2016].

Zastavitev naloge:

Za Gradiščansko (Burgenland) navedite relativno spremembo prijavljenih kriminalnih primerov v letu 2011 v primerjavi z letom 2010.

[0 točk/ 1 točka]

Naloga 14

Rast kapitala

Nek kapital v vrednosti 100.000 € je naložen z neko fiksno letno obrestno mero. Naslednja preglednica podaja informacijo o razvoju kapitala v prvih treh letih. Pri tem opisuje x_n kapital po n letih ($n \in \mathbb{N}$).

n v letih	x_n v evrih
0	100 000
1	103 000
2	106 090
3	109 272,7

Zastavitev naloge:

Nastavite enačbo za določitev kapitala x_{n+1} izhajajoč iz kapitala x_n .

$x_{n+1} =$ _____

[0 točk/1 točka]

Naloga 15

Vrednosti funkcije odvoda

Dana je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pri $f(x) = 3 \cdot e^x$.

Zastavitev naloge:

Naslednje izjave se nanašajo na lastnosti funkcije f oz. njene funkcije odvoda f' .
S križcem označite obe ustrezni izjavi.

Obstoja mesto $x \in \mathbb{R}$ pri $f'(x) = 2$.	☐
Za vse $x \in \mathbb{R}$ velja: $f'(x) > f'(x + 1)$.	☐
Za vse $x \in \mathbb{R}$ velja: $f'(x) = 3 \cdot f(x)$.	☐
Obstoja mesto $x \in \mathbb{R}$ pri $f'(x) = 0$.	☐
Za vse $x \in \mathbb{R}$ velja: $f'(x) \geq 0$.	☐

[0 točk/1 točka]

Naloga 16

Primitivna (prvotna) funkcija

Dana je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pri $f(x) = a \cdot x^3$ za $a \in \mathbb{R}$.

Zastavitev naloge:

Določite a tako, da bo funkcija $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pri $F(x) = 5 \cdot x^4 - 2$ primitivna (prvotna) funkcije f .

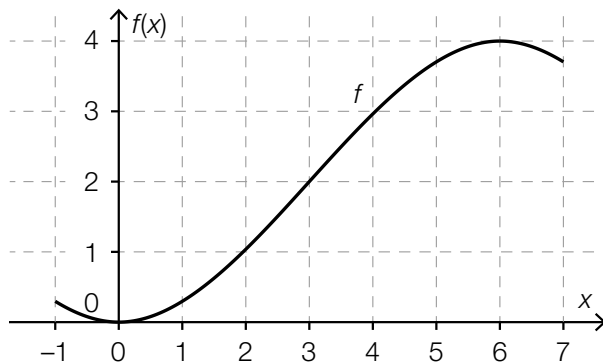
$a =$ _____

[0 točk / 1 točka]

Naloga 17

Polinomska funkcija

Na naslednji sliki je predstavljen graf neke polinomske funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stopnje 3 na intervalu $[-1; 7]$. Vsa mesta lokalnih ekstremov kakor tudi prevojev funkcije f na intervalu $[-1; 7]$, so celoštevilski in jih je moč odčitati iz slike.



Zastavitev naloge:

S križcem označite obe izjavi, ki ustrezata funkciji f .

$f''(3) = 0$	☐
$f'(1) > f'(3)$	☐
$f''(1) = f''(5)$	☐
$f''(1) > f''(4)$	☐
$f'(3) = 0$	☐

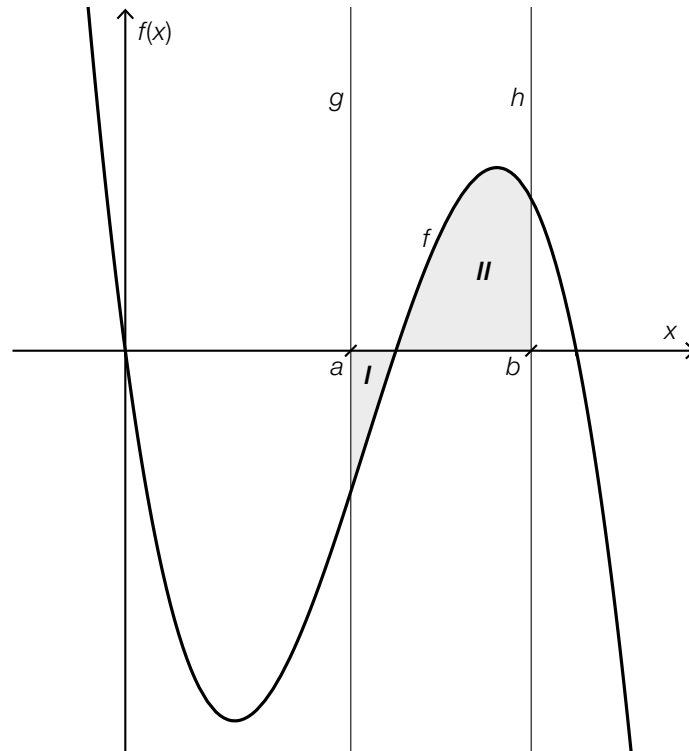
[0 točk/1 točka]

Naloga 18

Ploščine

Spodnja slika prikazuje graf funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in dva označena odseka ploskve.

Graf funkcije f , x -os in premica g z enačbo $x = a$ zapirajo odsek ploskve **I** s ploščino A_1 .
Graf funkcije f , x -os in premica h z enačbo $x = b$ zapirajo odsek ploskve **II** s ploščino A_2 .



Zastavitev naloge:

S pomočjo ploščin A_1 in A_2 navedite določeni integral $\int_a^b f(x) dx$.

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

[0 točk/1 točka]

Naloga 19

Preživljanje prostega časa pri mladostnikih

400 mladostnikov je bilo vprašanih kako preživljajo svoj prosti čas. Od vseh vprašanih jih je 330 navedlo, da so člani nekega športnega društva, 146 jih je navedlo, da igrajo nek glasbeni inštrument in 98 jih je navedlo, da so tako člani športnega društva, kot tudi da igrajo inštrument.

Rezultat te ankete je vnesen v naslednjo preglednico.

	igra inštrument	ne igra inštrumenta	skupaj
član v športnem društvu	98		330
ni član v športnem društvu			
skupaj	146		400

Zastavitev naloge:

Navedite relativno frekvenco (pogostost) h vprašanih mladostnikov, ki niso člani športnega društva in hkrati ne igrajo inštrumenta.

$h =$ _____

[0 točk / 1 točka]

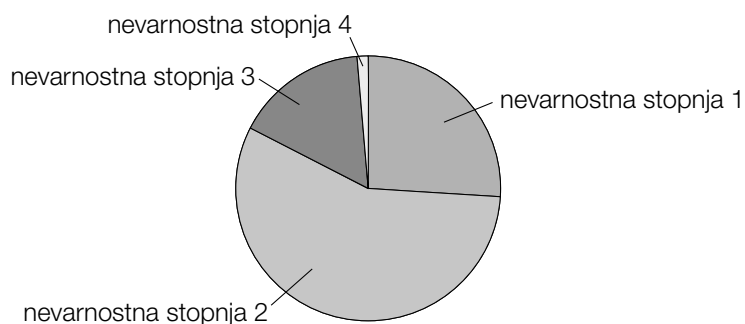
Naloga 20

Nevarnost snežnih plazov

Služba za svarilo pred plazovi v zimskih mesecih dnevno objavlja tako imenovano *poročilo o stanju plazov*. Le-to med drugim vsebuje oceno nevarnosti plazov v skladu s petimi nevarnostnimi stopnjami.

V neki določeni regiji so v zimi 2013/14 vodili zapiske o nevarnostnih stopnjah. V zapiskih so v seznamu podatkov navedeni vsi dnevi, ob katerih je veljala ena od nevarnostnih stopenj 1 do 4. (Za nevarnostno stopnjo 5 v tem seznamu podatkov ni nobenega vnosa, ker ta nevarnostna stopnja v opazovanem obdobju ni nastopila.)

Naslednja slika prikazuje relativni delež dni z neko ustrežno nevarnostno stopnjo.



Zastavitev naloge:

Utemeljite, zakaj mora biti nevarnostna stopnja 2 mediana seznama podatkov (ki je osnova za gornjo sliko).

[0 točk/1 točka]

Naloga 21

Igralna kocka

Pri neki igri se uporablja igralna kocka s številom pik: 1, 2, 3, 4, 5 in 6.

Kocka je vržena tri krat. Za vsak met velja: vsako od števil pik nastopa z enako verjetnostjo kot vsako od drugih števil pik.

Zastavitev naloge:

Navedite verjetnost p za to, da pri tretjem metu vržemo število pik, ki je deljivo s 3.

$p =$ _____

[0 točk/1 točka]

Naloga 22

Pogostost stranskih učinkov

Farmacevtska podjetja so na listku z navodili za uporabo obvezana navesti vse znane stranske učinke nekega zdravila. Navedbe pogostosti stranskih učinkov bazirajo na naslednjih kategorijah:

navedba pogostosti	pojav stranskih učinkov
zelo pogosto	Stranski učinki se pojavijo pri več kot 1 od 10 uporabnikov zdravila.
pogosto	Stranski učinki se pojavijo pri 1 do 10 uporabnikov zdravila od 100.
občasno	Stranski učinki se pojavijo pri 1 do 10 uporabnikov zdravila od 1 000.
redko	Stranski učinki se pojavijo pri 1 do 10 uporabnikov zdravila od 10 000.
zelo redko	Stranski učinki se pojavijo pri manj kot 1 od 10 000 uporabnikov zdravila.
ni znano	Pogostosti stranskih učinkov na osnovi razpoložljivih podatkov ni mogoče oceniti.

Neki določeni stranski učinek je v navodilu za uporabo nekega zdravila kategoriziran z navedbo pogostosti »redko«.

To zdravilo je uporabljalo, neodvisno med seboj, 50 000 oseb. Pri določenem številu teh oseb se pojavi ta določeni stranski učinek.

Zastavitev naloge:

Gornje navedbe pogostosti uporabite kot verjetnosti in ob tej predpostavki določite, najmanj kako veliko je pričakovano število oseb, pri katerih se bo pojavil ta stranski učinek.

[0 točk/1 točka]

Naloga 23

Verjetnost zadetka

Neka košarkarica vrže pri treningu šestkrat zaporedoma žogo na koš. Če žoga pade v koš, govorimo o zadetku. Verjetnost zadetka pri tej igralki znaša pri vsakem metu 0,85 (neodvisno od drugih metov).

Zastavitev naloge:

Štirim dogodkom vsakič priredite tisti izraz (izmed A do F), ki opisuje verjetnost nastopa tega dogodka.

Igralka zadene natanko enkrat.	
Igralka zadene največ enkrat.	
Igralka zadene vsaj enkrat.	
Igralka zadene točno dvakrat.	

A	$1 - 0,85^6$
B	$0,15^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,85^1 \cdot 0,15^5$
C	$1 - 0,15^6$
D	$0,85^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,85^5 \cdot 0,15^1$
E	$6 \cdot 0,85 \cdot 0,15^5$
F	$\binom{6}{2} \cdot 0,85^2 \cdot 0,15^4$

[0 točk/½ točke/1 točka]

Naloga 24

Interval zaupanja

Nekdo želi določiti neznani delež p tistih volivk in volivcev, ki bodo na nekih volitvah glasovali za kandidata A, in naroči nekemu inštitutu za raziskavo javnega mnenja, da ta delež p oceni. V teku tega ocenjevanja je bila izvedena preiskava na 200 vzorcih z vsakič enakim obsegom. Za vsakega od teh vzorcev je bil izračunan ustrezeni 95 %-ni interval zaupanja.

Zastavitev naloge:

Izračunajte pričakovano vrednost tistih intervalov, ki vsebujejo neznani delež p .

[0 točk/1 točka]

Prosim obrnite list.

Naloga 25 (2. del)

Zanesljivost sistema

Sistem je v nadaljevanju neki stroj, ki sestoji iz več sestavnih delov. Vsak sestavni del tega sistema lahko z določeno verjetnostjo funkcioniira pravilno ali pa izpade. Če posamezni sestavni deli tega sistema izpadejo, je od tega, kako je sistem sestavljen, odvisno, ali celotni sistem še naprej funkcioniira, ali pa izpade.

Pod *zanesljivostjo sestavnega dela* razumemo verjetnost za primer, da sestavni del pravilno funkcioniira, torej da ne izpade. To vsakič velja za določeni čas trajanja in pod danimi pogoji.

Pod *zanesljivostjo sistema* razumemo verjetnost za primer, da sistem pravilno funkcioniira, torej da ne izpade. (V modelu je privzeto, da so izpadi sestavnih delov med seboj neodvisni.) Ustrezno nasprotno verjetnost imenujemo verjetnost izpada.

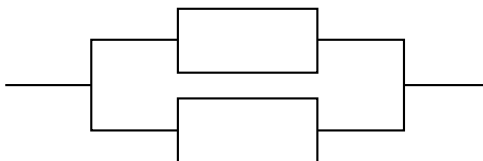
Razlikujemo med dvema preprostima tipoma sistemov:

- Serijski sistemi:



Serijski sistem funkcioniira natanko tedaj, ko funkcioniirajo vsi sestavni deli.

- Paralelni sistemi:



Paralelni sistem funkcioniira natanko tedaj, ko funkcioniira vsaj en sestavni del.

Zastavitev naloge:

- a) Dan je sistem A:



Sestavni del T_1 ima zanesljivost p_1 in sestavni del T_2 ima zanesljivost p_2 .

Opazujte zanesljivost sistema A kot funkcijo z_A od p_1 in p_2 .

A Navedite $z_A(p_1, p_2)$.

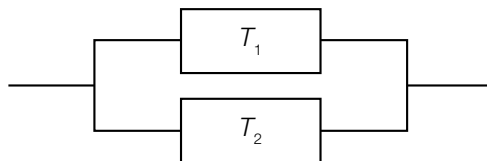
$z_A(p_1, p_2) =$ _____

Pri nekem drugem sistemu, ki je zgrajen na enak način, imata sestavna dela vsakič enako zanesljivost $p_1 = p_2 = 0,7$. Verjetnost izpada tega sistema naj bi se znižala na četrtno aktualne verjetnosti izpada.

Navedite kakšno vrednost mora zavzeti zanesljivost p_{nova} (za vsakega od obeh sestavnih delov).

$p_{\text{nova}} =$ _____

b) Dan je sistem B:



Oba sestavna dela, T_1 in T_2 , imata vsakič enako zanesljivost p .

Opazujte zanesljivost sistema B kot funkcijo z_B od p .

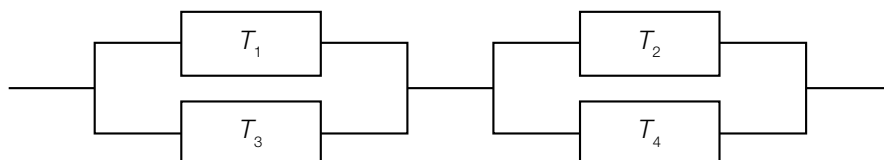
Navedite $z_B(p)$.

$z_B(p) =$ _____

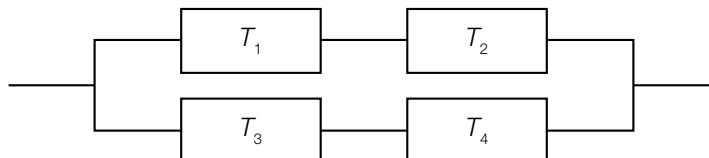
Računsko pokažite, da je funkcija z_B na intervalu $(0; 1)$ strogo monotonno naraščajoča.

c) Dana sta sistema C in D:

Sistem C:



Sistem D:



Vsak od sestavnih delov T_1 , T_2 , T_3 in T_4 ima enako zanesljivost p .

Zanesljivost z_C sistema C je funkcija od p in je opisana s funkcijsko enačbo

$$z_C(p) = p^4 - 4 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2.$$

Določite količnik $\frac{1 - z_C(0,9)}{1 - z_C(0,8)}$ in interpretirajte to vrednost za sistem C.

Zanesljivost z_D sistema D je funkcija od p .

Utemeljite, zakaj velja $z_C(p) > z_D(p)$ za vse $p \in (0; 1)$.

Pri tem uporabite ali funkcijsko enačbo za z_D ali utemeljite na podlagi načina sestave sistemov C in D.

Naloga 26 (2. del)

Preproga iz alg

Na površini nekega 800 m² velikega ribnika se nahaja preproga iz alg, ki se kar naprej širi. V času petih tednov so, vsakič ob koncu tedna, izmerili ploščino te preproge iz alg. Izmerjene vrednosti so navedene v naslednji preglednici. Ob začetku opazovanja je preproga iz alg prekrivala 4 m².

t (v tednih)	0	1	2	3	4	5
$A(t)$ (ploščina preproge iz alg po t tednih v m ²)	4	7	12,25	21,44	37,52	65,65

Rast alg je moč matematično na različne načine modelirati.

Zastavitev naloge:

- a) V prvih petih tednih lahko ploščino preproge iz alg $A(t)$ približno opišemo z eksponentno funkcijo A , ker preproga iz alg prekriva samo mali del ribnika ($A(t)$ v m², t v tednih).

Določite, za kakšen odstotek se ploščina preproge iz alg tedensko poveča, ter navedite funkcijsko enačbo za A .

$A(t) =$ _____

Na koncu petega tedna naj bi po opravljeni meritvi pobrali 30 m² alg. To naj bi ponavljali v razmiku, vsakič redno po enem tednu.

Določite, kolikokrat se ta postopek lahko izvede, ob predpostavki, da se preproga iz alg med postopki pobiranja še naprej povečuje za enak odstotek.

- b) ☐ Izračunajte povprečno tedensko spremembo (v m² na teden) ploščine preproge iz alg, od konca drugega tedna do konca četrtega tedna obdobja opazovanja.

Do sedaj uporabljana eksponentna funkcija opisuje rast alg pri večji prekriti površini le nenatančno, ker se bo, v odvisnosti od velikosti ribnika, rast alg enkrat upočasnila. Nek realistični model upošteva tudi ta vidik.

V odvisnosti od ploščine A preproge iz alg je moč hitrost rasti modelirati s funkcijo w pri $w(A) = k \cdot A \cdot (800 - A)$. Pri tem je A naveden v m²; $k \in \mathbb{R}^+$ je tako imenovani parameter rasti, ki je med drugim odvisen od vrste alg.

Določite tisto ploščino A_1 preproge iz alg, pri kateri je hitrost rasti največja.

$A_1 =$ _____ m²

- c) Obdobje opazovanja je razširjeno od v uvodu opisanih petih tednov naprej. Ploščino preproge iz alg t tednov po začetku opazovanja modeliramo s pomočjo funkcije A_2 pri

$$A_2(t) = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot k \cdot t}} \quad (A_2(t) \text{ v m}^2, t \text{ v tednih}).$$

Navedite vrednost parametra $k \in \mathbb{R}^+$ s pomočjo v preglednici navedene izmerjene vrednosti ob času $t = 5$.

Ob katerem trenutku preproga alg prvič pokrije 90 % površja, če vzamemo za osnovo ta model?

Določite ta trenutek.

Naloga 27 (2. del)

Imena v Avstriji

Statistik Austria, statistični urad Republike Avstrije, že desetletja beleži imena, ki jih starši dajejo svojim otrokom. Pri tem urad opazuje samo prvo ime (če ima otrok več imen). Razen tega se določena imena, ki zvenijo enako ali imajo enak izvor, kot na primer *Sophie*, *Sofie* in *Sofia*, pri tem združijo v eno ime.

Že vrsto let štejeta *Anna* in *Lukas* med najbolj priljubljena imena. Od v letu 2015 rojenih otrok (40 777 deklic, 43 604 dečkov) je dobilo 2 144 deklic ime *Anna* in 1 511 dečkov ime *Lukas*.

Zastavitev naloge:

- a) Za neko statistično raziskavo je po slučajnostnem principu izbranih 30 deklic in 30 dečkov iz rojstnega letnika 2015.

☐ A Izračunajte verjetnost, da je v tem vzorcu najmanj eni deklici ime Anna.

Izračunajte verjetnost, da je v tem vzorcu najmanj eni deklici ime Anna in najmanj enemu dečku ime Lukas.

- b) Leta 1995 je znašal relativni delež desetih najbolj priljubljenih imen za dečke 37,07 %. V letu 2005 je ležal le-ta pri 24,28 %. V letu 2015 je znašal 20,91 %.

Ta razvoj relativnega deleža desetih najbolj priljubljenih imen za dečke, je modeliran s kvadratno funkcijo f pri $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ za $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$. Pri tem podaja t število let od 1995, velja torej $f(0) = 0,3707$.

Določite vrednosti za a , b in c in navedite funkcijsko enačbo funkcije f .

V katerem letu pride relativni delež desetih najbolj priljubljenih imen za dečke prvič pod eno tretjino?

Navedite ustrezno letnico.

- c) Slučajna spremenljivka X modelira število v letu 2015 rojenih deklic, ki so dobile ime *Anna*. Privzemamo, da je binomsko porazdeljena, s parametroma $n = 7\,041$ in $p = 0,0526$.

Izračunajte pričakovano vrednost μ in standardni odklon σ te slučajne spremenljivke X .

$\mu \approx$ _____

$\sigma \approx$ _____

Dejansko je bilo za deklice ime *Anna* v letu 2015 v vseh devetih zveznih deželah najpogostejše izbrano, pri čemer je bil odstotni delež v Gornji Avstriji (Oberösterreich) največji. V Gornji Avstriji (Oberösterreich) je bilo leta 2015 rojenih 7 041 deklic. Od tega jih je 494 dobilo ime *Anna*.

Velja $494 - \mu = c \cdot \sigma$ za nek $c \in \mathbb{R}^+$.

Izračunajte c in pojasnite vrednost c v dani vsebinski povezavi.

Naloga 28 (2. del)

Wings for Life World Run

Wings for Life World Run je množični tek, ki se odvija istočasno v številnih deželah. Posebnost tega teka je, da ni potrebno premagati nobene vnaprej določene dolžine.

Vsi tekači/-ce štartajo naokrog po svetu istočasno, ob 11:00 UTC (koordiniran svetovni čas). Od vsakokratne štartne točke štarta 30 minut kasneje avtomobil, tako imenovani *Catcher-Car*, in pelje po progi. Pri tem se hitrost avtomobila povečuje po nekem vnaprej danem časovnem načrtu. Za vsako osebo, ki sodeluje, se tek konča, ko jo *Catcher-Car* prehiti. Rezultat neke osebe, ki sodeluje, je dolžina tiste poti, ki jo je preletela do trenutka, ko jo je prehitel *Catcher-Car*.

Za hitrosti *Catcher-Car* so bile do leta 2018 predpisane naslednje vrtdnosti (le-te služijo modelno kot osnova za obdelavo naslednjih zastavitev nalog):

čas po uri	hitrost
od 11:30 do 12:30	15 km/h
od 12:30 do 13:30	16 km/h
od 13:30 do 14:30	17 km/h
od 14:30 do 15:30	20 km/h
od 15:30 do 16:30	20 km/h
od 16:30 dalje	35 km/h

Zastavitev naloge:

- a) Neka oseba teče s konstantno hitrostjo, dokler je *Catcher-Car* ne prehiti.

To osebo *Catcher-Car* prehiti med fazo 15 km/h.

Čas teka t te osebe je odvisen od njene hitrosti v .

Navedite izraz, s katerim je moč izračunati t če poznamo v (pri t v h in v v km/h).

$t =$ _____

V letu 2016 je znašala (konstantna) hitrost neke osebe pri tem teku 9 km/h.

Eno leto kasneje je bila njena (konstantna) hitrost pri tem teku za 10 % višja.

Navedite za koliko odstotkov se je s tem povečala dolžina poti, ki jo oseba pretekla, dokler je ni prehitel *Catcher-Car*.

Dolžina pretečene proge se je s tem povečala za ca. _____ %.

- b) Določena, dobro trenirana, oseba med prvo uro teče s konstantno hitrostjo in pri tem potrebuje 5 minut na kilometer. Za tem postane počasnejša. Od tega trenutka dalje (torej za $t \geq 1$) je moč njeno hitrost modelirati s pomočjo funkcije v v odvisnosti od pretečenega časa. Za hitrost $v(t)$ velja:

$$v(t) = 12 \cdot 0,7^{t-1} \text{ pri } t \text{ in h in } v(t) \text{ v km/h}$$

V dani vsebinski povezavi pojasnite izraz $12 + \int_1^b v(t) dt$ pri $b \geq 1$.

Izračunajte čas, ob katerem Catcher-Car to osebo prehit.

Čas: ____ : ____ UTC

- c) Neko skupino tekačic in tekačev Catcher-Car prehit med fazo 20 km/h. Juri iz te informacije sklepa, da je ta skupina, do trenutka, ko jo je Catcher-Car prehitel, pretekla ne manj kot 40 km in ne več kot 88 km, Leo ob tej trditvi meni: »Tvoja izjava je pravilna, ampak jaz bi lahko navedel manjši interval, ki prav tako ustreza.«

☐ A Navedite, če Leova trditev drži, ter utemeljite svojo odločitev.

Na Dunaju je 2017 najhitrejša udeleženka pretekla progo 51,72 km, preden jo je prehitel Catcher-Car.

Izračunajte njeno povprečno hitrost $\bar{v}$!

$\bar{v} =$ _____ km/h

