

Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

maj 2019

Matematika

Kompenzacijski izpit 6
Navedbe za **izpraševalce / izpraševalke**

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka/kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		dosežene točke
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki (ali več) 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke (ali več)

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izpita.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Premice v $\mathbb{R}^2$

Dani sta točki $A = (5 | 1)$ in $B = (1 | 2)$.

Zastavitev naloge:

Premice p , n in s potekajo vsakič skozi točko A in so opisane kot sledi:

- Premica p poteka vzporedno x -osi.
- Premica n poteka pravokotno na x -os.
- Premica s ima vzpon (smerni koeficient) 1.

Za vsako od treh premic navedite ustrezno enačbo.

Nadaljevalno vprašanje:

Premica $g: y = k \cdot x + d$ poteka skozi točko B in ima naklonski kot α .

Navedite k in d v odvisnosti od kota α .

$k =$ _____

$d =$ _____

Navedite tisti kot $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ)$, pri katerem premici g in p nimata presečišča.

Premica g_1 poteka skozi točko B in ima enak naklonski kot kakor premica s .
Ugotovite presečišče S premice n s premico g_1 .

Rešitev naloge 1

Premice v $\mathbb{R}^2$

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možne enačbe:

$$p: y = 1$$

$$n: x = 5$$

$$s: y = x - 4$$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko so navedene pravilne enačbe ali navedene pravilne predstavitve parametrov premic p , n in s . Ekvivalentne enačbe ali parametrične predstavitve je vrednotiti kot pravilne.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$$k = \tan(\alpha)$$

$$d = 2 - \tan(\alpha)$$

Vzpon (smerni koeficient) obeh premic je nič zato velja $\alpha = 0^\circ$.

Velja $g_1: y = x + 1 \Rightarrow S = (5|6)$.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko sta navedena pravilna k in d kakor tudi kot pravi α in presečišče premic g_1 in n .

Naloga 2

Barometrična višinska formula

Povezavo med višino h nad morsko gladino in tam vladajočim zračnim tlakom $p(h)$, je moč približno opisati z barometrično višinsko formulo:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$$

h ... višina nad morsko gladino v metrih (m)

$p(h)$... zračni tlak na višini h v hektopascalih (hPa)

p_0 ... zračni tlak na višini morske gladine (pri $h = 0$); $p_0 > 0$

Zastavitev naloge:

Izračunajte tisto višino h_1 , na kateri znaša zračni tlak le še 80 % p_0 .

Nadaljevalno vprašanje:

Povezavo med višino nad morsko gladino in tam vladajočim zračnim tlakom, je na intervalu $[0 \text{ m}; 3500 \text{ m}]$ moč (v odvisnosti od h) približno opisati tudi z linearno funkcijo f .

Na nek določeni dan so bile ugotovljene naslednje vrednosti:

nadmorska višina v m	zračni tlak v hPa
1 500	840
2 000	790

Navedite funkcijsko enačbo funkcije f tako, da prikazuje izmerjene vrednosti.

Za zgoraj določeno višino h_1 izračunajte razliko (v hPa) med vrednostjo za $p(h_1)$, izračunano z barometrično višinsko formulo, in vrednostjo, izračunano z linearno funkcijo f . Pri svojih izračunih privzemite, da znaša vrednost p_0 1 013 hPa.

Rešitev naloge 2

Barometrična višinska formula

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$$0,8 \cdot p_0 = p_0 \cdot e^{-\frac{h_1}{7991}}$$

$$h_1 \approx 1783 \text{ m}$$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je ugotovljena pravilna višina h_1 .
Tolerančni interval za h_1 : [1 780 m; 1 790 m]

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možna pot reševanja:

$$f(h) = -0,1 \cdot h + 990$$

$$p(h) = 1013 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$$

$$f(1783) = 811,7 \text{ hPa}$$

$$p(1783) \approx 810,4 \text{ hPa}$$

Razlika znaša ca. 1,3 hPa.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je navedena pravilna funkcijska enačba za f in pravilno izračunana razlika obeh funkcijskih vrednosti.
Tolerančni interval za razliko: [1 hPa; 2 hPa]

Naloga 3

Hitrosti spreminjanja

Dana je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pri $f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 1$.

Zastavitev naloge:

Določite diferencialni količnik funkcije f na mestu $x = 1$ in navedite pomen te vrednosti za potek grafa.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite izraz v odvisnosti od parametra a ($a \in \mathbb{R}$ in $a < 3$) za izračun diferenčnega količnika funkcije f na intervalu $[a; 3]$.

Vrednost parametra a določite tako, da bo ta diferenčni količnik enak diferencialnemu količniku funkcije f na mestu $x = 1$.

Rešitev naloge 3

Hitrosti spreminjanja

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$$f'(x) = 2 \cdot x - 2 \Rightarrow f'(1) = 0$$

Možen pomen:

Graf funkcije f ima na mestu $x = 1$ vodoravno tangento.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je diferencialni količnik pravilno določen in (smiselno) pravilno naveden pomen vrednosti.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možen izraz:

$$\frac{f(3) - f(a)}{3 - a} = \frac{2 - (a^2 - 2 \cdot a - 1)}{3 - a} = \frac{-a^2 + 2 \cdot a + 3}{3 - a} (= a + 1)$$

$$-a^2 + 2 \cdot a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko sta navedena pravilni izraz in pravilna vrednost za a .

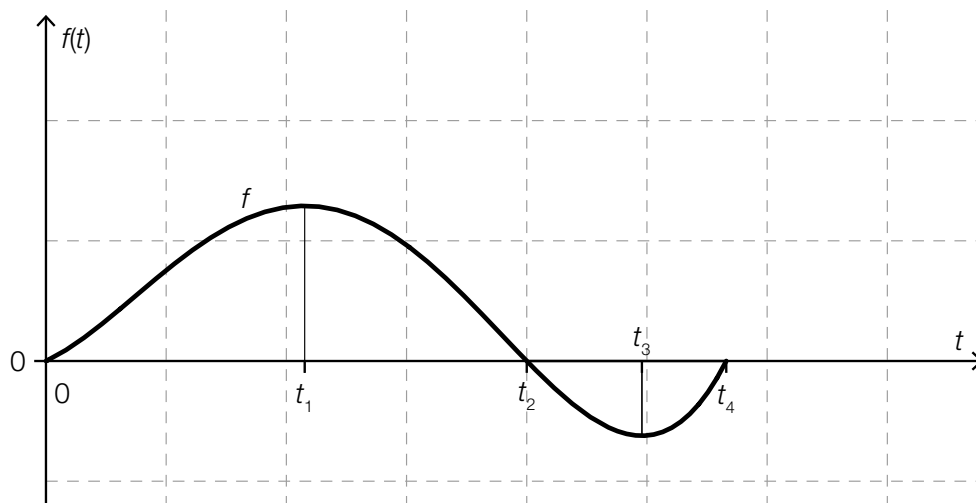
Naloga 4

Deževnica

V nekem sodu za deževnico se nahaja 20 litrov vode.

Od trenutka $t = 0$ se količina vode v sodu spreminja. Funkcija f opisuje trenutno hitrost spreminjanja količine vode, ki je vsebovana v sodu, v odvisnosti od časa ($f(t)$ v litrih na uro, t v urah).

Naslednja slika prikazuje graf funkcije f .



Zastavitev naloge:

Navedite, ob katerem od na gornji sliki označenih časovnih trenutkov t_1 do t_4 je količina vode v sodu največja, ter utemeljite svojo odločitev.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite formulo za izračun količine vode M , ki je v sodu vsebovana ob časovnem trenutku t_4 .

Na gornji sliki markirajte približno tisti časovni trenutek t^* , ki leži na intervalu $[0; t_4)$, ob katerem se v sodu nahaja približno enaka količina vode kot ob časovnem trenutku t_4 .

Pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 4

Deževnica

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Ob časovnem trenutku t_2 je količina vode v cisterni največja, ker je f do tega časovnega trenutka pozitivna, torej količina vode v cisterni do tega časovnega trenutka narašča (za tem pa je funkcija f negativna, torej količina vode v cisterni od tega časovnega trenutka dalje upada).

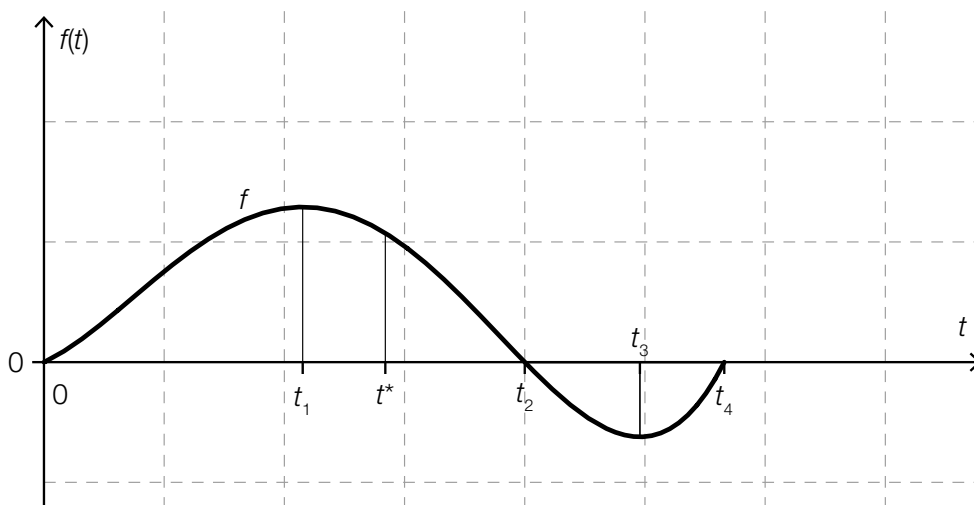
Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je časovni trenutek t_2 pravilno izbran in ta odločitev (smiselno) pravilno utemeljena.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možen formula:

$$M = 20 + \int_0^{t_4} f(t) dt$$



Ploskvi, ki sta na intervalih $[t^*; t_2]$ in $[t_2; t_4]$ omejeni z grafom funkcije f in osjo x , morata biti enako veliki, ker mora količina vode v cisterni v časovnem intervalu $[t^*; t_2]$ narasti za tisto količino, za katero le-ta v časovnem intervalu $[t_2; t_4]$ upade.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je navedena pravilna formula za M in označen pravilni časovni trenutek t^* , kakor tudi (smiselno) pravilno pojasnjen postopek.

Naloga 5

Večstopenjski slučajni poskusi

Pri neki igri na srečo se uporabljajo tri žare, s vsakič po šest krogli. Žara A vsebuje pet belih krogel in eno črno kroglo, žara B vsebuje štiri bele in dve črni krogli in žara C vsebuje tri bele in tri črne krogel. Zmagamo, če izvlečemo belo kroglo.

Victoria pri tej igri na srečo sodeluje in mora takole postopati:

Najprej izbere eno izmed treh žar in nato izvleče iz te žare eno kroglo. Pri tem gre v obeh primerih (pri izbiri žare in izbiri krogel) za slučajno izbiro.

Zastavitev naloge:

Izračunajte verjetnost, da Victoria zmaga.

Nadaljevalno vprašanje:

Pri neki različici te igre na srečo se teh dvanajst belih in šest črnih krogel na novo porazdeli, pri čemer je v vsaki od treh žar zopet po šest krogel.

V prvi žari je sedaj x belih krogel, v drugi žari je sedaj y belih krogel in v tretji žari je sedaj z belih krogel.

Računsko pokažite, da se verjetnost, da Victoria zmaga, ne spremeni.

Rešitev naloge 5

Večstopenjski slučajni poskusi

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$$P(\text{„Victoria zmaga“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je verjetnost pravilno izračunana.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$$P(\text{„Victoria zmaga“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x+y+z}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{6} = \frac{2}{3}$$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je računsko pravilno pokazano, da je verjetnost, da Victoria zmaga, zopet $\frac{2}{3}$.