Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 6
Angabe für **Prüfer/innen**

Wiederholung der Prüfung gemäß § 40 Abs. 3 SchUG bei Erstantritt vor Mai 2018

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^2$

Gegeben sind die Punkte $A = (5|1)$ und $B = (1|2)$.

Aufgabenstellung:

Die Geraden p, n und s verlaufen jeweils durch den Punkt A und sind wie folgt beschrieben:

- Die Gerade p verläuft parallel zur x-Achse.
- Die Gerade n verläuft normal zur x-Achse.
- Die Gerade s hat die Steigung 1.

Geben Sie für jede der drei Geraden eine Gleichung an!

Leitfrage:

Eine Gerade g: $y = k \cdot x + d$ verläuft durch den Punkt B und hat den Steigungswinkel α.

Geben Sie k und d in Abhängigkeit vom Winkel α an!

k = ____

d = ____

Geben Sie denjenigen Winkel $\alpha \in [0°; 90°)$ an, für den die Geraden g und p keinen Schnittpunkt haben!

Die Gerade g_1 verläuft durch den Punkt B und hat denselben Steigungswinkel wie die Gerade s. Ermitteln Sie den Schnittpunkt S der Geraden n mit der Geraden g_1!

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^2$

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Gleichungen:

p: $y = 1$
n: $x = 5$
s: $y = x - 4$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn korrekte Gleichungen oder Parameterdarstellungen der Geraden p, n und s angegeben werden. Äquivalente Gleichungen oder Parameterdarstellungen sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$k = \tan(\alpha)$
$d = 2 - \tan(\alpha)$

Der Anstieg beider Geraden ist null, daher gilt: $\alpha = 0°$.

Es gilt g_1: $y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad S = (5|6)$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn k und d korrekt angegeben werden sowie der Winkel α und der Schnittpunkt der Geraden g_1 und n richtig angegeben werden.

Aufgabe 2

Barometrische Höhenformel

Der Zusammenhang zwischen der Höhe h über dem Meeresspiegel und dem dort herrschenden Luftdruck $p(h)$ kann durch die barometrische Höhenformel näherungsweise beschrieben werden:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in Metern (m)
$p(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)
p_0 ... Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels (bei $h = 0$); $p_0 > 0$

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung an, mit der diejenige Höhe h_1 berechnet werden kann, in der der Luftdruck nur mehr 80 % von p_0 beträgt!

Leitfrage:

Der Zusammenhang zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem dort herrschenden Luftdruck kann im Intervall [0 m; 3 500 m] näherungsweise durch eine lineare Funktion f (in Abhängigkeit von h) beschrieben werden.

An einem bestimmten Tag wurden folgende Werte ermittelt:

Seehöhe in m	Luftdruck in hPa
1 500	840
2 000	790

Geben Sie eine Funktionsgleichung von f so an, dass sie die gemessenen Werte wiedergibt!

Berechnen Sie für eine Höhe von 1 700 m die Differenz (in hPa) zwischen dem durch die barometrische Höhenformel errechneten Wert und dem durch die lineare Funktion f errechneten Wert für den in dieser Höhe herrschenden Luftdruck! Nehmen Sie bei Ihren Berechnungen an, dass der Wert von p_0 1 013 hPa beträgt.

Lösung zur Aufgabe 2

Barometrische Höhenformel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Gleichung:

$0{,}8 \cdot p_0 = p_0 \cdot e^{-\frac{h_1}{7\,991}}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung angegeben wird. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Vorgehensweise:

$f(h) = -0{,}1 \cdot h + 990$

$p(h) = 1\,013 \cdot e^{-\frac{h}{7\,991}}$

$f(1\,700) = 820$ hPa

$p(1\,700) \approx 818{,}9$ hPa

Die Differenz beträgt ca. 1,1 hPa.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Funktionsgleichung von *f* angegeben wird und die Differenz der beiden Funktionswerte richtig berechnet wird.

Aufgabe 3

Wertetabelle einer Polynomfunktion

In der nachstehenden Tabelle sind Funktionswerte einer Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ sowie der Ableitungsfunktionen f' und f'' angegeben.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	–4	0	–2	–4	0
$f'(x)$	9	0	–3	0	9
$f''(x)$	–12	–6	0	6	12

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten derjenigen lokalen Extrempunkte des Graphen von f im Intervall $[0; 4]$, die sich aus den angegebenen Werten eindeutig ablesen lassen, und begründen Sie Ihre Entscheidungen!
Geben Sie für jeden der Extrempunkte an, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt!

Leitfrage:

Begründen Sie, warum der Grad von f mindestens drei ist!

Im gegebenen Fall kann f durch die Gleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.
Geben Sie das Vorzeichen von a und den Wert von d an!

Lösung zur Aufgabe 3

Wertetabelle einer Polynomfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Hochpunkt $H = (1|0)$
mögliche Begründung: $f'(1) = 0$ (Tangentensteigung ist 0) und $f''(1) < 0$ (rechtsgekrümmt bzw. negativ gekrümmt)

Tiefpunkt $T = (3|-4)$
mögliche Begründung: $f'(3) = 0$ (Tangentensteigung ist 0) und $f''(3) > 0$ (linksgekrümmt bzw. positiv gekrümmt)

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Hochpunkt und der Tiefpunkt richtig angegeben und korrekte Begründungen angeführt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Begründung:
Aus der angegebenen Wertetabelle lassen sich genau zwei lokale Extremstellen von f ablesen bzw. lässt sich genau eine Wendestelle von f ablesen. Daher muss der Grad von f mindestens drei sein.

Das Vorzeichen von a ist positiv und der Wert von $d = -4$.

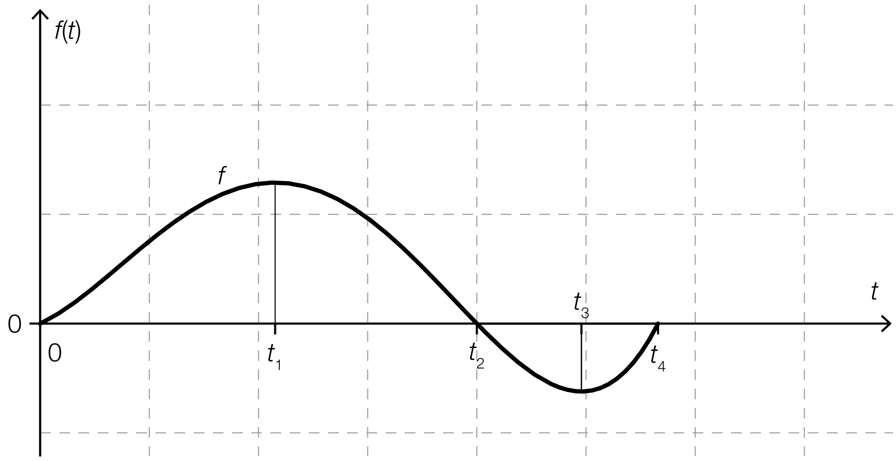
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Begründung für den Grad der Polynomfunktion f angeführt wird sowie das Vorzeichen von a und der Wert d richtig angegeben werden.

Aufgabe 4

Regenwasser

In einer Regentonne befinden sich 20 Liter Wasser.
Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ ändert sich die Wassermenge in der Tonne. Die Funktion f beschreibt die momentane Änderungsrate der in der Tonne enthaltenen Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit ($f(t)$ in Litern pro Stunde, t in Stunden).
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, zu welchem der in der obigen Abbildung gekennzeichneten Zeitpunkte t_1 bis t_4 die Wassermenge in der Tonne am größten ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Geben Sie eine Formel für die in der Tonne enthaltene Wassermenge M zum Zeitpunkt t_4 an!

Markieren Sie in der obigen Abbildung näherungsweise denjenigen im Intervall $[0; t_4)$ liegenden Zeitpunkt t^*, zu dem sich gleich viel Wasser in der Tonne wie zum Zeitpunkt t_4 befindet!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 4

Regenwasser

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Zum Zeitpunkt t_2 ist die Wassermenge in der Tonne am größten, weil f bis zu diesem Zeitpunkt positive Funktionswerte hat, also die Wassermenge in der Tonne bis zu diesem Zeitpunkt zunimmt (danach aber f negativ ist, also die Wassermenge in der Tonne ab diesem Zeitpunkt abnimmt).

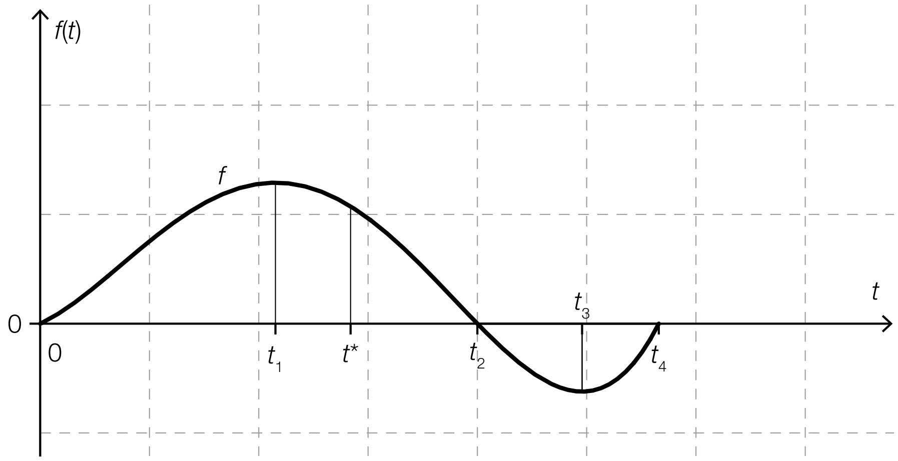
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Zeitpunkt t_2 genannt wird und diese Entscheidung (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Formel:

$M = 20 + \int_0^{t_4} f(t)\,\mathrm{d}t$



Die Flächen, die vom Graphen von f und von der x-Achse in den Intervallen $[t^*; t_2]$ und $[t_2; t_4]$ eingeschlossen werden, müssen gleich groß sein, da die Wassermenge in der Tonne im Zeitintervall $[t^*; t_2]$ um diejenige Menge zunehmen muss, um die sie im Zeitintervall $[t_2; t_4]$ abnimmt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Formel für M angegeben und der korrekte Zeitpunkt t^* markiert sowie die Vorgehensweise (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Aufgabe 5

Mehrstufige Zufallsversuche

Bei einem Gewinnspiel werden drei Urnen mit jeweils sechs Kugeln verwendet. Urne *A* enthält fünf weiße Kugeln und eine schwarze Kugel, Urne *B* enthält vier weiße und zwei schwarze Kugeln und Urne *C* enthält drei weiße und drei schwarze Kugeln. Man gewinnt, wenn man eine weiße Kugel zieht.

Victoria nimmt an diesem Gewinnspiel teil und hat dabei folgendermaßen vorzugehen:
Sie wählt zuerst eine der drei Urnen aus und zieht dann aus dieser Urne eine Kugel. Dabei handelt es sich in beiden Fällen (Auswahl der Urne und Auswahl der Kugel) um eine Auswahl nach dem Zufallsprinzip.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Victoria gewinnt!

Leitfrage:

Bei einer Variante des Gewinnspiels werden die zwölf weißen und die sechs schwarzen Kugeln neu verteilt, wobei in jeder der drei Urnen wieder sechs Kugeln sind. In der ersten Urne sind nun x weiße Kugeln, in der zweiten Urne sind nun y weiße Kugeln und in der dritten Urne sind nun z weiße Kugeln enthalten.
Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die Wahrscheinlichkeit, dass Victoria gewinnt, nicht ändert!

Lösung zur Aufgabe 5

Mehrstufige Zufallsversuche

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P(„\text{Victoria gewinnt}“) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$P(„\text{Victoria gewinnt}“) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x+y+z}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{6} = \frac{2}{3}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn rechnerisch korrekt gezeigt wird, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Victoria gewinnt, wieder $\frac{2}{3}$ ist.