

Ime:	
Razred/Letnik:	



Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

20. september 2019

Uporabna matematika

TAK (HAK)



Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge dela A in naloge dela B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na voljo imate skupno 270 minut čistega delovnega časa.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni list, ki Vam je dan na razpolago. Svoje ime in letnik oz. Vaš razred vpišite na čelno stran zvezka z nalogami v za to predvideni polji, ter Vaše ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri reševanju vsake delne naloge na delovni list navedite njeno oznako (npr. 3d1).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Uporaba potrjenih zvezkov formul oz. zbirke formul za SRDP iz Uporabne matematike in elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računalja ali druge ustrezne tehnologije) je dovoljena, če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in ni možen dostop do lastnih podatkov v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je v izpitnem prostoru na razpolago za vpogled.

Smernice za reševanje

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljena funkcija tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno izpostaviti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami, če je to v navodilu za postopek izrecno zahtevano.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z Vašim imenom.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, kjer je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor » $5 + 5 = 9$ « in nato spremenjen na » $2 + 2 = 4$ «.

$1 + 1 = 3$	☐
$2 + 2 = 4$	☒
$3 + 3 = 5$	☐
$4 + 4 = 4$	☐
$5 + 5 = 9$	☒

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite želeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor » $2 + 2 = 4$ « najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

$1 + 1 = 3$	☐
$2 + 2 = 4$	☒
$3 + 3 = 5$	☐
$4 + 4 = 4$	☒
$5 + 5 = 9$	☐

Velja naslednji ključ ocenjevanja:

44–48 točk	zelo dobro	Sehr gut
38–43 točk	dobro	Gut
31–37 točk	povoljno (zadovoljivo)	Befriedigend
23–30 točk	zadostno	Genügend
0–22 točk	nezadostno	Nicht genügend

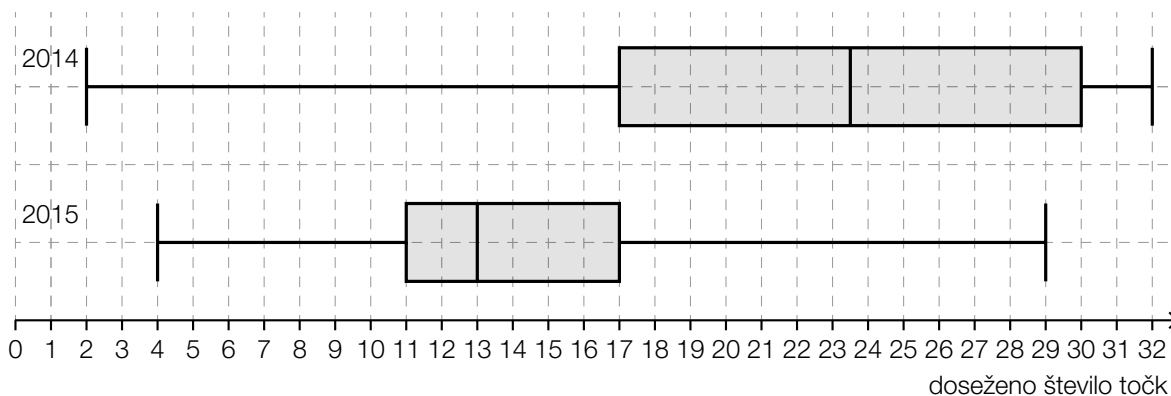
Veliko uspeha!

Naloga 1

Matematična olimpijada

Matematična olimpijada je znano tekmovanje za učence/-ke.

- a) Na državnem tekmovanju matematične olimpijade je v prvem delu moč doseči največ 32 točk. Naslednja box-plot-diagrama prikazujeta doseženo število točk udeležencev/-k v letu 2014 in v letu 2015.



Lara je v obeh letih sodelovala na državnem tekmovanju. V letu 2014 je dosegla 29 točk, v letu 2015 pa 18 točk.

- 1) Utemeljite, da je Lara v letu 2015, v primerjavi z drugimi udeleženci in udeleženkami, dosegla boljši uspeh kot v letu 2014. [1 točka]
- 2) S križcem označite izjavo, ki ne velja. [1 izmed 5] [1 točka]

Interkvartilni razmik v letu 2014 je več kot dvakrat tako velik kot interkvartilni razmik v letu 2015.	☐
V letu 2015 je najmanj 75 % udeležencev/-k doseglo najmanj 17 točk.	☐
Variacijski razmik v letu 2015 je za okoli 17 % manjši kot variacijski razmik v letu 2014.	☐
V letu 2015 je mediana za 10,5 točk manjša kot v letu 2014.	☐
V letu 2015 je najmanj 75 % udeležencev/-k doseglo največ 17 točk.	☐

- b) 8 mladostnikov se je udeležilo državnega tekmovanja matematične olimpijade. Vi bi radi izračunali aritmetično sredino in standardni odklon njihovih števil doseženih točk. Za varianco s^2 se dobi naslednji izračun:

$$s^2 = \frac{1}{8} \cdot \left((16 - 16)^2 + (22 - 16)^2 + (21 - 16)^2 + (30 - 16)^2 + (4 - 16)^2 + (11 - 16)^2 + (9 - 16)^2 + (15 - 16)^2 \right)$$

1) Iz gornjega izračuna odčitajte aritmetično sredino.

[1 točka]

- c) Naslednja tabela pogostosti (frekvenčna tabela) prikazuje doseženo število točk vseh 40 udeležencev/-k državnega tekmovanja matematične olimpijade v letu 2016.

doseženo število točk	število udeležencev/-k
0 – 8	7
9 – 16	22
17 – 24	9
25 – 32	2

1) Izračunajte koliko odstotkov udeležencev/-k je doseglo najmanj 17 točk.

[1 točka]

Naloga 2

Pauliberg

Pauliberg je najmlajši avstrijski ugasli vulkan (ognjenik) in najbolj priljubljena izletniška točka na Gradiščanskem.

- a) Pri Paulibergu se nahaja najdišče velikih kosov vulkanske kamnine. Za naslednje naloge se poenostavljeno izhaja iz tega, da so kosi kroglaste oblike.

Neki določeni kos ima maso 4,5 t.

Gostota kamnine znaša $3\,000\text{ kg/m}^3$.

Masa m je produkt prostornine V in gostote ρ , torej $m = V \cdot \rho$.

- 1) Izračunajte premer tega kosa.

[1 točka]

Za dva taka kosa z enako gostoto in različno maso poznamo vsakič premer:

	kos 1	kos 2
masa v kg	m_1	m_2
premer	1 m	1 dm

- 2) S križcem označite pravilno izjavo. [1 izmed 5]

[1 točka]

m_1 je desetkratnik od m_2 .	☐
m_1 in m_2 sta v razmerju $10\,000 : 1$.	☐
$m_2 = 1\,000 \cdot \pi \cdot m_1$	☐
m_1 in m_2 sta v razmerju $100 : 1$.	☐
$m_1 = 1\,000 \cdot m_2$	☐

- b) Pri Paulibergu je priljubljena pohodniška pot.

Sarah potrebuje za a kilometrov dolgi pohod b ur. Leonie hodi po isti poti, ampak starta 1,5 ure kasneje. Sarah in Leonie prideta na cilj istočasno.

- 1) Iz a in b sestavi formulo za izračun povprečne hitrosti v za Leonie v km/h.

$v =$ _____

[1 točka]

- c) Nedaleč od Pauliberga stoji razvalina gradu Landsee. Le-to je moč najeti za zasebne prireditve.

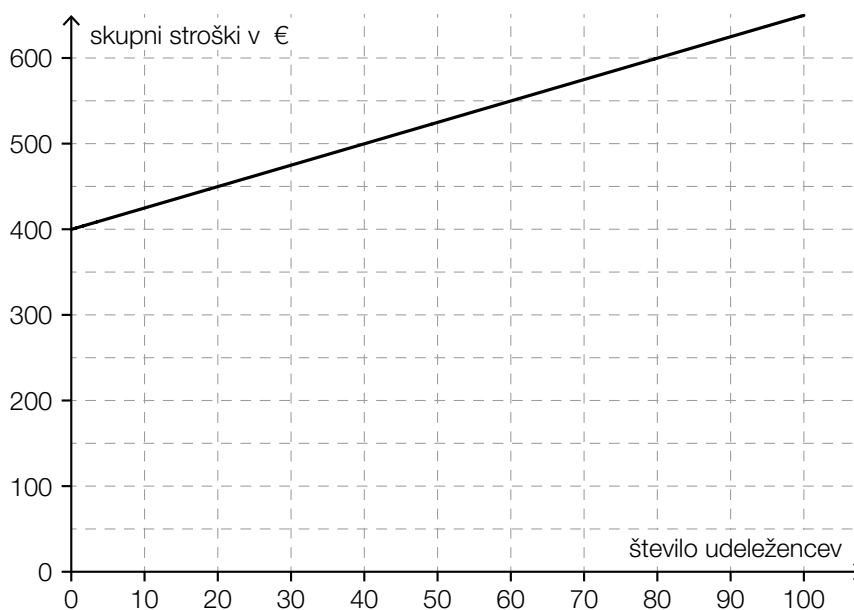
Najem prostora za eno prireditev znaša 450 €. Dodatno je potrebno plačati 1,50 € na udeleženca.

Naj bodo skupni stroški (v €), v odvisnosti od števila udeležencev x , opisani z linearno funkcijo stroškov K .

- 1) Nastavite funkcijsko enačbo za K .

[1 točka]

Najemodajalec predlaga novo oblikovanje cene. Za ponazoritev je sestavljen naslednji diagram:



- 2) Ugotovite, od katerega števila udeležencev dalje so skupni stroški z novim oblikovanjem cene višji kot doslej.

[1 točka]

Naloga 3

Ogrevanje s peleti

Peleti so kurivo iz stisnjene žagovine.

- a) Skupni stroški dobave pelet so sestavljeni iz fiksne osnovne preskrbovalnine in stroškov za dobavljeno količino. Pri tem je treba za vsako tono pelet plačati enako ceno.

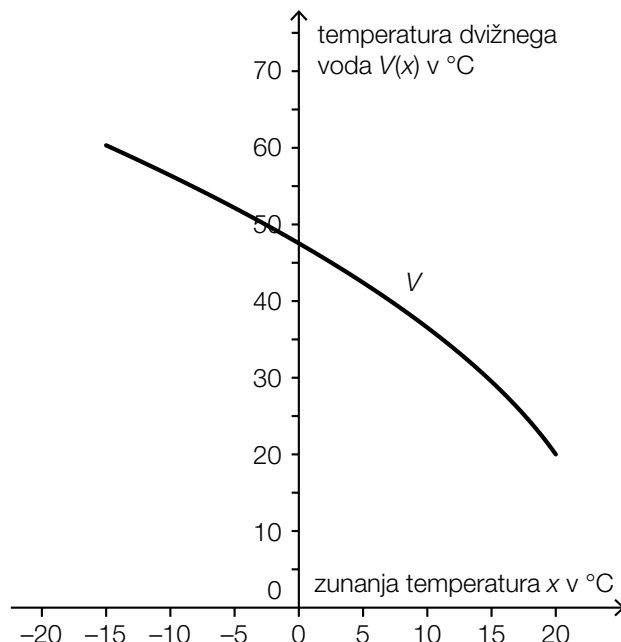
Neki prodajalec pelet ponuja na svoji spletni strani online-računalo. Neka stranka to online-računalo uporabi in si zabeleži skupne stroške za tri različne količine dobave:

količina dobave v tonah	skupni stroški v evrih
2	500
4	960
5,5	1 260

- 1) Dokazljivo preverite, če to online-računalo izračunava skupne stroške tako, kot je opisano zgoraj. *[1 točka]*

- b) Temperatura, na katero se ogreva voda v nekem ogrevalnem sistemu, se imenuje *temperatura dvižnega voda* (*Vorlauftemperatur*). Pri ogrevanju na pelete je temperatura dvižnega voda odvisna od zunanje temperature.

Graf pripadajoče funkcije V imenujemo *ogrevalna krivulja*. Na naslednji sliki je predstavljena ena taka ogrevalna krivulja za temperature od $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $20\text{ }^{\circ}\text{C}$.



- 1) S križcem označite pravilno izjavo za funkcijo V na intervalu $]0; 20[$. [1 izmed 5]

[1 točka]

$V(x) > 0$ in $V'(x) > 0$	☐
$V'(x) > 0$ in $V'''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ in $V'''(x) < 0$	☐
$V'(x) < 0$ in $V'''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ in $V'''(x) > 0$	☐

Funkcijo V na intervalu $[-15; 20]$ nadomestimo z linearno funkcijo. Le-ta naj ima v robnih točkah intervala enaki funkcijski vrednosti kot V .

- 2) V gornjo sliko narišite graf te linearne funkcije. [1 točka]
- 3) Navedite, za koliko stopinj Celzija je temperatura dvižnega voda pri zunanji temperaturi $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ nižja, če se namesto funkcije V uporabi linearno funkcijo. [1 točka]

- c) Pri neki dobavi se peleti na višini 2 m s pomočjo polnilne pipe (cevastega nastavka) vodoravno vpihavajo v skladišče. Viseča zaščitna blazina naj bi pri tem preprečila, da se peleti lomijo, če je hitrost vpihovanja prevelika. Pot, po kateri leti pelet, je moč modelno opisati z grafom naslednje kvadratne funkcije:

$$h(x) = -\frac{5 \cdot x^2}{v_0^2} + 2$$

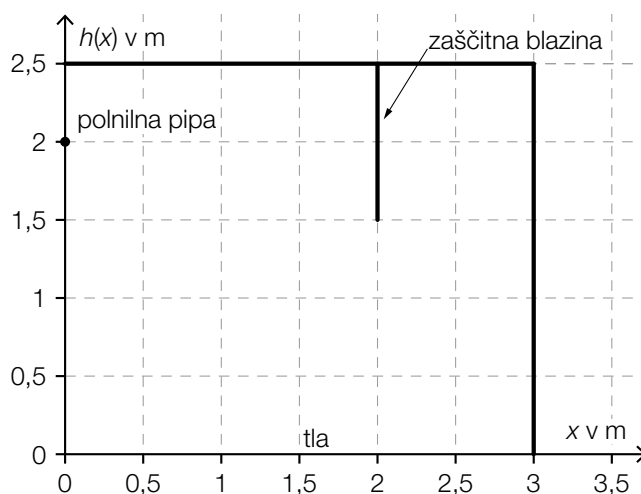
x ... vodoravna oddaljenost od polnilne pipe v m

$h(x)$... višina leta peleta nad tlemi pri oddaljenosti x v m

v_0 ... hitrost vpihovanja v m/s

- 1) V naslednji koordinatni sistem vrišite graf funkcije h za hitrost vpihovanja $v_0 = 4$ m/s.

[1 točka]



Pri neki drugi hitrosti vpihovanja zadene pelet ravno še spodnji konec 1 m dolge zaščitne blazine.

- 2) Določite to hitrost vpihovanja.

[1 točka]

Naloga 4

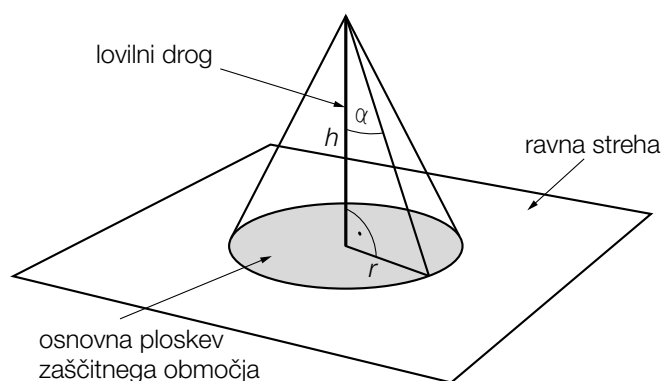
Neurje

- a) V treh različnih mestih – A , B in C – se bodo, glede na napoved vremena, neodvisno drug od drugega, z naslednjimi verjetnostmi popoldan pojavile nevihte:

mesto	A	B	C
verjetnost za nevihto	50 %	80 %	80 %

- 1) Izračunajte verjetnost, da se vsaj v enem od teh treh mest ne bo pojavila nevihta. [1 točka]

- b) Da bi zgradbo zaščitili pred udari strel, se uporabljajo strelovodi. Pri tem se na zgradbo navpično namesti kovinska palica, tako imenovani *lovilni drog*. Najvišjo točko takega lovilnega droga lahko gledamo kot vrh stožčastega zaščitnega območja. Vsi objekti, ki se nahajajo v celoti znotraj tega zaščitnega območja, so zaščiteni pred direktnim udarom strele.



h ... višina lovilnega droga
 α ... zaščitni kot
 r ... polmer osnovne ploskve
zaščitnega območja

- 1) Nastavite formulo za izračun polmera r iz α in h .

[1 točka]

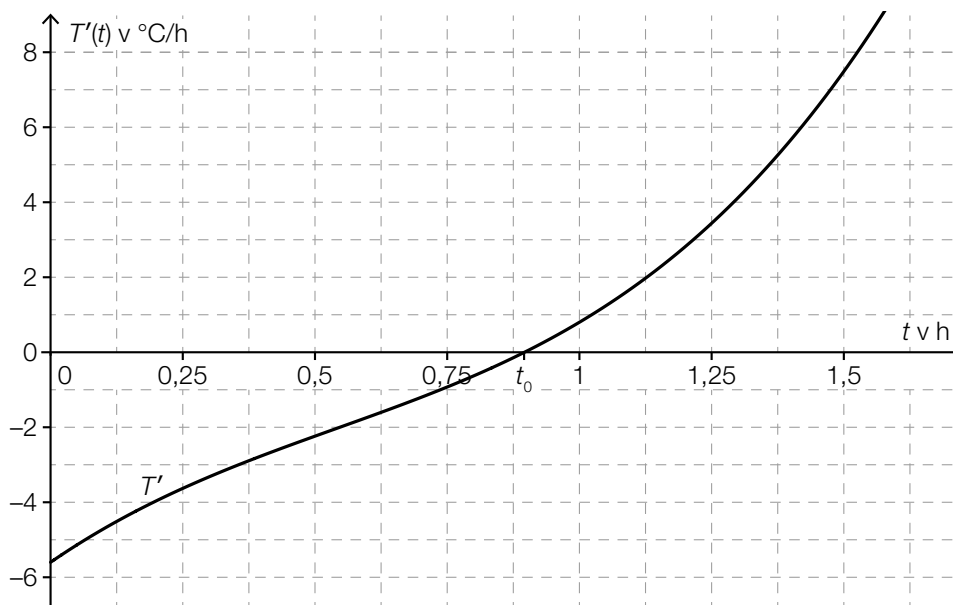
$r =$ _____

Na neki ravni strehi je nameščen 2 m visok lovilni drog. 3 m oddaljena od nožišča lovilnega droga stoji 1,2 m visoka antena, navpično na ravni strehi. Zaščitni kot znaša 77° .

- 2) Dokazljivo preverite, če se ta antena nahaja popolnoma znotraj zaščitnega območja.

[1 točka]

- c) Tekom nekega popoldneva, v katerem je bila nevihta, je bilo ugotavljano spreminjanje temperature. Funkcija T' opisuje trenutno hitrost spreminjanja temperature v odvisnosti od časa t (glej naslednjo sliko).



t ... čas od začetka merjenja v h

$T'(t)$... trenutna hitrost spreminjanja temperature ob času t v $^{\circ}\text{C/h}$

Funkcija T' ima na mestu t_0 ničlo (glej gornjo sliko).

- 1) S križcem označite ustrezno izjavo. [1 izmed 5]

[1 točka]

Vsaka primitivna (prvotna) funkcija funkcije T' ima na mestu t_0 mesto maksimuma.	☐
Vsaka primitivna (prvotna) funkcija funkcije T' ima na mestu t_0 mesto minimuma.	☐
Vsaka primitivna (prvotna) funkcija funkcije T' ima na mestu t_0 ničlo.	☐
Vsaka primitivna (prvotna) funkcija funkcije T' ima na mestu t_0 mesto prevoja (obračaja).	☐
Vsaka primitivna (prvotna) funkcija funkcije T' ima na mestu t_0 pozitiven naklon (smerni koeficient).	☐

Absolutno spremembo temperature v časovnem intervalu $[t_1; t_2]$ je moč izračunati z integralom $\int_{t_1}^{t_2} T'(t) dt$.

- 2) S pomočjo gornje slike približno določite absolutno spremembo temperature v časovnem intervalu $[1,25; 1,5]$. [1 točka]

Naloga 5

Onesnaženost zraka

a) Obremenjenost zraka z žveplovim dioksidom nastane med drugim zaradi zgorevanja kurilnega olja in premoga. Kot zakonska zgornja meja za vsebnost žveplovega dioksida v zraku velja dnevno povprečje $120 \mu\text{g}/\text{m}^3$. V letu 1986 je bila ta vrednost na "črni petek" v Linzu prekoračena za 857 %.

1) Izračunajte vrednost dnevnega povprečja vsebnosti žveplovega dioksida v $\mu\text{g}/\text{m}^3$ v zraku na ta dan v Linzu. [1 točka]

b) V Linzu se je obremenjenost zraka s prahom v časovnem obdobju 1985 do 1996 močno zmanjšala. V letu 1985 je bil zrak v Linzu obremenjen s 11 000 t prahu. V letu 1996 je bilo le še 3 000 t.

V okviru raziskovalnega projekta so spoznali, da je funkcija S , ki podaja obremenjenost s prahom $S(t)$ v tonah, v odvisnosti od časa t v letih, približno linearna.

1) S pomočjo gornjih podatkov nastavite enačbo te linearne funkcije. Izberite $t = 0$ za leto 1985. [1 točka]

2) Glede na ta model izračunajte funkcijsko vrednost za leto 2001. [1 točka]

3) Pojasnite, zakaj izračunana funkcijska vrednost za leto 2001 v dani vsebinski povezavi ni smiselna. [1 točka]

- c) Ogljikov monoksid nastaja pri procesih zgorevanja in je za ljudi strupen.

Izpust ogljikovega monoksida v letu t v neki regiji, je moč opisati približno na naslednji način:

$$c(t) = 1,29 \cdot 0,9659^t$$

t ... čas v letih, $t = 0$ ustreza letu 1990

$c(t)$... izpust ogljikovega monoksida v letu t v tonah

- 1) S križcem označite izjavo, ki velja za ta model. [1 izmed 5]

[1 točka]

Izpust ogljikovega monoksida narašča za 29 % na leto .	☐
Izpust ogljikovega monoksida s časom vedno hitreje upada.	☐
Izpust ogljikovega monoksida linearno upada.	☐
Izpust ogljikovega monoksida upada za 3,41 % na leto.	☐
Izpust ogljikovega monoksida upada za 96,59 % na leto.	☐

Naloga 6 (del B)

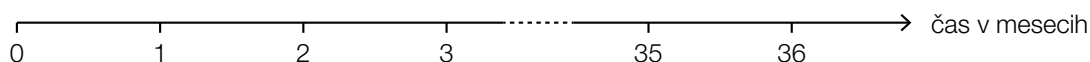
Nakup avtomobila

Gospa Kopecek bi rada kupila novi avto s ceno po ceniku 17.100 €. Pri tem so na izbiro različne možnosti financiranja.

- a) Neki prodajalec zahteva predplačilo 3.420 € in 36 postnumerandnih mesečnih obrokov po 380 €.

1) Ponazorite plačila in ceno po ceniku na naslednji časovni osi.

[1 točka]



Prodajalec zatrjuje, da gre pri tem financiranju za »nič-odstotno-financiranje«. Pod »nič-odstotno-financiranje« razumemo, da niso zaračunane nobene obresti.

2) Pokažite, da je ta trditev pravilna.

[1 točka]

- b) Pri »tretjinskem financiranju« mora gospa Kopecek takoj, na koncu 2. leta in na koncu 3. leta vplačati vsakič enako visok znesek R . Obrestna mera znaša 2 % p. a.

1) Nastavite enačbo za izračun R .

[1 točka]

2) Izračunajte R .

[1 točka]

- c) Pri nekem drugem financiranju se ob koncu 1. leta in ob koncu 2. leta plača vsakič 6.000 €. Obrestna mera znaša 1,5 % p. a.

1) Izpolnite naslednji amortizacijski načrt za leti 1 in 2.

[1 točka]

leto	obresti	razdolžnina	anuiteta	ostanek dolga
0	---	---	---	17.100 €
1				
2				

2) Izračunajte višino ostanka plačila, s katerim je dolg ob koncu 3. leta v celoti odplačan.

[1 točka]

- d) Pri gotovinskem plačilu prodajalec odobri 8 % popust na ceno po ceniku.

1) Izračunajte ceno avtomobila pri gotovinskem plačilu.

[1 točka]

Pri obročnem financiranju zahteva prodajalec predplačilo 3.420 € ter 36 postnumerandnih mesečnih obrokov po 380 €.

Gotovinsko plačilo in obročno financiranje sta pri neki določeni letni obrestni meri enakovredna.

2) Izračunajte to obrestno mero.

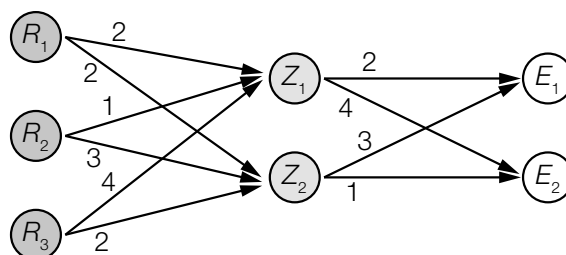
[2 točki]

Naloga 7 (del B)

Dvostopenjski proizvodni procesi

Neko proizvodno podjetje iz 3 surovin R_1 , R_2 in R_3 izdeluje najprej dva vmesna izdelka Z_1 in Z_2 , ter iz le-teh 2 končna izdelka E_1 in E_2 .

V nadaljevanju predstavljeni gozinto graf opisuje prepletenost surovin, vmesnih izdelkov in končnih izdelkov. Navaja količino surovin v KE, ki so potrebne za vsakič 1 KE vmesnih izdelkov. Nadalje navaja količino vmesnih izdelkov v KE, ki so potrebni za vsakič 1 KE končnih izdelkov.



- a) 1) Sestavite matriko $\mathbf{A}$, ki opisuje količinsko potrebo surovin za proizvodnjo vmesnih izdelkov. [1 točka]

Količinsko potrebo vmesnih izdelkov za proizvodnjo končnih izdelkov je moč opisati z matriko $\mathbf{B}$.

- 2) Opišite, kaj se v dani vsebinski povezavi izračuna s produktom matrik $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. [1 točka]

- b) Količinska potreba po surovinah za proizvodnjo končnih izdelkov je opisana z

$$\text{matriko } \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}.$$

Pri nekem proizvodnem procesu je potrebno izdelati 10 KE E_1 in x KE E_2 in velja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 145 \\ 230 \end{pmatrix}$$

- 1) Interpretirajte število 230 v dani vsebinski povezavi. [1 točka]
2) Določite x . [1 točka]

c) Neka druga prepletenost proizvodnje ima naslednje lastnosti:

Matrika **C** opisuje količinsko potrebo surovin za proizvodnjo vmesnih izdelkov.

Matrika **D** opisuje količinsko potrebo vmesnih izdelkov za proizvodnjo končnih izdelkov.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Proizvede se e_1 KE od E_1 in e_2 KE od E_2 .

Surovine R_1, R_2, R_3 imajo cene p_1, p_2, p_3 (v DE/KE).

- 1) S pomočjo matrik in vektorjev nastavite formulo za izračun skupnih stroškov K za ta proizvodni proces.

$$K = \underline{\hspace{10cm}} \quad [1 \text{ točka}]$$

Proizvede se 5 KE od E_1 in 8 KE od E_2 .

- 2) Ugotovite potrebni količini vsakokratnih vmesnih izdelkov. [1 točka]

Naloga 8 (del B)

Revije

- a) Stroške za produkcijo športne revije *Bike and Run* je moč modelirati po zakonu o donosnosti s funkcijo stroškov K :

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$$

x ... proizvodna količina v KE

$K(x)$... stroški pri proizvodni količini x v DE

Pri produkciji 10 KE znašajo stroški 100 DE in mejni stroški 1,5 DE/KE.

- 1) Sestavite obe enačbi, ki ustrezata tej vsebinski povezavi.

[2 točki]

Dalje velja: $K''(10) = -0,1$

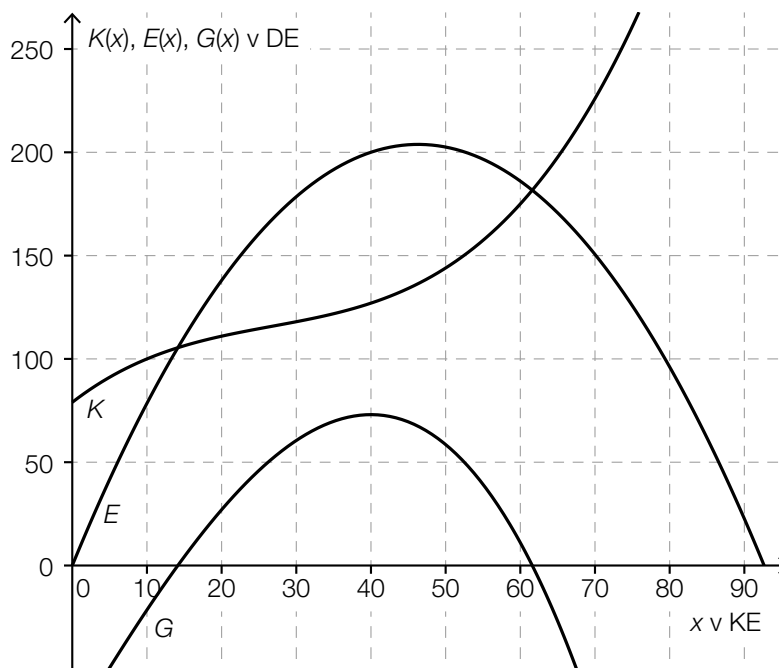
- 2) Interpretirajte predznak pri $K''(10)$ glede na potek grafa funkcije K .

[1 točka]

- 3) Določite koeficiente a , b in c za funkcijo stroškov K .

[1 točka]

- b) Na naslednji sliki so predstavljeni graf funkcije stroškov K , graf funkcije izkupička E in graf funkcije dobička G za revijo *Adventure*.

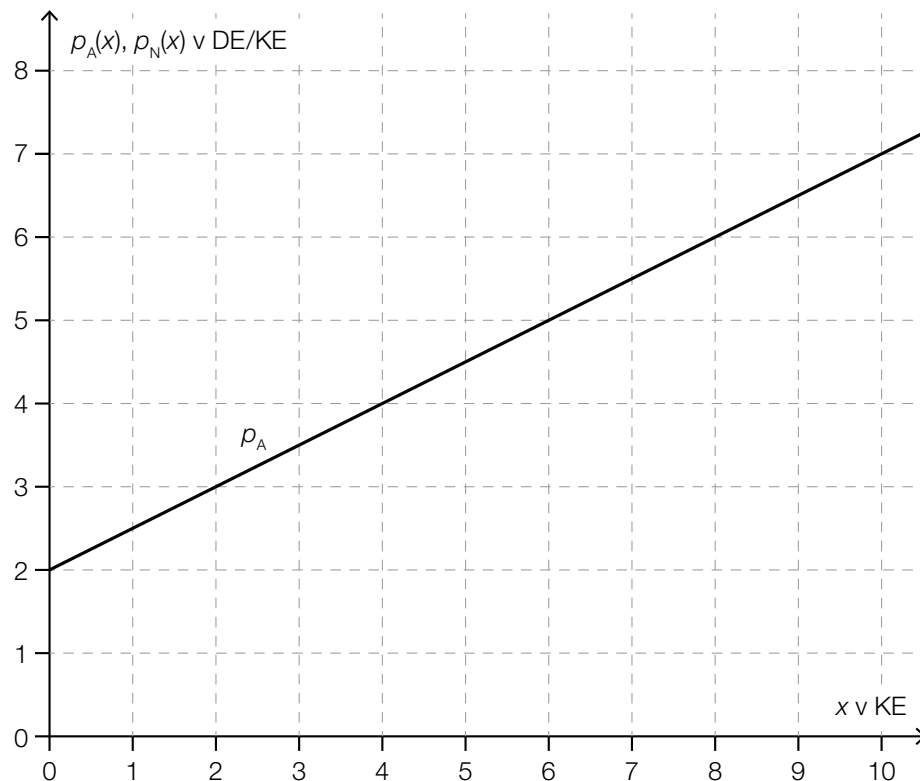


Pri neki določeni količini prodanega blaga je dobiček maksimalen.

- 1) Določite ceno revije *Adventure* pri tej količini prodanega blaga.

[1 točka]

c) Na naslednji sliki je za neki produkt predstavljen graf linearne cenovne funkcije ponudbe p_A .



Glede na povpraševanje je znano: pri ceni 6 DE/KE je moč prodati 2 KE. Pri ceni 3 DE/KE je moč prodati 6 KE.

Cenovna funkcija povpraševanja p_N naj bo modelirana z linearno funkcijo.

- 1) V gornjo sliko vrišite graf funkcije p_N . [1 točka]
- 2) V dani vsebinski povezavi interpretirajte 2. koordinato presečišča p_A in p_N . [1 točka]

d) Za neko linearno cenovno funkcijo povpraševanja poznamo najvišjo ceno p_h in količino zasičenosti x_s .

- 1) S križcem označite ustrezeni izraz za naklon (vzpon) cenovne funkcije povpraševanja. [1 točka]
[1 izmed 5]

$\frac{p_h}{x_s}$	☐
$-\frac{p_h}{x_s}$	☐
$\frac{x_s}{p_h}$	☐
$-\frac{x_s}{p_h}$	☐
$\frac{p_h - x_s}{x_s}$	☐