

Ime:	
Razred/Letnik:	



Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola
(BHS)

10. maj 2016

Uporabna matematika

del A + del B

(sveženj 8)

Navodila za reševanje nalog

Zvezek z nalogami, ki je pred vami, vsebuje zastavitve nalog za del A in del B z različnim številom delnih nalog. Delne naloge lahko obdelujete neodvisno druga od druge. Na voljo imate skupno 270 minut čistega delovnega časa za del A in del B.

Pri reševanju uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč radirati.

Za reševanje uporabljajte izključno zvezek z nalogami in liste za odgovore, ki so vam dani na razpolago. Na prvo stran zvezka z nalogami zapišite svoje ime v za to predvideno polje in na vsak list z odgovori Vašo kodo učenca. Pri odgovarjanju vsake delne naloge navedite oznako le-te (npr. 3c).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Uporaba s strani »Schulbuchaktion« potrjenega zvezka formul in elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računalja ali druge ustrezne tehnologije) je dovoljena, v kolikor ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, itraneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in v elektronski pripomoček niso implementirani lastni podatki. Priročniki za uporabo elektronskih pripomočkov so dopustni v originalni tiskani obliki ali v elektronski pripomoček integrirani obliki.

Oddati je potrebno zvezek z nalogami in vse liste z odgovori, ki jih boste uporabljali.

Smernice za reševanje SRDP iz uporabne matematike

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljene funkcije tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno poudariti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati ter označiti in navesti enote.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitev, opremljene z vašim imenom.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Za vrednotenje velja naslednji ključ:

45–50 točk	Sehr gut
39–44 točk	Gut
32–38 točk	Befriedigend
23–31 točk	Genügend
0–22 točk	Nicht genügend

Razlaga formatov odgovorov

Delne naloge imajo *odprte formate odgovorov*, *polodprte formate odgovorov* ali *konstrukcijske formate*.

Odprti format odgovora: pri tem lahko poteka reševanje naloge na različne načine, npr. z izračunom, na grafični način (z izdelavo sheme), itd.

Polodprti format odgovora: del odgovora je podan, odgovor je potrebno dopolniti z manjkajočim delom (formulo, funkcijo itd.).

Primer:

Dan je pravokotnik s stranicama a in b .

– Nastavite formulo za izračun ploščine A tega pravokotnika.

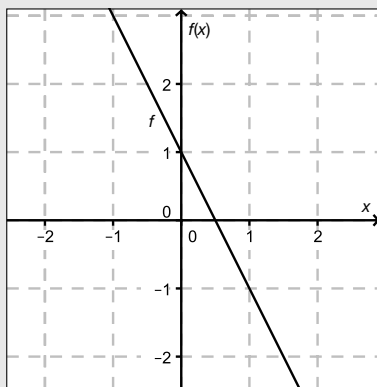
$$A = \underline{a \cdot b}$$

Konstrukcijski format: Dan je diagram ali shema. Zastavitev naloge zahteva dopolnitev s točkami in/ali premicami in/ali krivuljami in/ali vpisovanjem vrednosti oz. označevanjem koordinatnih osi na diagramu oz. na shemi.

Primer:

Dana je linearna funkcija f pri $f(x) = k \cdot x + d$.

– V naslednji koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri $k = -2$ in $d > 0$.

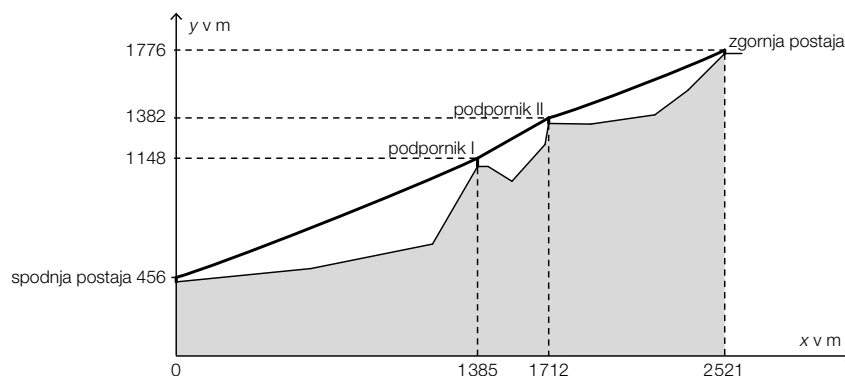


Veliko uspeha!

Naloga 1

Žičnica na Untersberg

Na naslednji sliki je poenostavljeno prikazan potek nosilne vrvi žičnice iz St. Leonharda na Untersberg.



x ... vodoravna oddaljenost od spodnje postaje v metrih (m)

y ... višina nad morsko gladino v m

a) Izvedemo naslednji izračun:

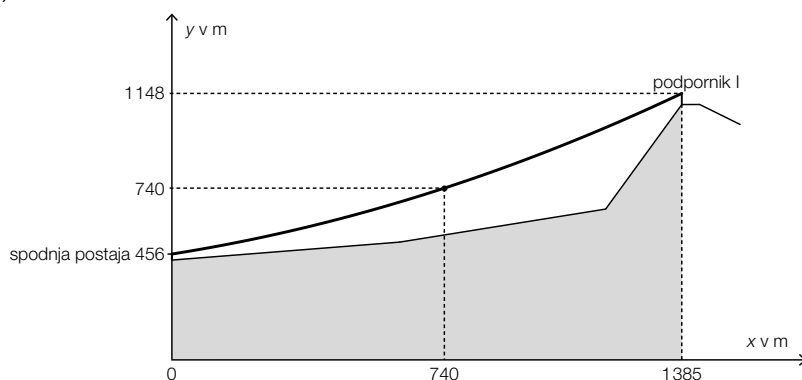
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1776 - 456}{2521 - 0} \approx 0,52$$

– Opišite, kaj predstavlja rezultat v dani vsebinski povezavi. [1 točka]

b) Poenostavljeno predpostavimo, da je potek vrvi med podpornikom I in podpornikom II linearen.

– Z dokazom preverite, če je kot vzpona vrvi na tem odseku manjši od 40° . [1 točka]

c) Zaradi lastne teže se nosilna vrv med spodnjo postajo in opornikom I povesi. Njen potek je lahko približno opisan z grafom kvadratne funkcije z enačbo $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (glej naslednjo sliko).



– Nastavite sistem enačb, s katerim lahko določimo koeficiente a , b in c . [1 točka]

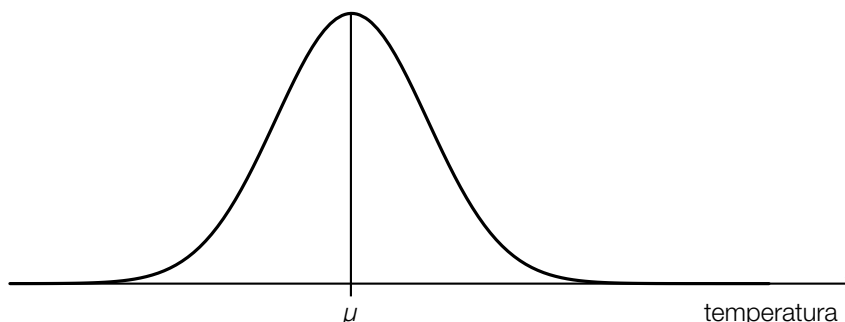
– Določite a , b in c . [1 točka]

Naloga 2

Klimatske spremembe in ozon

- a) Predpostavlja se, da se zaradi klimatskih sprememb dvigajo temperature. Povprečne poletne temperature so na Dunaju približno normalno porazdeljene*.

Graf pripadajoče funkcije gostote verjetnosti je predstavljen v naslednjem diagramu.



– V zgornji diagram skicirajte graf funkcije gostote verjetnosti neke normalne porazdelitve, pri kateri sta tako pričakovana vrednost, kakor tudi standardni odklon, večja kot sta pri dani predstavitvi. [2 točki]

- b) Pri neki merilni postaji na območju južnega polarnega kroga se lahko količina ozona na kvadratni meter v odvisnosti od časa za določeno časovno obdobje približno opiše s funkcijo N :

$$N(t) = N_0 \cdot 0,9917^t$$

t ... čas v letih

$N(t)$... količina ozona na kvadratni meter ob času t

N_0 ... količina ozona na kvadratni meter ob času $t = 0$

– Določite, za koliko % količina ozona na kvadratni meter letno upade. [1 točka]

Rešena je bila enačba $0,5 = 0,9917^t$.

– Določite pomen rešitve te enačbe v dani vsebinski povezavi. [1 točka]

* Primerjaj Kromp-Kolb/Formayer (2005). *Schwarzbuch Klimawandel: Wie viel Zeit bleibt uns noch?* Salzburg: Ecwin, str. 53–55.

Naloga 3

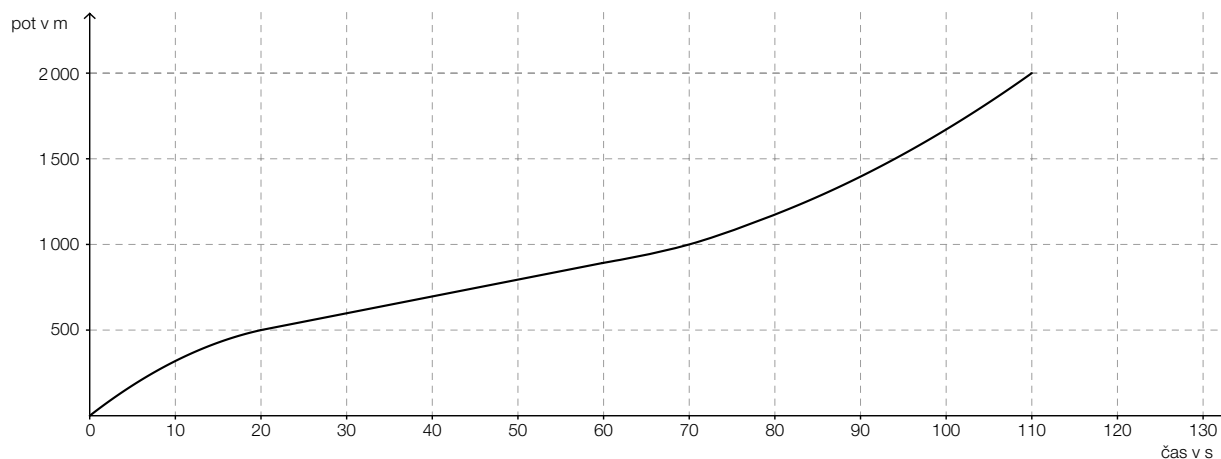
Section-Control

Section-Control je oznaka za sistem nadzorovanja upoštevanja hitrostnih omejitev v cestnem prometu. Pri tem se ne meri hitrost v določeni točki, ampak se določa povprečna hitrost na neki daljši progi.

- a) Na nekem 6 km dolgem območju cestnih del je nastavljen *Section-Control*.
Velja najvišja dovoljena hitrost 60 km/h.
Nekdo trdi: »Če najvišjo dovoljeno hitrost na celotnem območju gradbišča prekoračim za 10 %, potem se moj čas vožnje na odseku gradbišča skrajša za 10 %.«

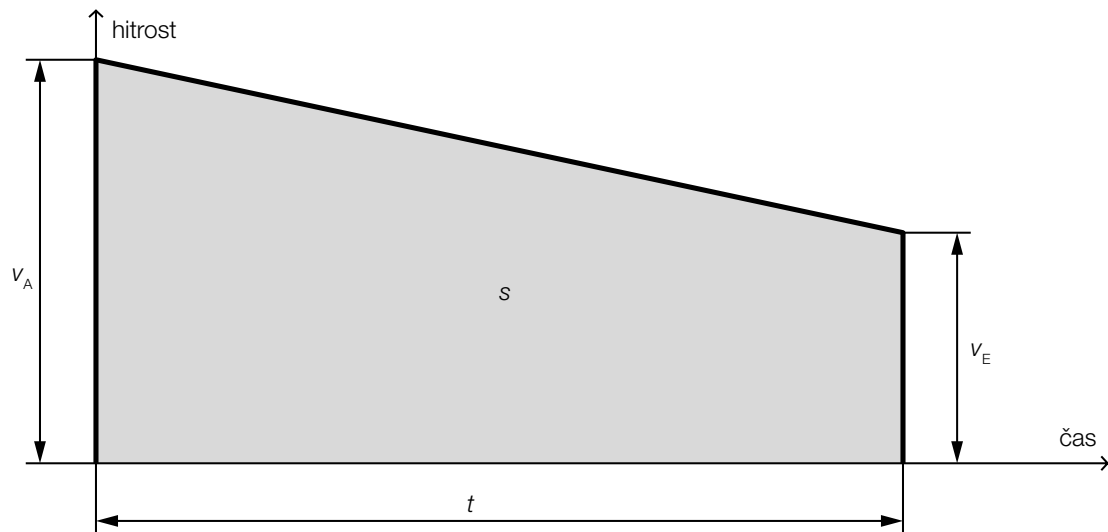
– Dokažite, da je njegova trditev napačna. [1 točka]

- b) V naslednjem pot-čas-diagramu je predstavljena vožnja nekega vozila na nadzorovanem območju.



- Določite povprečno hitrost vozila na prvi polovici poti. [1 točka]
– Utemeljite, da je povprečna hitrost na prvi polovici poti manjša, od povprečne hitrosti na drugi polovici poti. [1 točka]

- c) Neko vozilo vozi skozi območje, ki je nadzorovano s Section-Control. Njegova hitrost na tem odseku linearno pojema.



Končna hitrost v_E , čas vožnje t in prevožena pot s so znani.

- Sestavite formulo za izračun začetne hitrosti v_A tega vozila:

$v_A =$ _____

[1 točka]

Naloga 4

Krvni obtok

Kri oskrbuje organe človeškega telesa s kisikom. Srce črpa kri v krožnem obtoku skozi telo.

- a) V krvi so 3 različne vrste krvnih celic. Odrasel človek ima v telesu približno 5 litrov krvi. Teh 5 litrov vsebuje ca. $25 \cdot 10^{12}$ rdečih krvnih telesc, ca. $15 \cdot 10^{11}$ krvnih ploščic in ca. $3 \cdot 10^{10}$ belih krvnih telesc.

– Izračunajte koliko krvnih celic (rdečih krvnih telesc, krvnih ploščic in belih krvnih telesc skupaj) se nahaja v 1 kubičnem milimetru krvi. [2 točki]

- b) Črpalna moč srca (v litrih na minuto) je lahko v odvisnosti od starosti (v letih) približno opisana z linearno funkcijo P . Pri 20-letnih osebah le-ta znaša 5 litrov na minuto in pri 70-letnih osebah 2,5 litrov na minuto.

– Nastavite funkcijsko enačbo za P . [1 točka]

– Interpretirajte vrednost vzpona te linearne funkcije v dani vsebinski povezavi. [1 točka]

- c) Če opazujemo prečni prerez krvne žile poenostavljeno s krogom, je moč hitrost pretoka krvi v žilah približno opisati s funkcijo v :

$$v(x) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \quad \text{pri } 0 \leq x \leq R$$

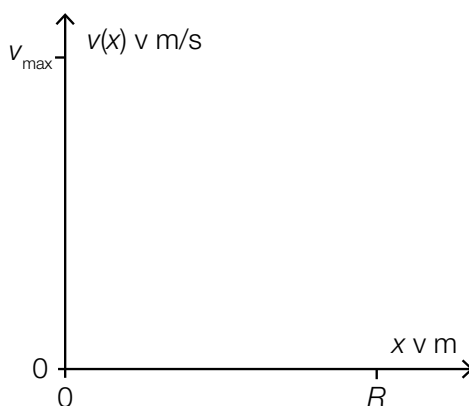
x ... oddaljenost od sredine krvne žile v metrih (m)

$v(x)$... hitrost toka krvi na oddaljenosti x v m/s

$v_{\max}$... maksimalna hitrost krvi v metrih na sekundo (m/s) za $v_{\max} > 0$

R ... polmer krvne žile v m

– Na naslednji sliki skicirajte graf te funkcije v . [1 točka]



Naloga 5

Baterije

Neko podjetje izdeluje baterije.

- a) Prodajalec kupi pri tem podjetju baterije in dobi informacijo, da je glede na izkušnje 2 % dobavljenih baterij defektnih.

Pri neki obsežnejši dobavi odvzame prodajalec slučajni vzorec 40 baterij.

– Izračunajte verjetnost, da sta največ 2 od odvzetih baterij defektni. [1 točka]

- b) Za pošiljanje baterij prodajalcem na drobno, se le-te zapakira po 4 v zavoček. Nek prodajalec na drobno dobi pošiljko a zavočkov po 4.

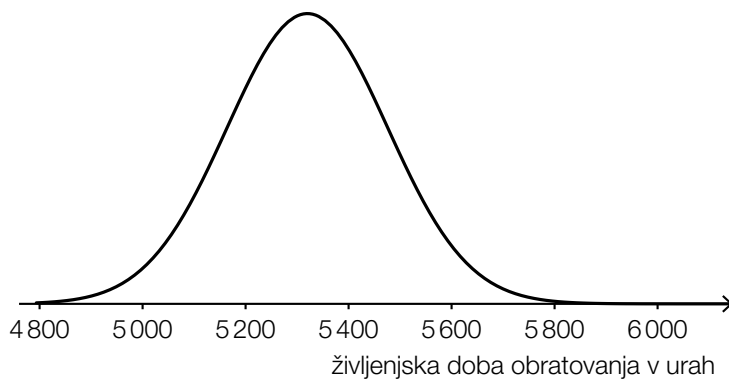
Verjetnost, da je slučajno izbrana baterija defektna, znaša p .

– Opišite kaj se v tej vsebinski povezavi z izrazom $4 \cdot a \cdot p$ izračuna. [1 točka]

- c) Podjetje navaja, da je življenjska doba baterij približno normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo $\mu = 5320$ obratovalnih ur in standardnim odklonom $\sigma = 156$ obratovalnih ur.

– Izračunajte tisti simetrični interval okoli μ , v katerem življenjska doba slučajno izbrane baterije leži z verjetnostjo 90 %. [1 točka]

Na naslednji sliki je predstavljen graf funkcije gostote verjetnosti te normalne porazdelitve.



– Na gornji sliki ponazorite verjetnost, da ima slučajno izbrana baterija življenjsko dobo najdalj 5200 obratovalnih ur. [1 točka]

Naloga 6

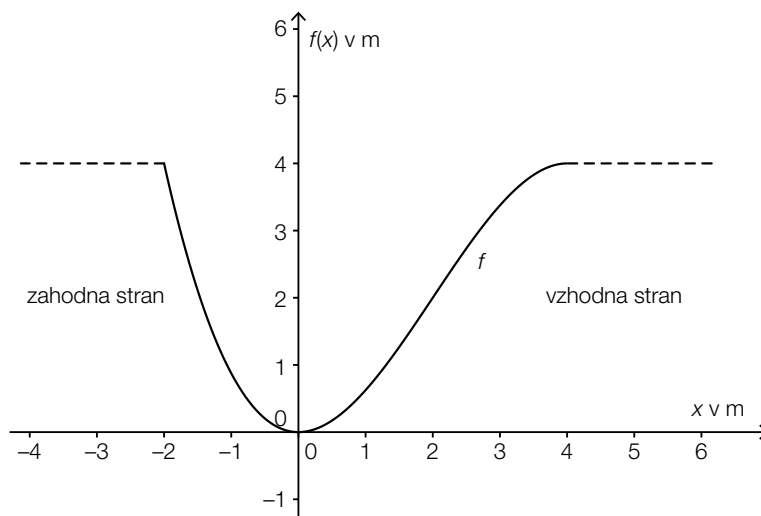
Ob reki

- a) Profil prečnega prereza nekega umetnega rečnega toka je lahko približno opisan z grafom polinomske funkcije f :

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \text{ pri } -2 \leq x \leq 4$$

$x, f(x)$... koordinate v metrih (m)

Graf te funkcije je predstavljen na naslednji sliki.



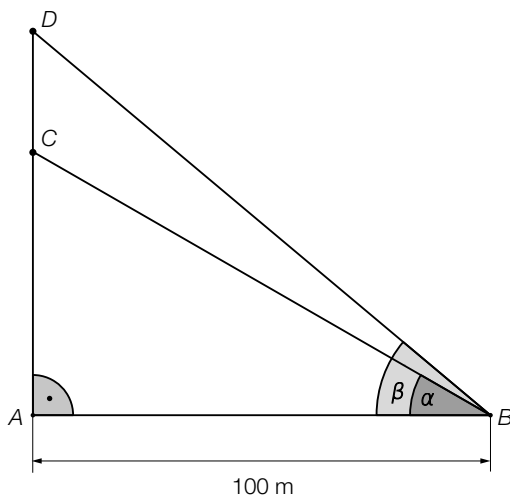
- Izračunajte tisto mesto, na katerem se profil prečnega prereza na vzhodni strani najmočnejše vzpenja. [1 točka]

Dan je naslednji integral:

$$\int_{-2}^4 (4 - f(x)) dx$$

- Na gornji sliki označite tisto ploskev, katere ploščino je moč izračunati s pomočjo tega integrala. [1 točka]

- b) Iz točke B na obali reke, opazimo pod višinskim kotom $\alpha = 30^\circ$ balon, ki se navpično dviga iz točke A . Nekoliko kasneje je balon videti pod višinskim kotom $\beta = 40^\circ$ (glej naslednjo skico).



– Izračunajte dolžino poti $\overline{CD}$. [1 točka]

Naloga 7 (del B)

Športni artikli

- a) Za neki športni artikel je moč proizvodne stroške opisati s pomočjo linearne funkcije K :

$$K(x) = 25 \cdot x + 300$$

x ... število proizvedenih količinskih enot (KE)

$K(x)$... stroški za x KE v denarnih enotah (DE)

Pri tem leži meja kapacitete pri 50 KE.

Produkt se lahko prodaja za ceno 40 DE/KE.

- Pojasnite, zakaj pri tem maksimalnega dobička ne moremo določiti s pomočjo diferencialnega računa. [1 točka]
- Izračunajte maksimalni dobiček. [1 točka]

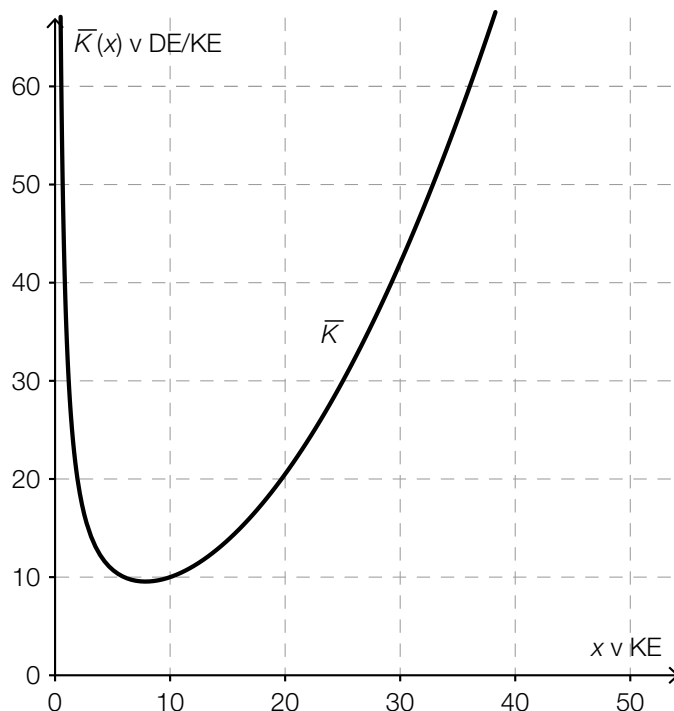
- b) Fiksni stroški za izdelavo določenega športnega artikla znašajo 2 900 DE. Obračaj stroškovne funkcije leži pri 5 DE. Skupni stroški pri proizvodni količini 5 KE znašajo 3 100 DE. Pri proizvodni količini 9 KE znašajo skupni stroški 3 252,80 DE. Potek stroškov naj bo opisan s pomočjo stroškovne funkcije K pri $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

- Nastavite sistem enačb za izračun koeficientov te stroškovne funkcije. [2 točki]
- Izračunajte koeficiente te stroškovne funkcije. [1 točka]

- c) Za funkcijo mejnih stroškov K' nekega drugega športnega artikla velja:
 $K'(x) = 0,15 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 5$.
 Fiksni stroški znašajo 30 DE.

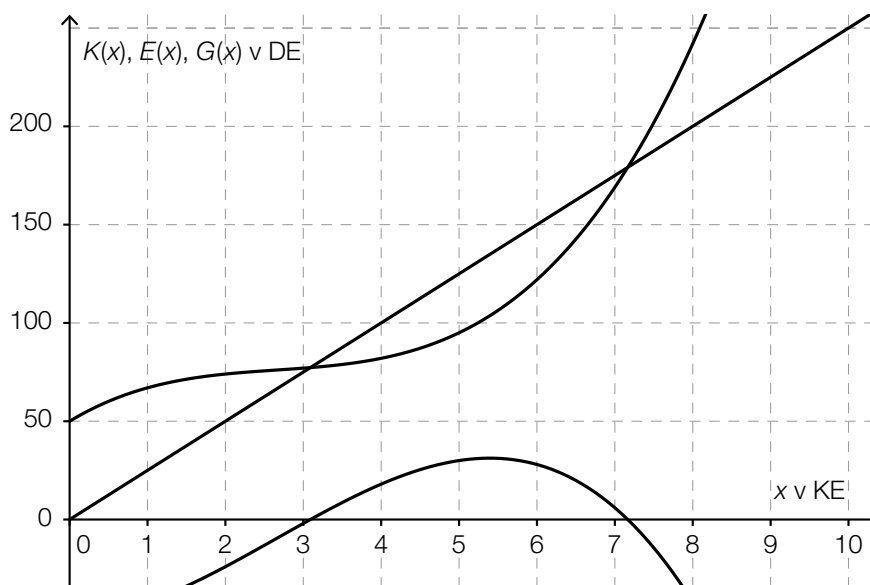
– Določite pripadajočo stroškovno funkcijo K . [1 točka]

Na spodnji sliki je predstavljen graf pripadajoče funkcije povprečnih stroškov na količinsko enoto $\bar{K}$.



– Odčitajte proizvodni optimum. [1 točka]

- d) V naslednjem diagramu so predstavljeni grafi stroškovne funkcije K , funkcije izkupička E in pripadajoče funkcije dobička G .



- Na gornjem diagramu označite te 3 predstavljene grafe. [1 točka]
 – S pomočjo diagrama nastavite enačbo funkcije izkupička E . [1 točka]

Naloga 8 (del B)

Kredit za obnovo

Gospa Eberharter mora za obnovo svojega stanovanja najeti kredit v višini 30.000 €.

- a) Neka znanka ponudi gospe Eberharter zasebno kredit v višini 30.000 € pri obrestni stopnji 2 % p. a.

Gospa Eberharter naj bi ta kredit odplačevala na naslednji način:

8.000 € po enem letu in 2 enako visoka obroka, enega od teh po 3 letih in drugega po 4 letih.

- Predstavite ta odplačila na časovni osi. *[1 točka]*
- Izračunajte višino obrokov. *[1 točka]*
- Pojasnite, zakaj se ta višina obrokov zmanjša, če sta oba obroka odplačana prej. *[1 točka]*

- b) Gospa Eberharter na internetu poizve kakšne so ponudbe bank za kredite v višini 30.000 € z rokom vračila 60 mesecev.

Neka banka ponuja kredit z mesečnim obrokom v višini 559,11 € pri obrestni stopnji 4,58 % p. a.

- Določite pripadajočo mesečno obrestno mero. *[1 točka]*
- Z dokazom preverite, če gre za prenumerandno ali postnumerandno odplačevanje obrokov. *[1 točka]*

- c) Neka banka ponuja gospe Eberharter kredit v višini 30.000 €, ki ga mora odplačati v 10 postnumerandnih polletnih obrokih v višini 3.480 €.

Za ta kredit lahko gospa Eberharter pri deželni vladi zaprosi za anuitetno podporo, to pomeni, da bo 10 % vsakega polletnega obroka prevzela dežela.

- Izračunajte višino polletnih obrokov, ki jih mora plačati gospa Eberharter ob upoštevanju anuitetne subvencije. *[1 točka]*
- Določite efektivno letno obrestno mero, ki bi jo imela gospa Eberharter pri upoštevanju anuitetne subvencije. *[1 točka]*
- Določite višino tiste anuitetne subvencije v evrih, pri kateri bi bila efektivna letna obrestna mera za gospo Eberharter nič odstotna. *[1 točka]*

- d) Gospa Eberharter si za kredit pri neki banki izposluje posebne pogoje. Banka ji v ta namen sestavi anuitetni načrt. Izvleček tega anuitetnega načrta je predstavljen v naslednji preglednici.

semester	obrestni delež	odplačilni delež (razdolžnina)	anuiteta	preostali dolg
0				€ 30.000,00
1	€ 660,00	€ -660,00	€ 0,00	€ 30.660,00
2	€ 674,52	€ 0,00	€ 674,52	€ 30.660,00
3	€ 674,52	€ 5.325,48	€ 6.000,00	€ 25.334,52

- V dani vsebinski povezavi interpretirajte pomen obeh nastopajočih vrednosti v višini 0,00 €. *[1 točka]*

Naloga 9 (del B)

Državni prihodki in odhodki

Statistik Austria med drugim objavlja poročilo o prihodkih in odhodkih države Avstrije (primerjaj Statistik Austria: Struktur der Einnahmen und Ausgaben des Staates, konsolidiert, Jahresdaten – erstellt am 30.09.2013).

- a) Naslednja preglednica navaja odhodke države Avstrije za časovno obdobje od 2006 do 2012 v milijardah evrov:

leto	odhodki v mrd evrov
2006	127,293
2007	133,180
2008	139,494
2009	145,333
2010	150,593
2011	151,881
2012	158,735

- S tem naborom podatkov določite enačbo regresijske premice, ki aproksimira odhodke v odvisnosti od časa t v letih. Za leto 2006 izberite $t = 0$. [1 točka]
- S pomočjo korelacijskega koeficienta ocenite, če predstavlja regresijska premica primeren model za opis razvoja odhodkov. [1 točka]
- Na podlagi tega modela približno izračunajte odhodke v letu 2015. [1 točka]

- b) Pri prihodkih iz dohodkovnih in premoženjskih davščin so bila posebej v letih 2006 do 2009 velika nihanja.

Naslednja preglednica podaja odstotne spremembe prihodkov iz dohodkovnih in premoženjskih davščin glede na vsakokratno predhodno leto.

leto	2006	2007	2008	2009
spmemba	+6,0 %	+10,0 %	+8,1 %	–11,1 %

- Izračunajte povprečno odstotno spremembo prihodkov iz dohodkovnih in premoženjskih davščin na leto v navedenem časovnem obdobju. [1 točka]

- c) Premoženjske prihodke na strani dohodkov za leta 1976 do 2012 lahko približno opišemo z naslednjo kvadratno funkcijo V :

$$V(t) = -0,0027 \cdot t^2 + 0,1732 \cdot t + 0,8381$$

t ... število let od 1976, to pomeni, za leto 1976 velja: $t = 0$

$V(t)$... premoženjski prihodek v letu t v milijardah evrov

- Na osnovi funkcijske enačbe utemeljite, da ima graf te funkcije en maksimum. [1 točka]
- Določite mesto tega maksimuma. [1 točka]
- Izračunajte integral $\int_0^{36} V(t) dt$. [1 točka]
- Interpretirajte vrednost tega integrala v dani vsebinski povezavi. [1 točka]

