

Name:	
Klasse/Jahrgang:	



Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

10. Mai 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 8)



Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Das vorliegende Aufgabenheft enthält die Aufgabenstellungen für Teil A und Teil B mit unterschiedlich vielen Teilaufgaben. Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar. Ihnen stehen insgesamt 270 Minuten an reiner Arbeitszeit für Teil A und Teil B zur Verfügung.

Verwenden Sie für die Bearbeitung einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich das Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Antwortblätter. Schreiben Sie auf der ersten Seite des Aufgabenheftes Ihren Namen in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes Antwortblatt Ihren Schülercode. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung (z. B.: 3c) an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Streichen Sie Notizen durch.

Die Verwendung von durch die Schulbuchaktion approbierten Formelheften und von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähige Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) ist erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und keine Eigendaten in die elektronischen Hilfsmittel implementiert sind. Handbücher zu den elektronischen Hilfsmitteln sind in der Original-Druckversion oder in im elektronischen Hilfsmittel integrierter Form zulässig.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Antwortblätter.

Handreichung für die Bearbeitung der SRDP in Angewandter Mathematik

- Jede Berechnung ist mit einem nachvollziehbaren Rechenansatz und einer nachvollziehbaren Dokumentation des Technologieeinsatzes (die verwendeten Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben werden) durchzuführen.
- Selbst gewählte Variablen sind zu erklären und gegebenenfalls mit Einheiten zu benennen.
- Ergebnisse sind eindeutig hervorzuheben.
- Ergebnisse sind mit entsprechenden Einheiten anzugeben.
- Werden Diagramme oder Skizzen als Lösungen erstellt, so sind die Achsen zu skalieren und zu beschriften.
- Werden geometrische Skizzen erstellt, so sind die lösungsrelevanten Teile zu beschriften.
- Vermeiden Sie frühzeitiges Runden.
- Legen Sie allfällige Computerausdrucke der Lösung mit Ihrem Schülercode beschriftet bei.
- Wird eine Aufgabe mehrfach gerechnet, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen.

Es gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

45–50 Punkte	Sehr gut
39–44 Punkte	Gut
32–38 Punkte	Befriedigend
23–31 Punkte	Genügend
0–22 Punkte	Nicht genügend

Erläuterung der Antwortformate

Die Teilaufgaben haben *offene Antwortformate*, *halboffene Antwortformate* oder *Konstruktionsformate*.

Offenes Antwortformat: Hierbei kann die Bearbeitung der Aufgaben auf unterschiedliche Weise erfolgen, z. B. durch eine Berechnung, durch Erstellung einer Grafik etc.

Halboffenes Antwortformat: Ein Teil der Antwort ist vorgegeben, der fehlende Teil soll ergänzt werden (Formel, Funktion etc.).

Beispiel:

Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b .

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A dieses Rechtecks.

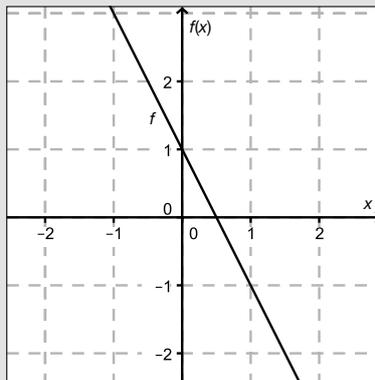
$$A = \underline{a \cdot b}$$

Konstruktionsformat: Ein Diagramm oder eine Grafik ist vorgegeben. Die Aufgabenstellung erfordert die Ergänzung von Punkten und/oder Geraden und/oder Kurven und/oder Skalierungen bzw. Achsenbeschriftungen im Diagramm bzw. in der Grafik.

Beispiel:

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

– Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit $k = -2$ und $d > 0$ im nachstehenden Koordinatensystem ein.

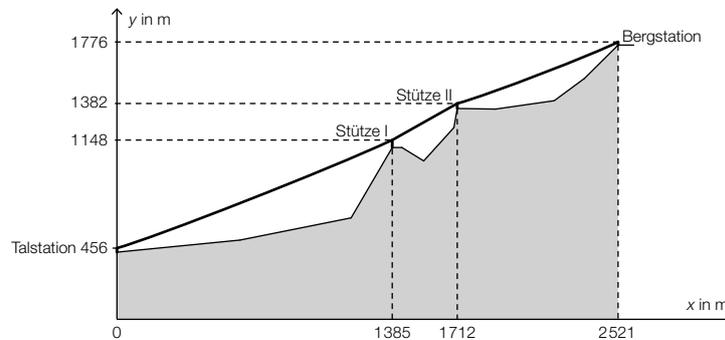


Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Gondelbahn auf den Untersberg

In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.



x ... horizontaler Abstand von der Talstation in Metern (m)

y ... Höhe über Meeresniveau in m

a) Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

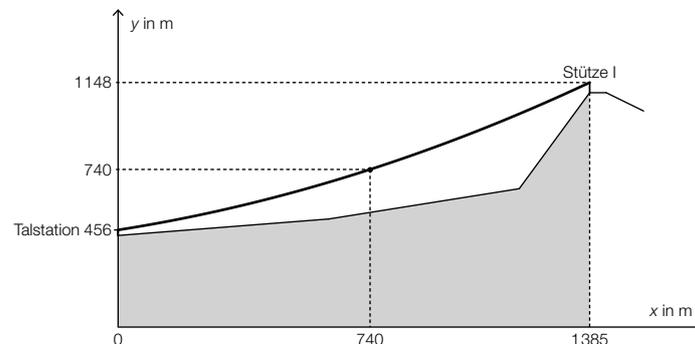
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1776 - 456}{2521 - 0} \approx 0,52$$

– Beschreiben Sie, was das Ergebnis im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet. [1 Punkt]

b) Der Seilverlauf zwischen Stütze I und Stütze II wird vereinfacht als linear angenommen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt kleiner als 40° ist. [1 Punkt]

c) Aufgrund des Eigengewichts hängt das Tragseil zwischen der Talstation und der Stütze I durch. Sein Verlauf kann näherungsweise als Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



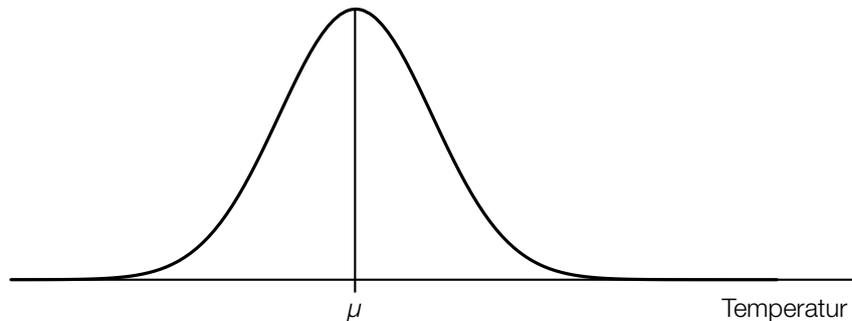
– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a , b und c ermittelt werden können. [1 Punkt]

– Ermitteln Sie a , b und c . [1 Punkt]

Aufgabe 2

Klimawandel und Ozon

- a) Man geht davon aus, dass durch den Klimawandel die Temperaturen steigen. Die mittleren Sommertemperaturen in Wien sind annähernd normalverteilt.* Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.



- Skizzieren Sie im obigen Diagramm den Graphen der Dichtefunktion einer Normalverteilung, bei der sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung größer als in der gegebenen Darstellung sind. [2 Punkte]
- b) Bei einer Messstation im Bereich des südlichen Polarkreises kann die Ozonmenge pro Quadratmeter in Abhängigkeit von der Zeit für einen bestimmten Zeitraum näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$$N(t) = N_0 \cdot 0,9917^t$$

t ... Zeit in Jahren

$N(t)$... Ozonmenge pro Quadratmeter zur Zeit t

N_0 ... Ozonmenge pro Quadratmeter zur Zeit $t = 0$

- Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Ozonmenge pro Quadratmeter jährlich abnimmt. [1 Punkt]

Die Gleichung $0,5 = 0,9917^t$ wird gelöst.

- Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang. [1 Punkt]

* Vgl. Kromp-Kolb/Formayer (2005). *Schwarzbuch Klimawandel: Wie viel Zeit bleibt uns noch?* Salzburg: Ecwin. S. 53–55.

Aufgabe 3

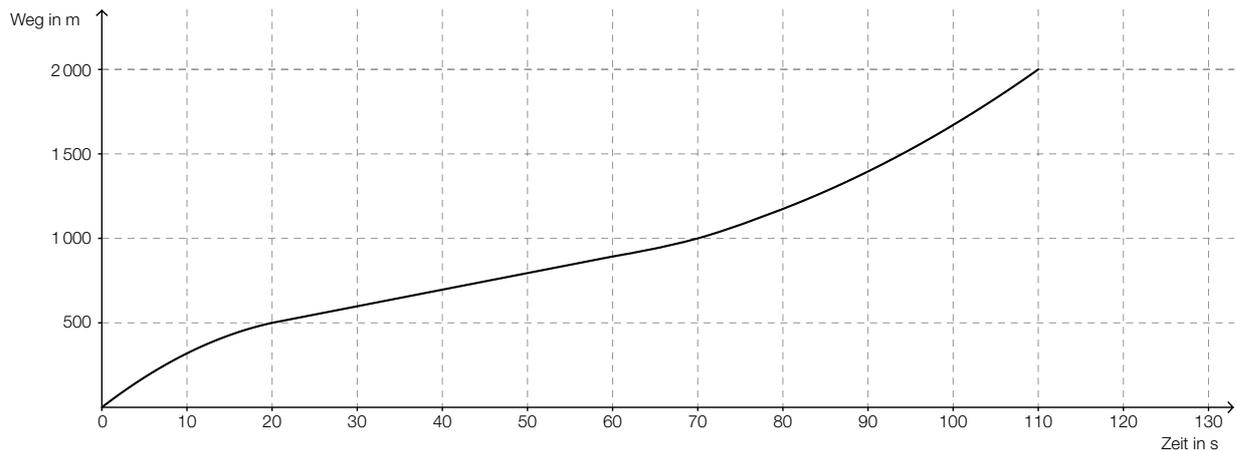
Section-Control

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.

- a) In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet. Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h. Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %.“

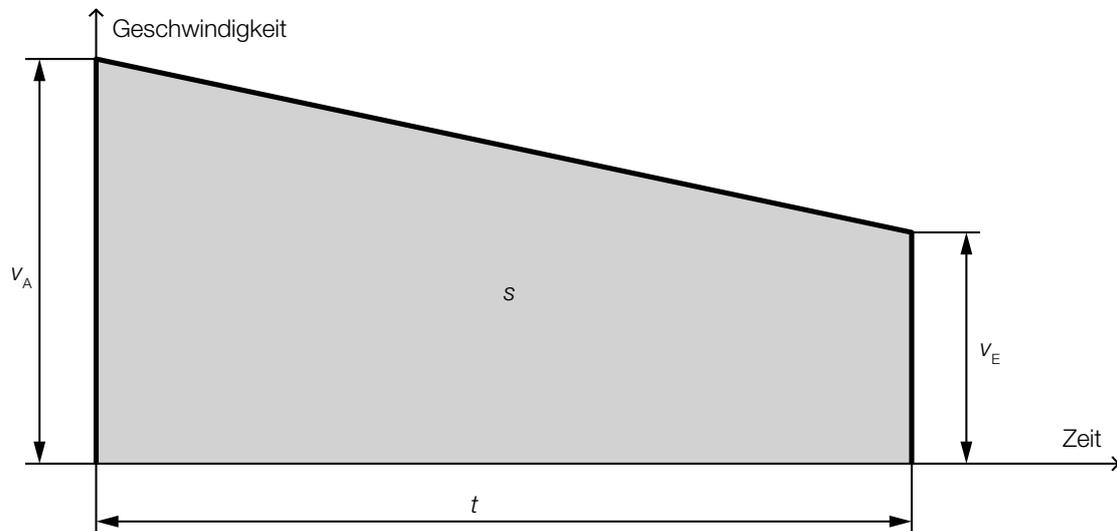
– Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist. [1 Punkt]

- b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeuges in einem überprüften Bereich dargestellt.



- Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeuges auf der ersten Wegehälfte. [1 Punkt]
– Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Wegehälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Wegehälfte ist. [1 Punkt]

- c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E , die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs:

$v_A =$ _____

[1 Punkt]

Aufgabe 4

Blutkreislauf

Blut versorgt die Organe des menschlichen Körpers mit Sauerstoff. Das Herz pumpt das Blut in einem Kreislaufsystem durch den Körper.

- a) Im Blut gibt es 3 verschiedene Arten von Blutzellen. Ein erwachsener Mensch hat ca. 5 Liter Blut im Körper. Diese 5 Liter enthalten ca. $25 \cdot 10^{12}$ rote Blutkörperchen, ca. $15 \cdot 10^{11}$ Blutplättchen und ca. $3 \cdot 10^{10}$ weiße Blutkörperchen.

– Berechnen Sie, wie viele Blutzellen (rote Blutkörperchen, Blutplättchen und weiße Blutkörperchen zusammen) sich in 1 Kubikmillimeter Blut befinden. [2 Punkte]

- b) Die Pumpleistung des Herzens (in Litern pro Minute) kann in Abhängigkeit vom Alter (in Jahren) annähernd durch eine lineare Funktion P beschrieben werden. Sie beträgt bei 20-jährigen Personen 5 Liter pro Minute und bei 70-jährigen Personen 2,5 Liter pro Minute.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von P auf. [1 Punkt]

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. [1 Punkt]

- c) Betrachtet man den Querschnitt eines Blutgefäßes vereinfacht als Kreis, so lässt sich die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in Blutgefäßen näherungsweise durch die Funktion v beschreiben:

$$v(x) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \text{ mit } 0 \leq x \leq R$$

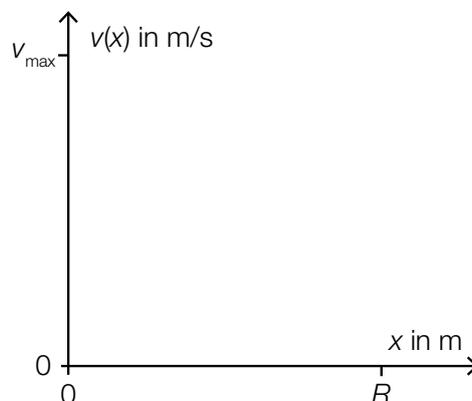
x ... Abstand von der Mitte des Blutgefäßes in Metern (m)

$v(x)$... Strömungsgeschwindigkeit des Blutes im Abstand x in m/s

v_{\max} ... maximale Geschwindigkeit des Blutes in Metern pro Sekunde (m/s) mit $v_{\max} > 0$

R ... Radius des Blutgefäßes in m

– Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion v in der nachstehenden Abbildung. [1 Punkt]



Aufgabe 5

Batterien

Ein Unternehmen produziert Batterien.

- a) Ein Händler kauft Batterien bei diesem Unternehmen und erhält die Information, dass erfahrungsgemäß 2 % der gelieferten Batterien defekt sind.

Der Händler entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 40 Batterien.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 der entnommenen Batterien defekt sind. [1 Punkt]

- b) Für den Versand der Batterien an Einzelhändler werden diese jeweils in 4er-Packungen verpackt. Ein Einzelhändler erhält eine Lieferung von a 4er-Packungen.

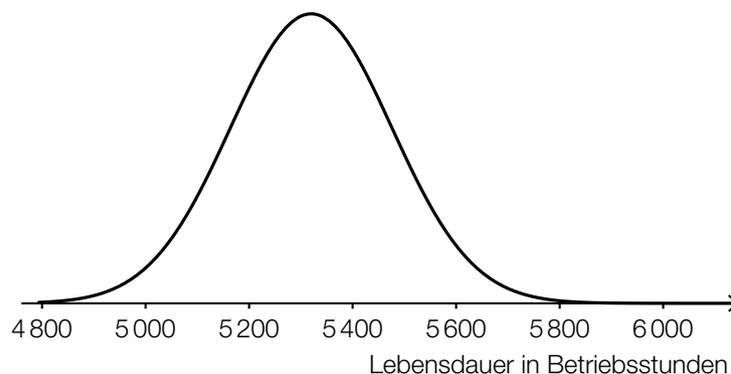
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie defekt ist, beträgt p .

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $4 \cdot a \cdot p$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird. [1 Punkt]

- c) Das Unternehmen gibt an, dass die Lebensdauer der Batterien annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5320$ Betriebsstunden und der Standardabweichung $\sigma = 156$ Betriebsstunden ist.

– Berechnen Sie dasjenige symmetrische Intervall um μ , in dem die Lebensdauer einer zufällig ausgewählten Batterie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt. [1 Punkt]

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion dieser Normalverteilung dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie eine Lebensdauer von maximal 5200 Betriebsstunden hat. [1 Punkt]

Aufgabe 6

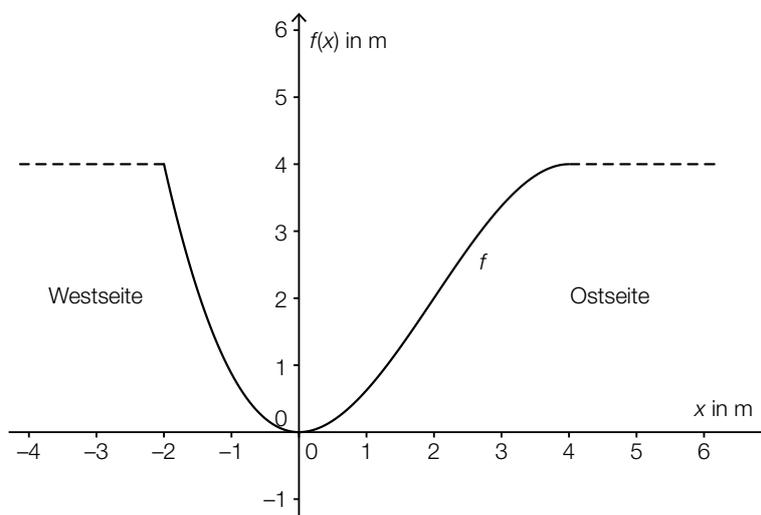
Am Fluss

- a) Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \quad \text{mit } -2 \leq x \leq 4$$

$x, f(x)$... Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



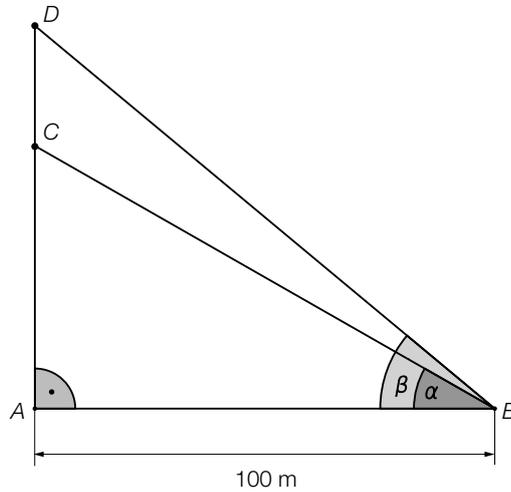
- Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt. [1 Punkt]

Gegeben ist das folgende Integral:

$$\int_{-2}^4 (4 - f(x)) dx$$

- Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mithilfe dieses Integrals berechnet werden kann. [1 Punkt]

- b) Ein von einem Punkt A senkrecht aufsteigender Ballon wird von einem Punkt B am Flussufer unter dem Höhenwinkel $\alpha = 30^\circ$ gesehen. Etwas später erscheint der Ballon unter dem Höhenwinkel $\beta = 40^\circ$ (siehe nachstehende Skizze).



– Berechnen Sie die Streckenlänge \overline{CD} . [1 Punkt]

Aufgabe 7 (Teil B)

Sportartikel

- a) Für einen Sportartikel lassen sich die Produktionskosten mithilfe der linearen Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 25 \cdot x + 300$$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kapazitätsgrenze liegt dabei bei 50 ME.

Das Produkt kann zu einem Preis von 40 GE/ME verkauft werden.

– Erklären Sie, warum der maximale Gewinn hier nicht mithilfe der Differenzialrechnung ermittelt werden kann. [1 Punkt]

– Berechnen Sie den maximalen Gewinn. [1 Punkt]

- b) Die Fixkosten für die Erzeugung eines bestimmten Sportartikels betragen 2 900 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen 3 100 GE. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME betragen die Gesamtkosten 3 252,80 GE. Der Kostenverlauf soll mithilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

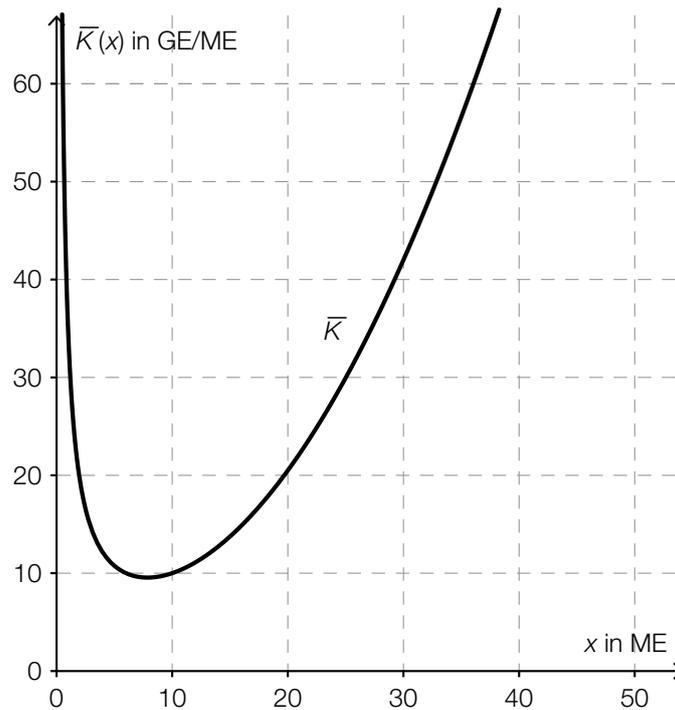
– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Kostenfunktion. [2 Punkte]

– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Kostenfunktion. [1 Punkt]

- c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt: $K'(x) = 0,15 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 5$
Die Fixkosten betragen 30 GE.

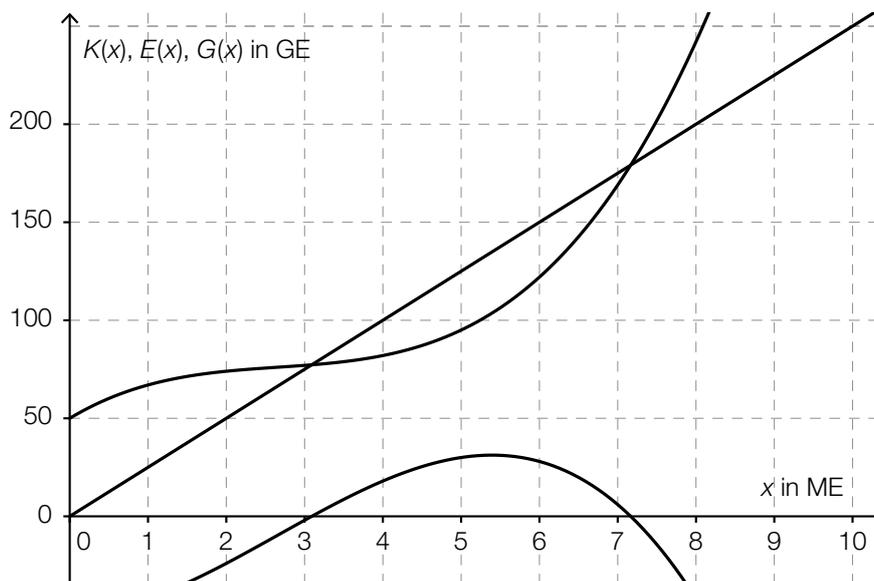
– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K . [1 Punkt]

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion \bar{K} dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab. [1 Punkt]

- d) Die Graphen einer Kostenfunktion K , einer Erlösfunktion E und der zugehörigen Gewinnfunktion G sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



- Beschriften Sie im obigen Diagramm diese 3 dargestellten Graphen. [1 Punkt]
– Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E mithilfe des Diagramms auf. [1 Punkt]

Aufgabe 8 (Teil B)

Renovierungskredit

Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von € 30.000 aufnehmen. Dazu holt sie verschiedene Angebote von Privatpersonen und von Banken ein. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

- a) Eine Bekannte bietet Frau Eberharter privat einen Kredit in Höhe von € 30.000 zu einem Zinssatz von 2 % p. a. an.

Frau Eberharter soll diesen Kredit folgendermaßen zurückzahlen:

€ 8.000 nach einem Jahr und 2 gleich hohe Raten, eine davon nach 3 Jahren und die andere nach 4 Jahren.

- Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse dar. [1 Punkt]
- Berechnen Sie die Ratenhöhe. [1 Punkt]
- Erklären Sie, warum sich diese Ratenhöhe verringert, wenn beide Raten früher bezahlt werden. [1 Punkt]

- b) Frau Eberharter recherchiert im Internet Angebote von Banken für Kredite in Höhe von € 30.000 mit einer Laufzeit von 60 Monaten.

Eine Bank bietet einen Kredit mit einer monatlichen Rate in Höhe von € 559,11 bei einem Zinssatz von 4,58 % p. a.

- Ermitteln Sie den zugehörigen monatlichen Zinssatz. [1 Punkt]
- Überprüfen Sie nachweislich, ob es sich um eine vorschüssige oder eine nachschüssige Ratenzahlung handelt. [1 Punkt]

- c) Eine Bank bietet Frau Eberharter einen Kredit in Höhe von € 30.000 an, den sie in 10 nachschüssigen Halbjahresraten in Höhe von je € 3.480 zurückzahlen muss.

Für diesen Kredit kann Frau Eberharter einen Annuitätenzuschuss bei der Landesregierung beantragen, d. h., 10 % jeder Halbjahresrate werden vom Land übernommen.

- Berechnen Sie die Höhe der Halbjahresraten, die Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses bezahlen muss. [1 Punkt]
- Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz, der sich für Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses ergibt. [1 Punkt]
- Ermitteln Sie die Höhe desjenigen Annuitätenzuschusses in Euro, bei dem sich für Frau Eberharter ein effektiver Jahreszinssatz von null Prozent ergeben würde. [1 Punkt]

- d) Frau Eberharter vereinbart für einen Kredit mit einer Bank Sonderkonditionen. Die Bank erstellt dazu einen Tilgungsplan. Ein Auszug dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 30.000,00
1	€ 660,00	€ -660,00	€ 0,00	€ 30.660,00
2	€ 674,52	€ 0,00	€ 674,52	€ 30.660,00
3	€ 674,52	€ 5.325,48	€ 6.000,00	€ 25.334,52

- Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden auftretenden Beträge in Höhe von € 0,00 im gegebenen Sachzusammenhang. [1 Punkt]

Aufgabe 9 (Teil B)

Staatseinnahmen und -ausgaben

Die Statistik Austria gibt u. a. Auskunft über die Einnahmen und Ausgaben des Staates Österreich (vgl. Statistik Austria: Struktur der Einnahmen und Ausgaben des Staates, konsolidiert, Jahresdaten – erstellt am 30.09.2013).

- a) Die folgende Tabelle gibt die Ausgaben des Staates Österreich für den Zeitraum von 2006 bis 2012 in Milliarden Euro an:

Jahr	Ausgaben in Mrd. Euro
2006	127,293
2007	133,180
2008	139,494
2009	145,333
2010	150,593
2011	151,881
2012	158,735

- Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung der Regressionsgeraden, die die Ausgaben in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2006. [1 Punkt]
- Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Ausgaben zu beschreiben. [1 Punkt]
- Berechnen Sie anhand dieses Modells näherungsweise die Ausgaben im Jahr 2015. [1 Punkt]

- b) Bei den Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern gab es besonders in den Jahren 2006 bis 2009 große Schwankungen. Die folgende Tabelle gibt die prozentuelle Veränderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern gegenüber dem jeweiligen Vorjahr an:

Jahr	2006	2007	2008	2009
Änderung	+6,0 %	+10,0 %	+8,1 %	-11,1 %

- Berechnen Sie die mittlere prozentuelle Änderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern pro Jahr für den angegebenen Zeitraum. [1 Punkt]

- c) Die Vermögenseinkommen auf der Einnahmenseite für die Jahre 1976 bis 2012 können näherungsweise durch die folgende quadratische Funktion V beschrieben werden:

$$V(t) = -0,0027 \cdot t^2 + 0,1732 \cdot t + 0,8381$$

t ... Anzahl der Jahre ab 1976, d. h., für das Jahr 1976 gilt: $t = 0$

$V(t)$... Vermögenseinkommen im Jahr t in Milliarden Euro

- Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass der Graph dieser Funktion einen Hochpunkt hat. [1 Punkt]
- Ermitteln Sie die Stelle dieses Maximums. [1 Punkt]
- Berechnen Sie das Integral $\int_0^{36} V(t) dt$. [1 Punkt]
- Interpretieren Sie den Wert dieses Integrals im gegebenen Sachzusammenhang. [1 Punkt]

