Aufgabe 6 (Teil B)

Bauteile

In einem Betrieb werden verschiedene Bauteile hergestellt.

a) Die Kostenfunktion K für das Bauteil A ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

x ... produzierte Menge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Menge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Der Graph der Grenzkostenfunktion und der Graph der Stückkostenfunktion schneiden einander bei 10 ME.	
Die Stückkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 10 GE/ME.	

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

b) Für die Kostenfunktion K und die Gewinnfunktion G für das Bauteil B gilt im Intervall [0; 25]:

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 700 \cdot x + 6000$
$G(x) = -40 \cdot x^2 + 1200 \cdot x - 6000$

x ... produzierte und verkaufte Menge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Menge x in GE
$G(x)$ ... Gewinn bei der Menge x in GE

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall der Produktionsmenge, in dem die Grenzkosten maximal 700 GE/ME betragen. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsminimum ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 0$	☐
$12 \cdot x - 120 = 0$	☐
$2 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 700 = 0$	☐
$4 \cdot x - 60 = 0$	☐
$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x = 0$	☐

Für die Produktion des Bauteils B gilt:

1 ME = 10000 Stück
1 GE = 100 Euro

Es wird genau diejenige Menge produziert, bei der der Gewinn maximal ist.

3) Berechnen Sie den Gewinn pro Stück bei dieser Menge. Geben Sie das Ergebnis in Euro/Stück an. *[0/1 P.]*

Für die zugehörige Erlösfunktion E gilt: $E(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$

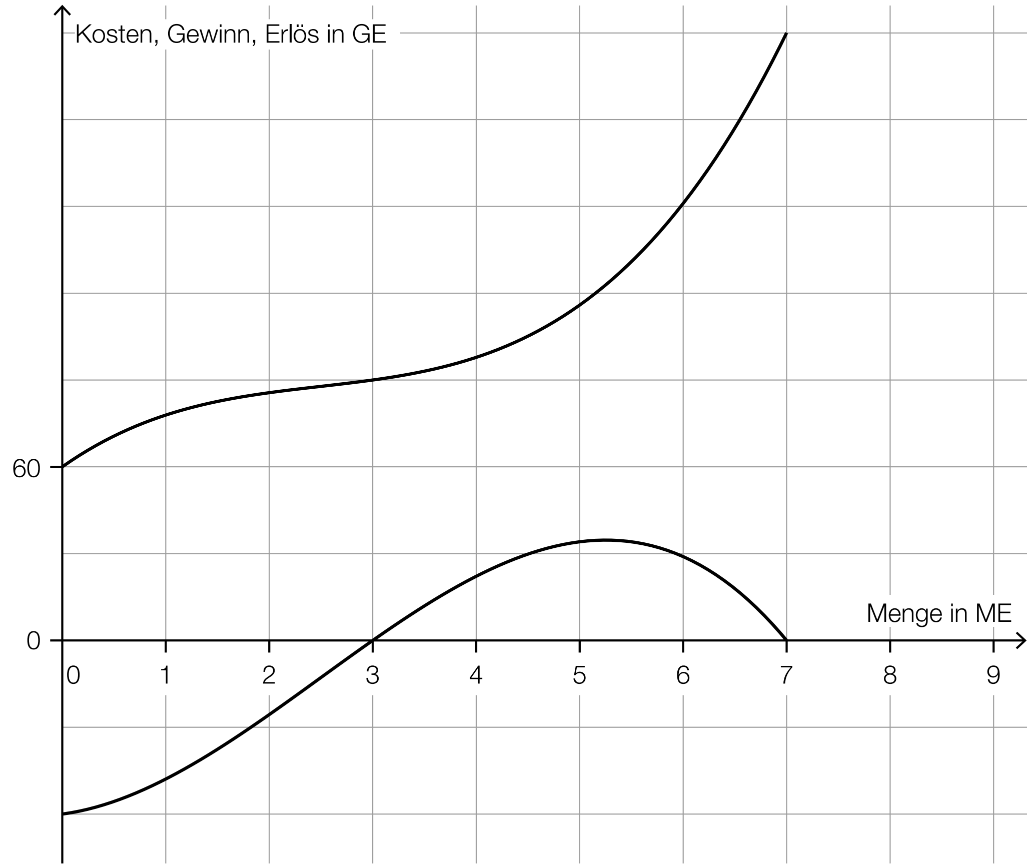
4) Ermitteln Sie die Parameter a, b und c. *[0/1 P.]*

a = ____________________

b = ____________________

c = ____________________

c) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion und der Graph der Gewinnfunktion für das Bauteil *C* dargestellt.



Die zugehörige Erlösfunktion ist linear.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion ein. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem das Bauteil *C* verkauft wird. *[0/1 P.]*

d) Für die Preis-Absatz-Funktion für das Bauteil *D* gilt:

$p(x) = p_H - 20 \cdot x$

x ... abgesetzte Menge in ME
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in GE/ME
p_H ... Höchstpreis in GE/ME

Der Preis bei einem Verkauf von 5 ME beträgt 300 GE/ME.

1) Berechnen Sie den Höchstpreis p_H. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Preis-Absatz-Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Swimmingpool

a) Lea möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür über einen Zeitraum von 5 Jahren bei einem konstanten Jahreszinssatz 4 Einzahlungen Z auf ein Konto getätigt und so bis heute € 2.468,39 gespart.

Dabei gilt:

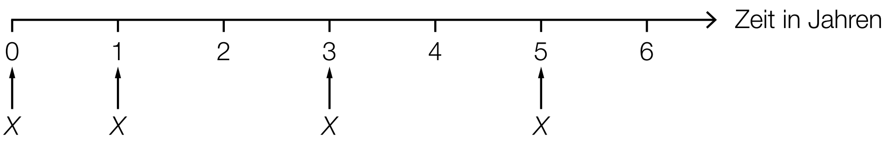
$$Z + Z \cdot 1{,}0102^2 + Z \cdot 1{,}0102^4 + Z \cdot 1{,}0102^5 = 2\,468{,}39$$

1) Lesen Sie den Jahreszinssatz i ab.

$i =$ ____________________ % p. a. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Höhe von Z. *[0/1 P.]*

b) Melisa möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür 4 Einzahlungen X auf ein Konto getätigt (siehe nachstehende Zeitachse).



Für verschiedene Zeitpunkte soll der Wert dieser Einzahlungen berechnet werden.
Der jährliche Aufzinsungsfaktor wird mit q bezeichnet.

1) Ordnen Sie den beiden Werten jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 1	
Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 3	

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

c) Konstantin möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf, den er durch 120 Monatsraten in Höhe von jeweils € 198,71 zurückzahlen möchte. Die 1. Zahlung erfolgt 1 Monat nach Auszahlung des Kredits.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz für diesen Kredit. *[0/1 P.]*

d) Simon möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit auf, den er durch nachschüssige monatliche Annuitäten bei einem Monatszinssatz i_{12} zurückzahlen soll.
Die Höhe der monatlichen Annuitäten ändert sich dabei.

In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
12				€ 6.766,03
13				€ 6.492,13
14				€ 6.492,13
15			A_{15}	€ 6.217,55

1) Geben Sie denjenigen Monat an, in dem der Tilgungsanteil € 0 beträgt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von A_{15} auf.
Verwenden Sie dabei i_{12} sowie die Werte für die Restschuld im Monat 14 und im Monat 15.

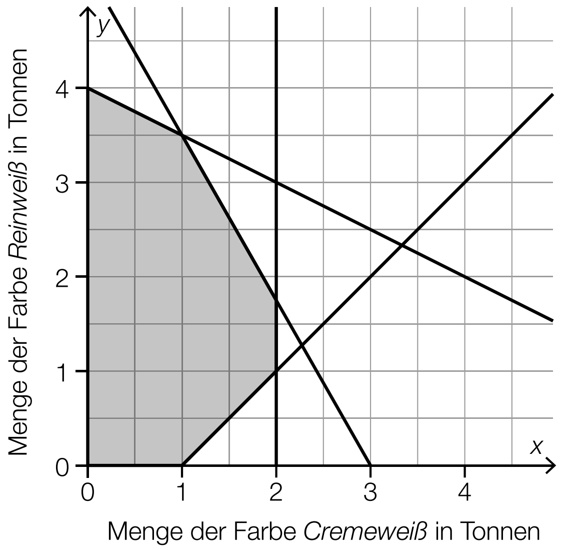
A_{15} = ____ *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Wandfarben

In einem Betrieb werden Wandfarben produziert.

a) Täglich werden x Tonnen der Farbe *Cremeweiß* und y Tonnen der Farbe *Reinweiß* produziert. In der nachstehenden Abbildung sind die Mengenbeschränkungen für die Produktion dieser beiden Farben dargestellt.



Beide Farben werden zum Preis von 4,50 Euro pro Kilogramm verkauft.
Die Zielfunktion Z beschreibt den Erlös beim Verkauf von x Tonnen der Farbe *Cremeweiß* und y Tonnen der Farbe *Reinweiß*.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, auf der im Lösungsbereich der maximale Wert der Zielfunktion angenommen wird. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Erlös. *[0/1 P.]*

Es wird vorgeschlagen, bei der Produktion folgende zusätzliche Bedingung zu berücksichtigen: Von der Farbe *Cremeweiß* sollen täglich um höchstens 2 Tonnen mehr als von der Farbe *Reinweiß* produziert werden.

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob der in der obigen Abbildung dargestellte Lösungsbereich durch diese zusätzliche Bedingung verkleinert wird. *[0/1 P.]*

b) Es sollen x Tonnen der Farbe *Ozeanblau* und y Tonnen der Farbe *Nachtblau* produziert werden.

Für die Produktion von 1 Tonne der Farbe *Ozeanblau* werden 0,16 ME blaues Farbpulver verbraucht.
Für die Produktion von 1 Tonne der Farbe *Nachtblau* werden 0,2 ME blaues Farbpulver verbraucht.
Insgesamt sollen höchstens 12 ME des blauen Farbpulvers verbraucht werden.
Von der Farbe *Ozeanblau* soll um mindestens ein Drittel mehr als von der Farbe *Nachtblau* produziert werden.

1) Stellen Sie die zwei Ungleichungen auf, die diesen Sachverhalt beschreiben. *[0/1/2 P.]*

c) Die Zeit, die Farbe zum Trocknen braucht (Trocknungszeit), hängt unter anderem von der Temperatur ab. Für eine bestimmte Farbe wurden die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Daten ermittelt.

Temperatur in °C	15	18	20	22	27
Trocknungszeit in h	5,8	4,2	3,2	3,4	1,9

Die Trocknungszeit soll in Abhängigkeit von der Temperatur näherungsweise durch die lineare Funktion g beschrieben werden.

T ... Temperatur in °C
$g(T)$ ... Trocknungszeit bei der Temperatur T in h

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion g auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von g im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

In einem anderen Modell kann die Trocknungszeit in Abhängigkeit von der Temperatur näherungsweise durch die quadratische Funktion f beschrieben werden.

$f(T) = \frac{1}{60} \cdot T^2 - T + 17 \quad \text{mit} \quad 15 \leq T \leq 27$

T ... Temperatur in °C
$f(T)$ ... Trocknungszeit bei der Temperatur T in h

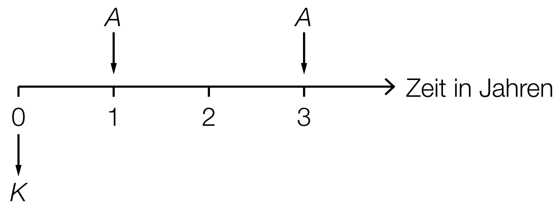
3) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion f diejenige Temperatur, bei der die lokale Änderungsrate der Trocknungszeit –0,3 h/°C beträgt. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Tischlerei

a) Für den Kauf einer Sägemaschine wird der Kreditbetrag K aufgenommen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

Der Kredit wird durch zwei gleich hohe Zahlungen A getilgt (siehe nachstehende Zeitachse).



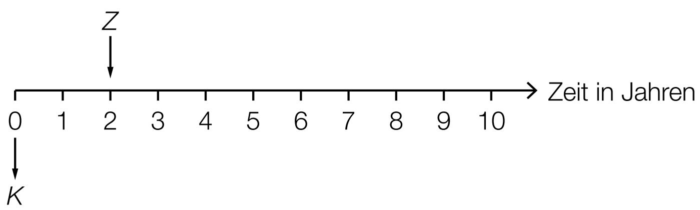
1) Stellen Sie mithilfe von K eine Formel für A auf.

A = ____ *[0/1 P.]*

Alternativ kann der Kreditbetrag K durch eine Einmalzahlung Z und 5 jährliche Raten R zurückgezahlt werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

Es gilt: $K \cdot 1{,}02^3 = Z \cdot 1{,}02 + R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^5}$

Der Kreditbetrag K und die Einmalzahlung Z sind auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



2) Zeichnen Sie auf der obigen Zeitachse die Raten R ein. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie R für K = € 60.000 und Z = € 20.000. *[0/1 P.]*

b) Eine Schleifmaschine wird um den Betrag S gekauft. Die Bezahlung erfolgt mit den Beträgen B_1 und B_2.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$

q ... monatlicher Aufzinsungsfaktor ($q > 1$)

Alternativ könnte die Zahlung auch mit den Beträgen B_1 und B_3 erfolgen.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_3 \cdot q^{-3}$

1) Argumentieren Sie, dass B_3 kleiner als B_2 ist. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die <u>nicht</u> zur Gleichung $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$ äquivalent ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$S \cdot q^{10} = B_1 \cdot q^5 + B_2 \cdot q^3$	☐
$S \cdot q^7 = B_1 \cdot q^2 + B_2$	☐
$S \cdot q^6 = B_1 \cdot q + B_2 \cdot q^{-1}$	☐
$S \cdot q^5 = B_1 + B_2 \cdot q^{-2}$	☐
$S \cdot q^2 = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-3}$	☐

c) Für den Kauf einer Fräsmaschine wird ein Kredit in Höhe von € 45.000 aufgenommen. Dieser Kredit wird durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von je € 3.500 und eine Restzahlung getilgt. Der Semesterzinssatz beträgt 0,8 %.

Für die Rückzahlung des Kredits wurde der nachstehende Tilgungsplan erstellt.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
0	–––	–––	–––	€ 45.000
1	€ 360	€ 3.140	€ 3.500	

1) Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das Semester 1. *[0/1 P.]*

Es werden 13 nachschüssige Semesterraten gezahlt. Ein Semester nach Zahlung der letzten Semesterrate wird der Kredit durch eine Restzahlung vollständig getilgt.

2) Vervollständigen Sie im nachstehenden Tilgungsplan die Zeilen für die Semester 13 und 14. *[0/1 P.]*

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
13	€ 44,94	€ 3.455,06	€ 3.500,00	
14	€ 17,30			€ 0,00

Für eine alternative Rückzahlung wird folgende Berechnung durchgeführt:

$\sqrt[6]{1{,}008} - 1 \approx 0{,}0013$

3) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

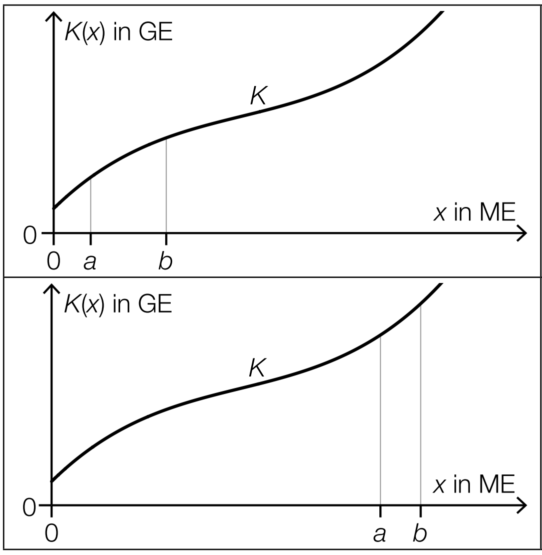
Fahrradhelme

a) In den zwei unten stehenden Abbildungen ist jeweils der Graph der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Green Protection* dargestellt.

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.

[0/1 P.]



A	Die Gesamtkosten sind bei a ME höher als bei b ME.
B	Die Grenzkosten sind bei a ME geringer als bei b ME.
C	Die Kostenkehre liegt zwischen a ME und b ME.
D	Die Durchschnittskosten sind bei a ME höher als bei b ME.

Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}4 \cdot x + 18$

Bei einer Produktion von 40 ME betragen die Gesamtkosten 664 GE.

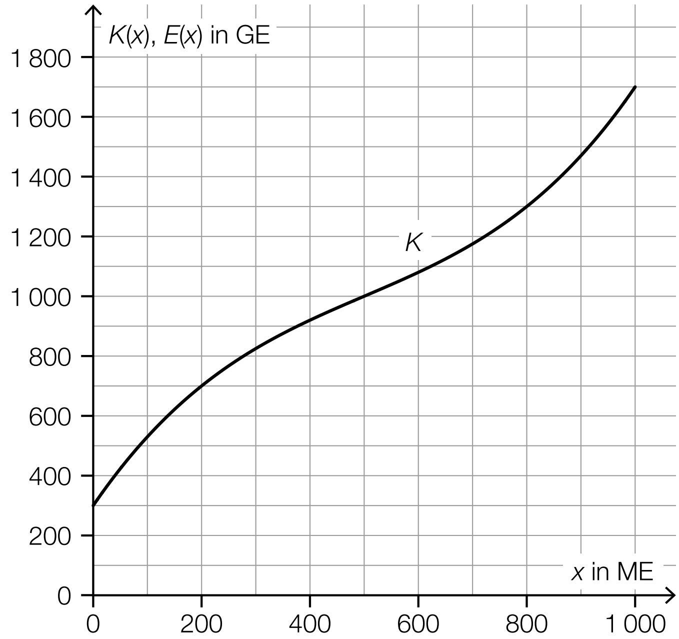
2) Berechnen Sie die Fixkosten. *[0/1 P.]*

b) Für die Erlösfunktion E für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* gilt:

$E(x) = -0{,}0045 \cdot x^2 + 5{,}45 \cdot x$

x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E im Intervall [0; 1 000] ein. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Gewinn bei einem Absatz von 500 ME. *[0/1 P.]*

Es wird die nachstehende Berechnung durchgeführt.

$\frac{E(700)}{700} = 2{,}3$

3) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Das Ergebnis dieser Berechnung entspricht ___①___ bei einem Absatz von 700 ME in der Einheit ___②___.

①	
dem Grenzerlös	☐
dem Preis	☐
den Durchschnittskosten	☐

②	
GE	☐
ME	☐
GE/ME	☐

c) Für die quadratische Gewinnfunktion G für Fahrradhelme des Modells *Gold Protection* gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Die Fixkosten betragen 220 GE.
Der Break-even-Point liegt bei einem Absatz von 50 ME.
Der maximale Gewinn wird bei einem Absatz von 300 ME erzielt.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. *[0/1/2 P.]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Keramik

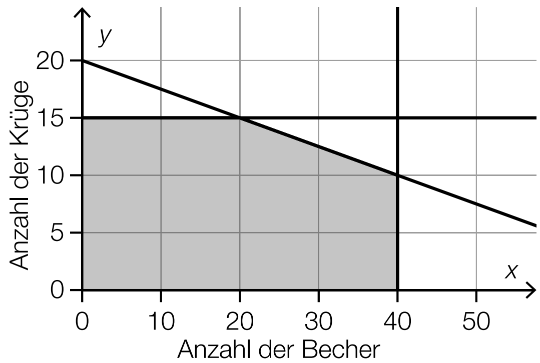
Ein Betrieb stellt Haushaltsgegenstände aus Keramik her.

a) Es sollen mindestens so viele Vasen wie Schüsseln hergestellt werden.

Für die Herstellung einer Vase werden 200 g Ton und für die Herstellung einer Schüssel 400 g Ton benötigt. Für Vasen und Schüsseln sollen insgesamt pro Woche nicht mehr als 16 kg Ton verbraucht werden.

1) Stellen Sie die beiden Ungleichungen auf, die diese Produktionseinschränkungen für x Vasen und y Schüsseln beschreiben. *[0/1/2 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die wöchentliche Herstellung von x Bechern und y Krügen dargestellt.



In einer bestimmten Woche sollen so viele Becher wie möglich hergestellt werden.

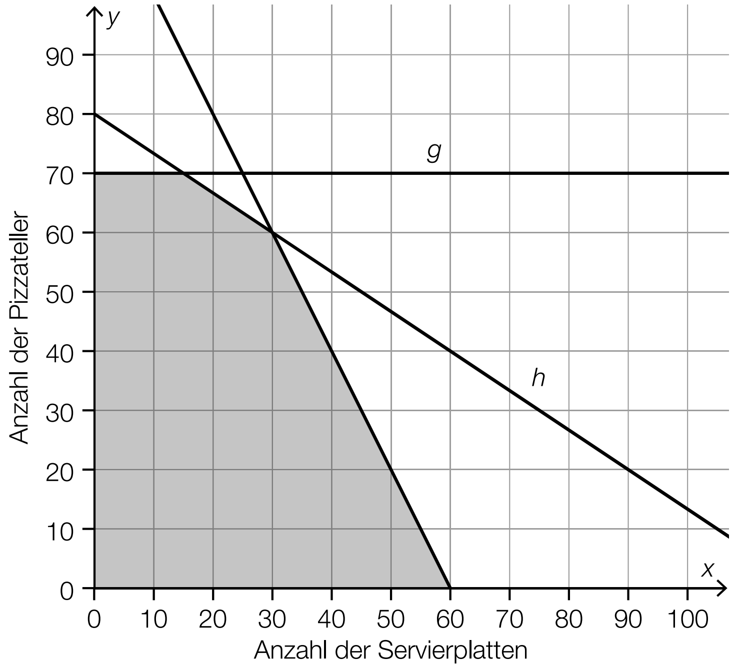
1) Geben Sie an, wie viele Krüge in dieser Woche maximal hergestellt werden können.

__________ Krüge *[0/1 P.]*

In einer Aktionswoche ist die Herstellung von 30 Bechern und 15 Krügen geplant.

2) Argumentieren Sie, dass diese Herstellung <u>nicht</u> möglich ist. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die wöchentliche Herstellung von x Servierplatten und y Pizzatellern dargestellt.



Der Preis für eine Servierplatte beträgt € 40 und der Preis für einen Pizzateller beträgt € 30.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Erlöses auf.

$E(x, y) =$ ____ *[0/1 P.]*

Der maximale Erlös wird bei einer Produktion von 30 Servierplatten und 60 Pizzatellern erzielt.

Das Hinzufügen oder Weglassen von Bedingungen kann zur Änderung der Produktionsmengen für den maximalen Erlös führen. Sowohl der Preis für eine Servierplatte als auch der Preis für einen Pizzateller bleiben unverändert.

2) Kreuzen Sie diejenige Änderung an, bei der sich die Produktionsmengen für den maximalen Erlös ändern. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

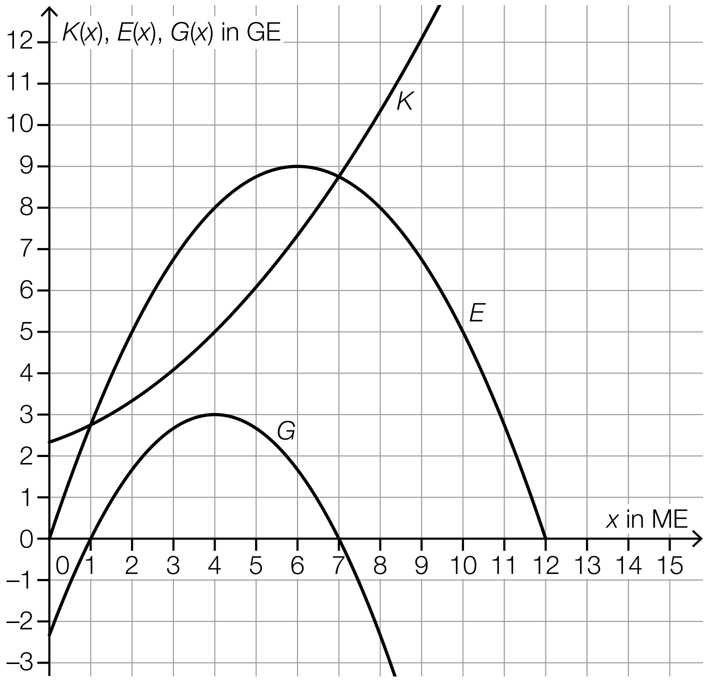
Es gilt zusätzlich: $x \leq 50$	☐
Die zur Geraden g gehörende Bedingung wird weggelassen.	☐
Es gilt zusätzlich: $y \leq 60$	☐
Die zur Geraden h gehörende Bedingung wird weggelassen.	☐
Es gilt zusätzlich: $x \leq 40$	☐

Aufgabe 6 (Teil B)

Trinkflaschen

Ein Unternehmen produziert Trinkflaschen aus verschiedenen Materialien.

a) In der nachstehenden Abbildung sind für die Produktion von Trinkflaschen aus Glas die Graphen der Kostenfunktion K, der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G dargestellt.



1) Markieren Sie in der obigen Abbildung auf der x-Achse den Gewinnbereich. *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf. *[0/1 P.]*

3) Kreuzen Sie den Cournot'schen Preis an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

1 GE/ME	☐
2 GE/ME	☐
3 GE/ME	☐
4 GE/ME	☐
6 GE/ME	☐

b) Für Trinkflaschen aus Edelstahl ist die Kostenfunktion K bekannt:

$K(x) = 0{,}035 \cdot x^3 - 0{,}32 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x + 4$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten 2,8 GE/ME betragen. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die absolute Änderung der Gesamtkosten bei einer Steigerung der Produktion von 8 ME auf 9 ME. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Kostenkehre. *[0/1 P.]*

c) Das Unternehmen entwickelt neue Thermosflaschen. In verschiedenen Versuchen wurde untersucht, wie schnell Tee in diesen Thermosflaschen abkühlt.
Diese Versuche ergaben, dass die Temperatur des Tees zu einem bestimmten Messzeitpunkt annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt $\mu = 64$ °C.
Bei 4 % aller Versuche betrug die Temperatur des Tees zu diesem Messzeitpunkt weniger als 60 °C.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ. *[0/1 P.]*

Bei einem dieser Versuche wurde die nachstehende Funktion T ermittelt.

$T(t) = 20 + 77 \cdot 0{,}93^t$

t … Zeit seit dem Einfüllen des Tees in h
$T(t)$ … Temperatur des Tees zur Zeit t in °C

2) Geben Sie diejenige Temperatur an, die der Tee beim Einfüllen zur Zeit $t = 0$ hatte.

____________________ °C *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Umbaufinanzierung

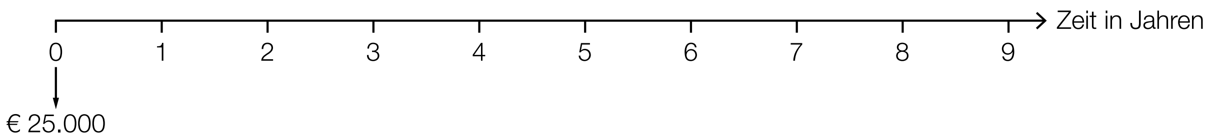
Maria und Johanna bauen ihre gemeinsame Wohnung um und benötigen für die Umbaufinanzierung einen Kredit in Höhe von € 25.000.

a) Maria überlegt sich eine Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- einmalige Rückzahlung in Höhe von € 8.000, die 2 Jahre nach Auszahlung des Kredits erfolgt
- 3 Jahresraten in Höhe von jeweils € 6.500, beginnend 3 Jahre nach der einmaligen Rückzahlung

1) Tragen Sie auf der nachstehenden Zeitachse alle Rückzahlungen ein. *[0/1 P.]*



2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der der zugrundeliegende Jahreszinssatz i berechnet werden kann. *[0/1 P.]*

b) Johanna überlegt sich eine andere Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- 5 Jahresraten in Höhe von jeweils € 5.000, beginnend 1 Jahr nach Auszahlung des Kredits
- Restzahlung, die 1 Jahr nach der letzten Jahresrate erfolgt

Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

1) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung. *[0/1 P.]*

c) Maria und Johanna erhalten von ihrer Bank einen Tilgungsplan für die Rückzahlung des Kredits mit gleich bleibenden monatlichen Annuitäten.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
37	€ 26,06	€ 423,94	€ 450,00	€ 9.998,09
38			€ 450,00	

1) Ermitteln Sie den Monatszinssatz für den Monat 37. *[0/1 P.]*

Für den Monat 38 beträgt der Monatszinssatz 0,2 %.

2) Vervollständigen Sie die Zeile für den Monat 38. *[0/1 P.]*

d) Für den Kredit in Höhe von € 25.000 bietet eine andere Bank Maria und Johanna eine Tilgung mit einem Monatszinssatz von 0,375 % an.
Sie verhandeln mit der Bank über einen Zahlungsaufschub.

1) Berechnen Sie, nach wie vielen Monaten ohne Rückzahlungen die Restschuld erstmals € 30.000 übersteigen würde. *[0/1 P.]*

Maria und Johanna wollen nun doch von Anfang an am Ende jedes Monats genau so viel zurückzahlen, dass die Restschuld am Ende jedes Monats gleich dem ursprünglichen Kreditbetrag von € 25.000 ist.

2) Ermitteln Sie, wie hoch die monatlichen Rückzahlungen dazu sein müssen. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Vogelhäuschen

Lara und Julian wollen Vogelhäuschen herstellen und auf einem Weihnachtsmarkt verkaufen.

a) Lara und Julian wollen x Vogelhäuschen *Rustikal* und y Vogelhäuschen *Modern* herstellen.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Die Bedingung „sie wollen mindestens _____①_____ Vogelhäuschen *Rustikal* wie Vogelhäuschen *Modern* herstellen" kann durch die Ungleichung _____②_____ beschrieben werden.

①	
doppelt so viele	☐
halb so viele	☐
1,5-mal so viele	☐

②	
$3 \cdot x - 2 \cdot y \geq 0$	☐
$2 \cdot x - y \leq 0$	☐
$x - 2 \cdot y \geq 0$	☐

Für die Herstellung eines Vogelhäuschens *Rustikal* benötigen sie 1 h.
Für die Herstellung eines Vogelhäuschens *Modern* benötigen sie 1,5 h.

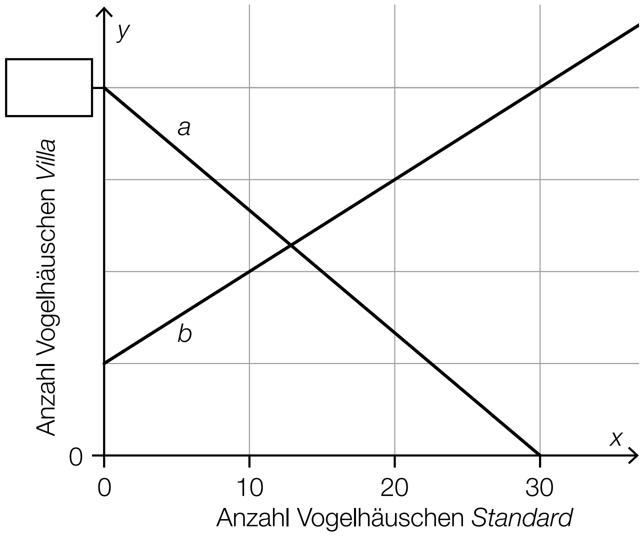
Insgesamt wollen sie höchstens 80 h für den Bau der Vogelhäuschen aufwenden.

2) Stellen Sie eine Ungleichung auf, die diese Bedingung für den Bau der Vogelhäuschen beschreibt. *[0/1 P.]*

b) Lara und Julian wollen x Vogelhäuschen *Standard* und y Vogelhäuschen *Villa* herstellen.

Die Bedingungen für die Herstellung dieser Vogelhäuschen können durch die Ungleichungen I, II und III und die Nichtnegativitätsbedingungen (IV und V) beschrieben werden (siehe nachstehende Tabelle und nachstehende Abbildung).

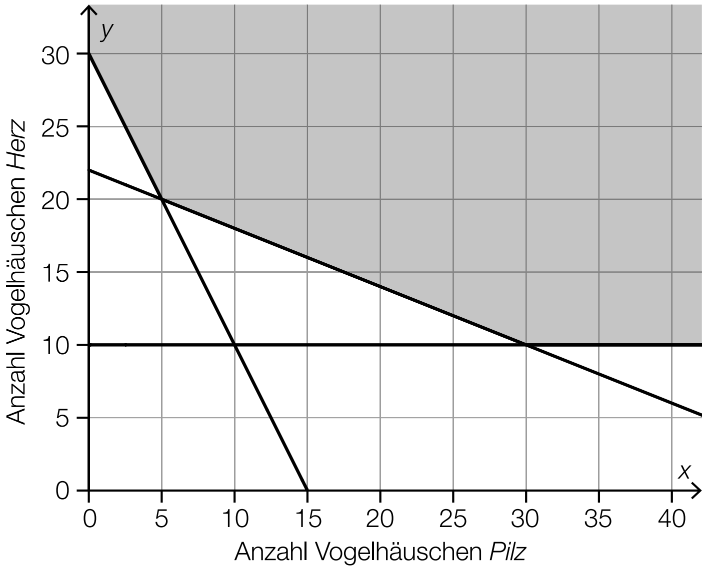
Ungleichung	Begrenzungsgerade
I: $2 \cdot x + 3 \cdot y \geq 60$	a
II: $y \geq$ ____________	b
III: $x \leq 20$	c
IV: $x \geq 0$	y-Achse
V: $y \geq 0$	x-Achse



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*
2) Vervollständigen Sie in der obigen Tabelle die Ungleichung II. *[0/1 P.]*
3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Begrenzungsgerade c ein. *[0/1 P.]*
4) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems. *[0/1 P.]*

c) Lara und Julian wollen x Vogelhäuschen *Pilz* und y Vogelhäuschen *Herz* herstellen.

Die Bedingungen für die Herstellung dieser Vogelhäuschen können durch ein Ungleichungssystem beschrieben werden. Der Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Vogelhäuschen werden aus Holzplatten gleicher Dicke hergestellt.
Für ein Vogelhäuschen *Pilz* benötigen Lara und Julian eine 20 cm × 100 cm große rechteckige Holzplatte.
Für ein Vogelhäuschen *Herz* benötigen sie eine 50 cm × 50 cm große quadratische Holzplatte.

Der Holzbedarf in cm^2 soll möglichst gering sein.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion Z zur Beschreibung des Holzbedarfs in cm^2 auf. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, auf der im Lösungsbereich der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Niedrigzinsphase

Infolge der Finanzmarktkrise 2008 entstand eine über Jahre andauernde Phase niedriger Zinsen.

a) Für einen Kredit mit jährlich nachschüssigen Annuitäten in Höhe von je € 12.000 wurde in der Zeit vor der Niedrigzinsphase ein fixer Jahreszinssatz i vereinbart.
Die Zeile des Tilgungsplans für das Jahr 7 ist gegeben:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
7	€ 3.628,87	€ 8.371,13	€ 12.000,00	€ 78.030,55

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz i. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Höhe des Kredits. *[0/1 P.]*

Nach dem Jahr 7 wird mit der Bank über einen neuen Zinssatz verhandelt. Mit dem ursprünglichen Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_8	T_8	€ 12.000,00	K_8

Mit dem neuen, niedrigeren Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_{neu}	T_{neu}	€ 12.000,00	K_{neu}

Diese beiden Zeilen für das Jahr 8 werden verglichen.

3) Tragen Sie jeweils das richtige Zeichen („<“ oder „>“) ein.

Z_{neu} ______ Z_8 T_{neu} ______ T_8 K_{neu} ______ K_8 *[0/1 P.]*

b) Bei Tilgungsplänen können verschiedene Sonderfälle auftreten.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D so zu, dass zutreffende Aussagen entstehen. *[0/1 P.]*

Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr gleich 0 ist,	
Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr negativ ist,	

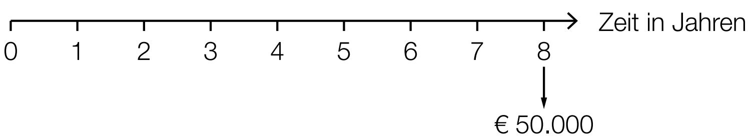
A	so wird die Restschuld in diesem Jahr vollständig beglichen.
B	so ist die Restschuld in diesem Jahr niedriger als im vorhergehenden Jahr.
C	so werden in diesem Jahr nur die anfallenden Zinsen beglichen.
D	so wird in diesem Jahr weniger als die anfallenden Zinsen zurückgezahlt.

c) In 8 Jahren sollen € 50.000 angespart werden. Die nachstehende Gleichung beschreibt den Ansparplan für einen positiven Jahreszinssatz.

$$R \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \cdot q^5 + 20\,000 \cdot q^2 = 50\,000$$

R ... Rate
q ... jährlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie alle Raten R und den Betrag in Höhe von € 20.000 auf der nachstehenden Zeitachse ein. *[0/1/2 P.]*



2) Berechnen Sie die Höhe der Rate R für den Fall, dass der Zinssatz 0 % p.a. ist. *[0/1 P.]*

d) Die Europäische Zentralbank legt einen sogenannten *Leitzinssatz* fest. Seit der Finanzmarktkrise 2008 ist der Leitzinssatz gesunken (siehe nachstehende Tabelle):

Zeit ab 1.1.2008 in Jahren	0	1	2	3	4	5	6	7
Leitzinssatz in Prozent	4,00	2,50	1,00	1,00	1,00	0,75	0,25	0,05

Datenquelle: https://www.finanzen.net/leitzins/@historisch [21.10.2020].

Die zeitliche Entwicklung des Leitzinssatzes soll mithilfe von exponentieller Regression durch die Funktion L modelliert werden.

$L(t) = a \cdot b^t$

t ... Zeit ab 1.1.2008 in Jahren
$L(t)$ ... Leitzinssatz zur Zeit t in Prozent

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion L auf. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem sich der Leitzinssatz gemäß der Funktion L jeweils halbiert. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Werkzeugproduktion

In einer Fabrik werden Werkzeuge hergestellt. Der Fabrik ist auch ein Shop für den Direktverkauf angeschlossen.

a) Im Shop ist der Erlös aus dem Verkauf eines bestimmten Schraubenziehers, der zu einem fixen Preis verkauft wird, erfasst worden:

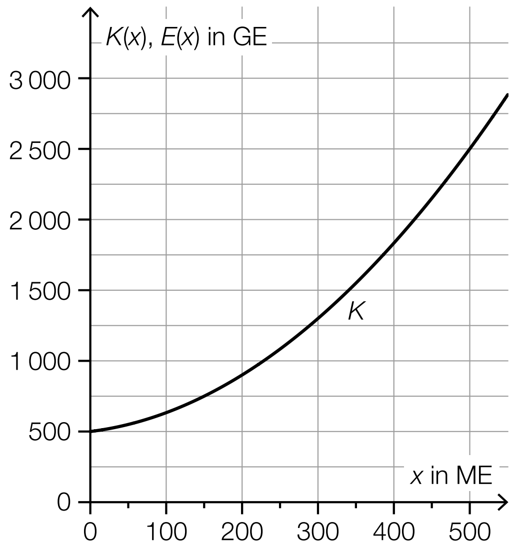
verkaufte Menge in ME	Erlös in GE
50	250
110	605

Die Daten in der obigen Wertetabelle sind allerdings fehlerhaft.

1) Weisen Sie nach, dass die obige Wertetabelle nicht zur Erlösfunktion des Schraubenziehers passen kann. *[0/1 P.]*

Es stellt sich heraus, dass nur der Erlös aus dem Verkauf von 50 ME korrekt erfasst wurde.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E ein. *[0/1 P.]*



x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinngrenzen ab.

untere Gewinngrenze: ____________________ ME

obere Gewinngrenze: ____________________ ME *[0/1 P.]*

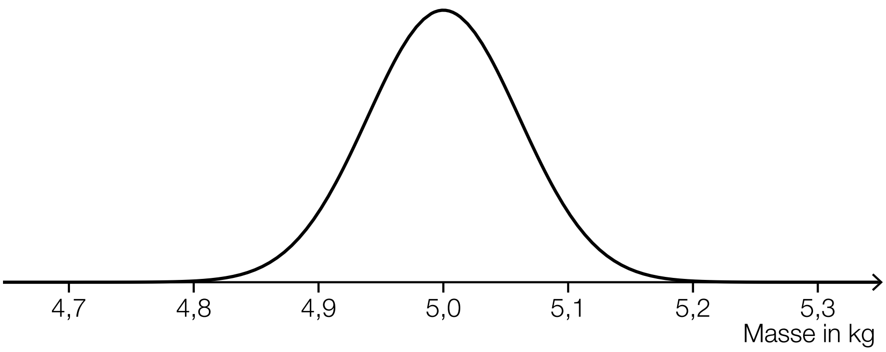
4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass für die Funktionen E und K eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Wenn für eine Menge x_0 der Zusammenhang ___①___ gilt, dann ist ___②___.

①	
$E(x_0) = K(x_0)$	☐
$E'(x_0) = K'(x_0)$	☐
$E(x_0) > K(x_0)$	☐

②	
x_0 kleiner als der Break-even-Point	☐
$x_0 = 0$	☐
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	☐

b) Für die Produktion eines bestimmten Werkzeugs wird ein Rohstoff in Packungen angeliefert. Die Masse dieser Packungen ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 5 kg. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Packung um höchstens 0,1 kg vom Erwartungswert abweicht, beträgt 90 %.

1) Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der obigen Abbildung. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

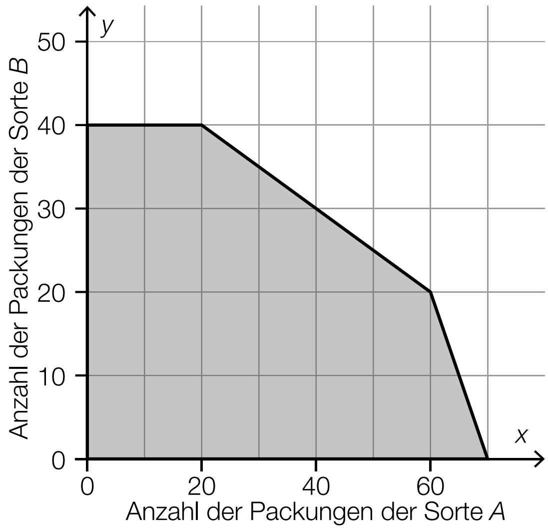
Müsli

Ein kleiner Betrieb produziert und verpackt verschiedene Sorten Müsli.

a) Es werden x Packungen *Fruchtgenuss* und y Packungen *Knabbertraum* hergestellt.
Für die Herstellung einer Packung der Sorte *Fruchtgenuss* werden 250 g Fruchtmischung und 235 g Getreideflocken benötigt.
Für die Herstellung einer Packung der Sorte *Knabbertraum* werden 175 g Fruchtmischung und 300 g Getreideflocken benötigt.
Insgesamt können maximal 22 kg Fruchtmischung und maximal 28 kg Getreideflocken verarbeitet werden.
Es sollen mindestens 20 Packungen *Knabbertraum* hergestellt werden.
Insgesamt können maximal 100 Packungen Müsli hergestellt werden.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das den obigen Sachverhalt beschreibt. *[0/1/2 P.]*

b) Der Betrieb liefert regelmäßig zwei Sorten Müsli an einen bestimmten Supermarkt. Jede Lieferung besteht aus x Packungen der Sorte A und y Packungen der Sorte B. Die zulässigen Liefermengen sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für eine Packung der Sorte A beträgt der Verkaufspreis € 3,00.
Für eine Packung der Sorte B beträgt der Verkaufspreis € 2,50.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion Z zur Beschreibung des Erlöses auf.

$Z(x, y) =$ ____ *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den maximalen Erlös in Euro. *[0/1 P.]*

Für die nächste Lieferung bestellt der Supermarkt 30 Packungen der Sorte B. Unter dieser Voraussetzung kann der Betrieb nur höchstens eine bestimmte Anzahl an Packungen der Sorte A liefern.

3) Vervollständigen Sie den nachstehenden Satz durch Eintragen der richtigen Zahl.

Der Betrieb kann unter dieser Voraussetzung höchstens __________ Packungen der Sorte A liefern. *[0/1 P.]*

c) Es werden zwei neue Sorten Müsli – *Knusperkorn* und *Fruchtstart* – produziert. Es werden x Packungen *Knusperkorn* und y Packungen *Fruchtstart* verkauft.

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Ungleichung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Von *Knusperkorn* werden mindestens doppelt so viele Packungen wie von *Fruchtstart* verkauft.	
Von *Knusperkorn* werden höchstens halb so viele Packungen wie von *Fruchtstart* verkauft.	

A	$x \geq 2 \cdot y$
B	$2 \cdot x \leq y$
C	$y \leq 2 \cdot x$
D	$x \leq 2 \cdot y$

d) In einer Marktstudie wird die Nachfrage nach einer bestimmten Müslisorte untersucht.

Die Sättigungsmenge liegt bei 180 Packungen.

Bei einem Preis von 10 Euro pro Packung beträgt die Nachfrage 80 Packungen.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$p_N(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 30$
x ... Anzahl der nachgefragten Packungen
$p_N(x)$ ... Preis bei der Nachfrage x in Euro pro Packung

1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Nachfrage bei einem Preis von 24 Euro pro Packung. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Parfumherstellung

In einem Betrieb wird Parfum hergestellt.

a) Die Gesamtkosten für die Produktion des Parfums *Desert* können durch die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden. Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME
c ... Parameter

1) Ermitteln Sie, für welche Produktionsmengen ein progressiver Kostenverlauf vorliegt. *[0/1 P.]*

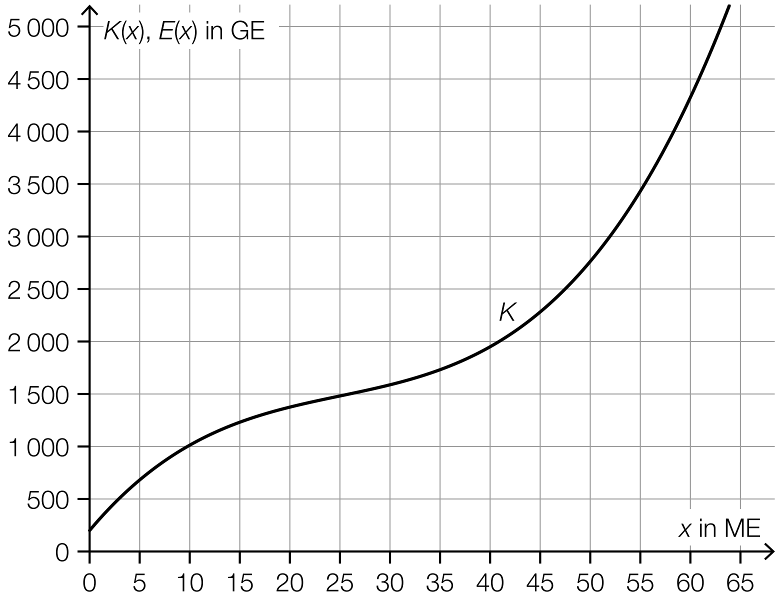
Bei ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen gilt folgende Bedingung:
Die Grenzkostenfunktion muss im gesamten Definitionsbereich positiv sein.

2) Weisen Sie nach, dass diese Bedingung nur für $c > 60$ erfüllt ist. *[0/1 P.]*

Die Fixkosten bei der Produktion dieses Parfums betragen 250 GE.
Es gilt: $c = 80$

3) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K auf. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gesamtkostenfunktion K für die Produktion des Parfums *Sunrise* dargestellt. Der Verkaufspreis dieses Parfums beträgt 75 GE/ME.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E ein. *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Gewinnbereich ab.

[_______ ; _______] (in ME) *[0/1 P.]*

c) Für die Gewinnfunktion G für die Produktion des Parfums *Moonlight* gilt:

$G(x) = -0{,}05 \cdot x^3 + 2{,}4 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 180$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro ME, der bei einem Absatz von 25 ME erzielt wird. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Küchengerät

Ein neues Küchengerät wird auf den Markt gebracht.

a) Die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts soll durch die beschränkte Wachstumsfunktion N_1 beschrieben werden.

$N_1(t) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen
$N_1(t)$ ... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück
S ... Sättigungsmenge in Stück
λ ... positiver Parameter

1) Argumentieren Sie mathematisch anhand der Funktionsgleichung, dass gilt: $N_1(0) = 0$
[0/1 P.]

Die Sättigungsmenge beträgt 5 000 Stück. Eine Woche nach Verkaufsbeginn wurden bereits 350 Stück verkauft.

2) Berechnen Sie λ. *[0/1 P.]*

Vereinfacht kann die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts für einen eingeschränkten Zeitraum auch durch die Funktion N_2 beschrieben werden.

$N_2(t) = 350 \cdot t$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen
$N_2(t)$ ... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück

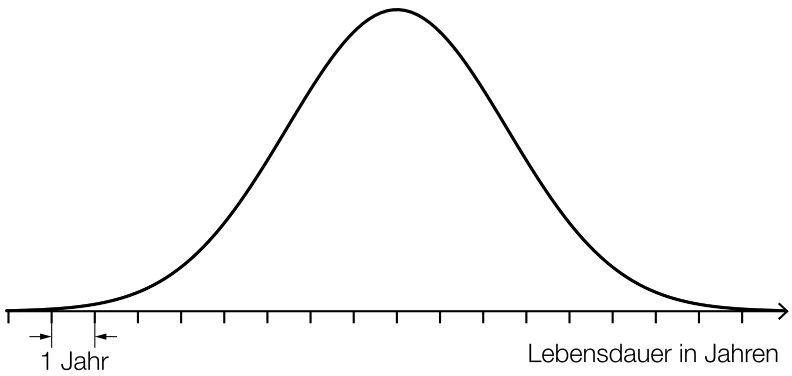
Jemand hat die Gleichungen $N_1(t) = N_2(t)$ und $N_1'(t) = N_2'(t)$ nach t gelöst.

3) Ordnen Sie den beiden Gleichungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.
[0/1 P.]

$N_1(t) = N_2(t)$	
$N_1'(t) = N_2'(t)$	

A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0; 1}.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall]0; 1[.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall [1; ∞[.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0}.

b) Die Lebensdauer des Küchengeräts wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Jahren angenommen. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung. Der Abstand zwischen zwei Markierungen auf der Achse entspricht 1 Jahr.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Küchengerät dieses Typs eine Lebensdauer von maximal 7 Jahren hat, beträgt 12 %.

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung diese Wahrscheinlichkeit. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. *[0/1 P.]*

c) Eine Marktforschungsanalyse zu diesem Küchengerät hat ergeben, dass folgende Mengen bei den jeweiligen Preisen abgesetzt werden können:

abgesetzte Menge in Stück	210	420	1 430	1 760
Preis in Euro/Stück	55	45	20	15

Die Kosten für die Produktion von 1 430 Stück betragen 28.000 Euro. Diese Menge wird zu einem Preis von 20 Euro/Stück abgesetzt.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht wird. *[0/1 P.]*

Mit den Daten aus der obigen Tabelle soll mithilfe von exponentieller Regression eine Preis-Absatz-Funktion p erstellt werden.

$p(x) = a \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

x ... abgesetzte Menge in Stück
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in Euro/Stück

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion p auf. *[0/1 P.]*

3) Begründen Sie, warum es gemäß diesem Modell keine Sättigungsmenge gibt. *[0/1 P.]*

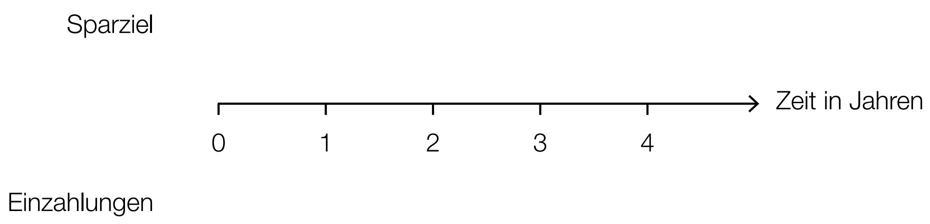
Aufgabe 8 (Teil B)

Esszimmereinrichtung

Petra möchte eine neue Esszimmereinrichtung kaufen, die € 4.000 kostet.

a) Petra hat vor 3 Jahren € 2.000 und vor 1 Jahr den Betrag *X* auf ein Konto eingezahlt, sodass sie nun als Sparziel den Betrag € 4.000 auf diesem Konto hat.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und Sparziel) auf der nachstehenden Zeitachse. *[0/1 P.]*



Die eingezahlten Beträge werden mit dem Jahreszinssatz *i* verzinst.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe des Betrags *X* auf. Verwenden Sie dabei die Beträge € 4.000 und € 2.000 sowie den Jahreszinssatz *i*.

$X =$ ____ *[0/1 P.]*

b) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch bei einem Versandhaus über Ratenzahlung finanzieren. Aufgrund der anfallenden Zinsen betragen die Kosten dabei monatlich € 1,65 pro € 100 offener Restschuld.

Petra berechnet für diese Ratenzahlung einen Jahreszinssatz von rund 21,7 %.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob Petras Berechnung stimmt. *[0/1 P.]*

Beim Kauf der Esszimmereinrichtung um € 4.000 über Ratenzahlung müssen 12 nachschüssige Monatsraten in Höhe von jeweils € 370 und ein Restbetrag, der zeitgleich mit der letzten Monatsrate fällig ist, bezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt 21,7 %.

2) Berechnen Sie die Höhe des Restbetrags. *[0/1 P.]*

Beim Kauf eines Möbelstücks mit dem Verkaufspreis W über Ratenzahlung müssen 3 nachschüssige Monatsraten der Höhe R bezahlt werden. Der zugehörige monatliche Aufzinsungsfaktor wird mit q_{12} bezeichnet.

3) Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$W = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	☐
$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = R \cdot q_{12}^3 + R \cdot q_{12}^2 + R \cdot q_{12}$	☐

c) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch über einen Kredit mit einer Laufzeit von 5 Jahren finanzieren.

Dazu wird eine gleichbleibende Annuität berechnet und ein Tilgungsplan erstellt.

Allerdings ist nach 5 Jahren die Schuld noch nicht vollständig getilgt, weil während der Laufzeit eine einmalige Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 4.000,00
1	€ 100,00	€ 760,99	€ 860,99	€ 3.239,01
2	€ 80,98	€ 780,01	€ 860,99	€ 2.459,00
3	€ 98,36	€ 762,63	€ 860,99	€ 1.696,37
4	€ 67,85	€ 793,13	€ 860,99	€ 903,24
5	€ 36,13	€ 824,86	€ 860,99	€ 78,38

1) Erklären Sie, woran man erkennen kann, dass während der Laufzeit eine Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.

[0/1 P.]

2) Berechnen Sie den Zinssatz im Jahr 5. *[0/1 P.]*

Der Kredit soll am Ende des Jahres 5 vollständig getilgt werden.
Dadurch verändert sich die letzte Zeile des obigen Tilgungsplans.

3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die beiden fehlenden Zahlen ein. *[0/1 P.]*

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 36,13			€ 0,00

Aufgabe 6 (Teil B)

Süßwarenproduktion

Ein Unternehmen produziert Süßwaren.

a) Eine bestimmte Sorte von Schokoriegeln wird im Werk A und im Werk B produziert. Aufgrund unterschiedlicher Produktionsbedingungen sind die Kostenfunktionen für die Produktion in den beiden Werken unterschiedlich.

x … Produktionsmenge in ME
$K_A(x)$ … Gesamtkosten im Werk A bei der Produktionsmenge x in GE
$K_B(x)$ … Gesamtkosten im Werk B bei der Produktionsmenge x in GE

Bei der Produktionsmenge x_1 sind die jeweiligen Gesamtkosten in beiden Werken gleich hoch.

1) Argumentieren Sie, dass bei der Produktionsmenge x_1 auch die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

Für K_A gilt:
$K_A(x) = 0{,}0001 \cdot x^2 + 0{,}17 \cdot x + 200$

Für K_B gilt:
K_B ist eine lineare Funktion. Die Fixkosten betragen 260 GE, die variablen Stückkosten betragen 0,3 GE/ME.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_B auf. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

b) Die Gesamtkosten bei der Produktion von Waffelschnitten können durch die lineare Kostenfunktion K beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x + b$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

In Abbildung 1 sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' und der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.

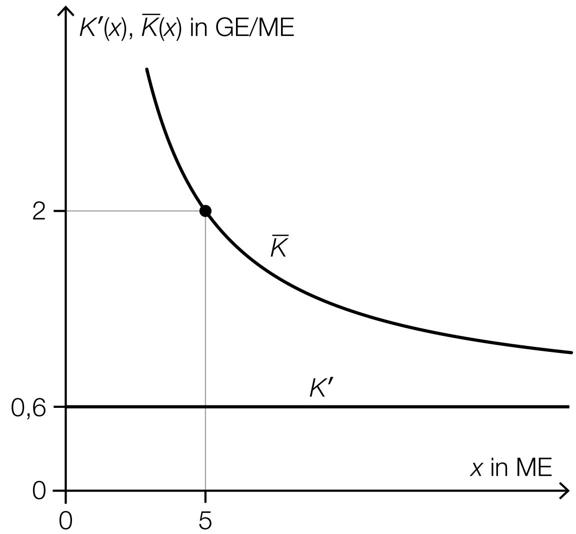


Abbildung 1

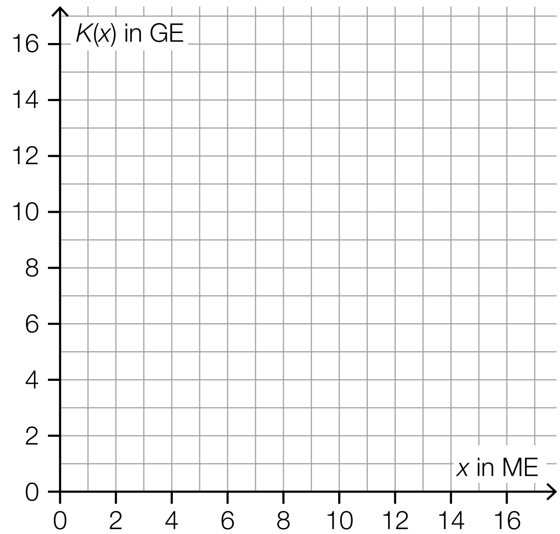


Abbildung 2

1) Geben Sie die Steigung a der Kostenfunktion K an.

a = __________ GE/ME *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der Kostenfunktion K ein. *[0/1 P.]*

c) Für die Produktion von Schokolinsen sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$K(x) = 0{,}0003 \cdot x^3 - 0{,}017 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 40$
$E(x) = 1{,}5 \cdot x$

x … produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[0/1 P.]*

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}0003 \cdot x^2 - 0{,}017 \cdot x + 0{,}4 + \frac{40}{x}$$

$$0{,}0006 \cdot x - 0{,}017 - \frac{40}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx 52{,}5$$

3) Interpretieren Sie die Zahl 52,5 im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Autokauf

Clara möchte ein neues Auto kaufen.

a) Eine Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einer Laufzeit von 7 Jahren an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 216.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz i_{12} für diesen Kredit. *[0/1 P.]*

Mit dem monatlichen Aufzinsungsfaktor $q_{12} = 1 + i_{12}$ führt Clara die nachstehende Berechnung durch.

$$X = 15\,000 \cdot q_{12}^{24} - 216 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von X im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Eine andere Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einem Zinssatz von 6,2 % p. a. an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 219,35.

1) Berechnen Sie den zu 6,2 % p. a. äquivalenten Monatszinssatz. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans. *[0/1 P.]*

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 15.000,00
1				

c) Clara hat vor 5 Jahren den Geldbetrag B_1 und vor 3 Jahren den Geldbetrag B_2 auf ein Konto eingezahlt. Der Zinssatz beträgt 1 % p. a.

1) Ordnen Sie den beiden Beschreibungen jeweils den passenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.	
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.	

A	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^3$
B	$B_1 + B_2 \cdot 1{,}01^{-2}$
C	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^2$
D	$B_1 \cdot 1{,}01^2 + B_2$

d) Der Wert eines Autos verringert sich im Laufe der Zeit. Für ein bestimmtes Auto ist dessen Wert nach 1 Jahr und nach 3 Jahren in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Zeit nach dem Kauf in Jahren	1	3
Wert des Autos in €	15 000	10 000

Der Wert des Autos kann im Zeitintervall [1; 3] näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Kauf in Jahren
$f(t)$ ... Wert des Autos zur Zeit t in €

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Sonnencreme

a) Sonnencreme soll vor den UV-A- und UV-B-Strahlen der Sonne schützen.
Für Sonnencremes gelten folgende zwei Kriterien:

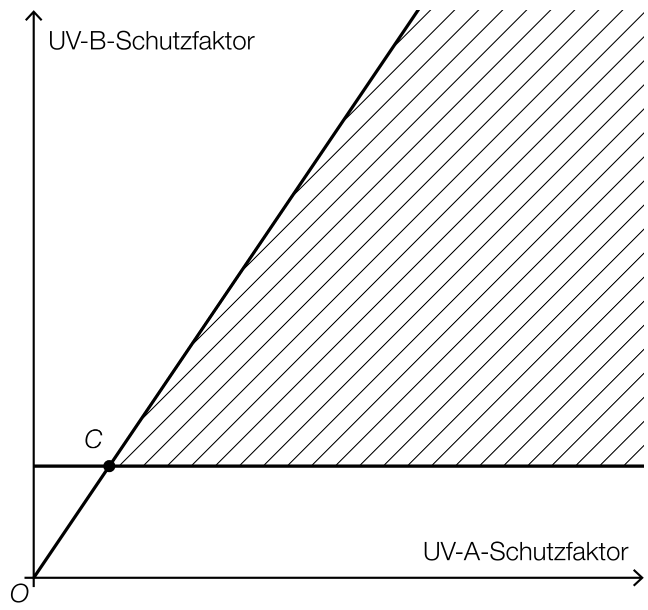
I: Der UV-A-Schutzfaktor muss mindestens ein Drittel des UV-B-Schutzfaktors betragen.
II: Der UV-B-Schutzfaktor muss mindestens 6 betragen.

a ... UV-A-Schutzfaktor
b ... UV-B-Schutzfaktor

1) Stellen Sie die zwei Ungleichungen auf, die diesen beiden Kriterien entsprechen.

[0/1/2 P.]

In der nachstehenden Abbildung ist der zugehörige Lösungsbereich dargestellt.



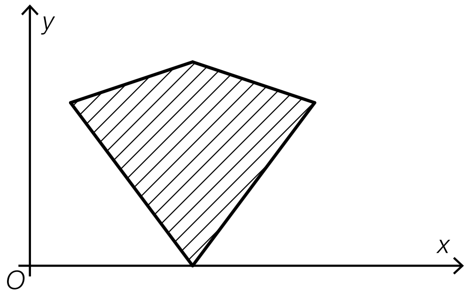
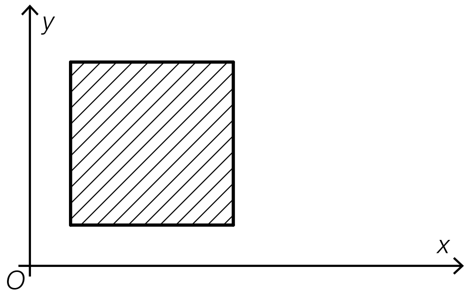
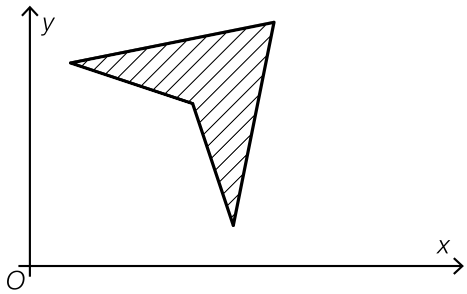
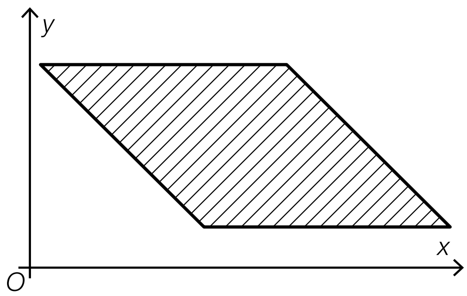
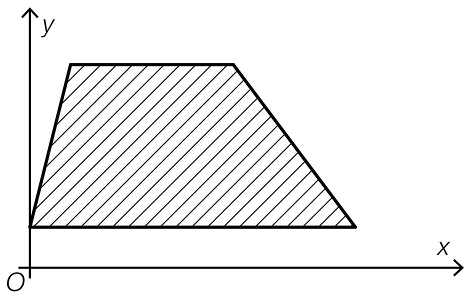
2) Geben Sie die Koordinaten des Punktes C an.

C = (_____|_____) *[0/1 P.]*

b) Die Produktionsmengen der Sonnencreme der Marken *Smile* und *Dance* werden durch vier lineare Ungleichungen eingeschränkt.

x ... Produktionsmenge der Marke *Smile*
y ... Produktionsmenge der Marke *Dance*

1) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die <u>keinen</u> möglichen Lösungsbereich darstellt.
[1 aus 5] *[0/1 P.]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

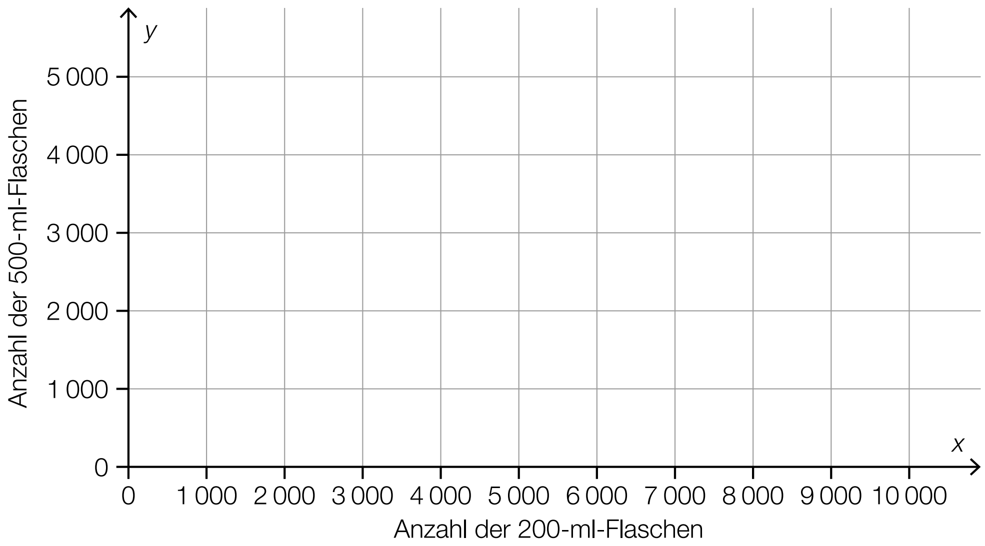
c) Die Sonnencreme der Marke *Sun Protect* soll in 200-ml-Flaschen und in 500-ml-Flaschen abgefüllt werden. Dabei gilt das folgende Ungleichungssystem:

I: $x + y \geq 5000$
II: $0{,}2 \cdot x + 0{,}5 \cdot y \leq 2000$
III: $y \geq 1500$

x ... Anzahl der 200-ml-Flaschen
y ... Anzahl der 500-ml-Flaschen

1) Interpretieren Sie die Ungleichung I im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Lösungsbereich des Ungleichungssystems ein. *[0/1 P.]*



Wenn die Nichtnegativitätsbedingungen ($x \geq 0$, $y \geq 0$) zum Ungleichungssystem hinzugefügt werden, ändert sich der Lösungsbereich des Ungleichungssystems nicht.

3) Begründen Sie, warum diese Aussage richtig ist. *[0/1 P.]*

Die 200-ml-Flaschen der Marke *Sun Protect* werden um 3,80 €/Stück verkauft.
Die 500-ml-Flaschen der Marke *Sun Protect* werden um 8,75 €/Stück verkauft.

4) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion Z zur Beschreibung des Erlöses auf.

$Z(x, y) =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Abfindung

Vier Geschwister haben gemeinsam ein Haus geerbt.
Martha übernimmt das Haus und muss dafür ihren Geschwistern Andreas, Beate und Christian zum Zeitpunkt der Übernahme Geldbeträge in Höhe von jeweils € 80.000 auszahlen. Ein solcher Geldbetrag wird *Abfindung* genannt.

a) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Andreas soll durch 3 Zahlungen erfolgen:

€ 25.000 nach 3 Jahren,
€ 30.000 nach 6 Jahren und
€ 35.000 nach 9 Jahren.

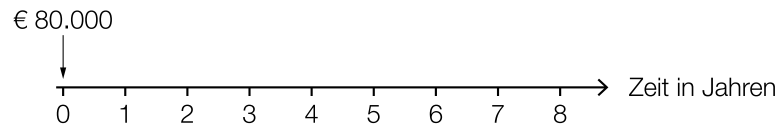
1) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des zugehörigen Jahreszinssatzes i auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz i. *[0/1 P.]*

b) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Beate soll durch Zahlungen erfolgen, die durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden.

$$80\,000 = 20\,000 + R \cdot \frac{1{,}02^4 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^6}$$

1) Stellen Sie den Betrag € 20.000 und die Raten R auf der nachstehenden Zeitachse dar. *[0/1 P.]*



c) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Christian soll durch Quartalsraten in Höhe von jeweils € 4.000 und eine Restzahlung erfolgen. Die erste Zahlung erfolgt nach 1 Jahr. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

$1{,}02^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}004962...$

2) Berechnen Sie die Anzahl der vollen Quartalsraten. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die 1 Quartal nach der letzten vollen Quartalsrate ausgezahlt wird. *[0/1 P.]*

d) Zur Finanzierung der Hausübernahme nimmt Martha einen Kredit auf.

Die vorletzte Zeile des Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
15	€ 319,43	€ 9.680,57	€ 10.000,00	€ 966,95

1) Zeigen Sie, dass der Zinssatz 3 % p. a. beträgt. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie die nachstehende letzte Zeile des Tilgungsplans. *[0/1 P.]*

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
16				€ 0,00

Aufgabe 7 (Teil B)

Farben und Lacke

Ein Unternehmen stellt verschiedene Farben und Lacke her.

a) Die Gesamtkosten für die Produktion von Acrylfarbe werden durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

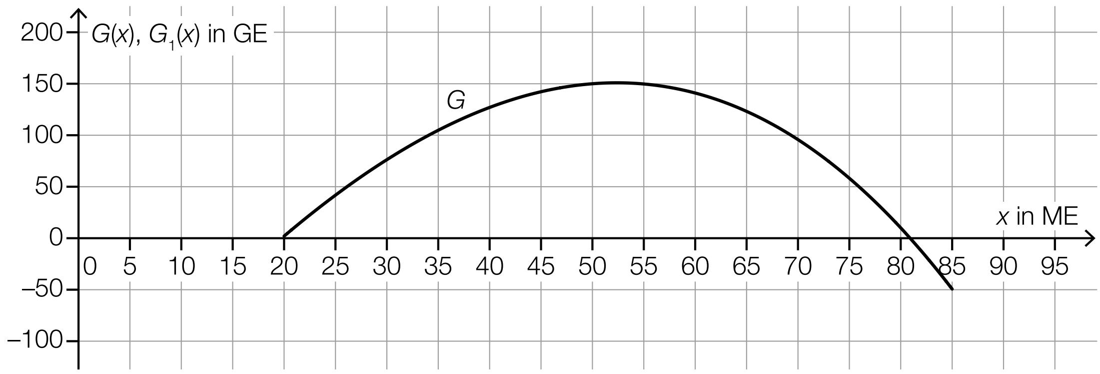
1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Wenn ___①___ ist, dann kann K keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion sein, weil in diesem Fall ___②___.

①	
$b < 0$	☐
$c < 0$	☐
$b < c$	☐

②	
die Fixkosten negativ sind	☐
keine Kostenkehre existiert	☐
die Grenzkosten bei der Produktionsmenge 0 negativ sind	☐

b) Der Graph der Gewinnfunktion G für Acrylfarbe ist in der nachstehenden Abbildung im Intervall [20; 85] dargestellt.



x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Die Fixkosten steigen um 50 GE. Die variablen Kosten und der Erlös bleiben unverändert. Der Gewinn unter diesen veränderten Bedingungen wird durch die Gewinnfunktion G_1 beschrieben.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der neuen Gewinnfunktion G_1 im Intervall [20; 85] ein. *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die untere Gewinngrenze ab, die sich unter diesen veränderten Bedingungen ergibt. *[0/1 P.]*

c) Für einen bestimmten Kunstharzlack beträgt der Höchstpreis 60 €/L. Bei einem Preis von 20 €/L können 200 L dieses Lacks abgesetzt werden.
Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge kann für diesen Lack durch die lineare Preis-Absatz-Funktion p beschrieben werden.

x … Absatzmenge in L
$p(x)$ … Preis bei der Absatzmenge x in €/L

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Preis-Absatz-Funktion p auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Preis-Absatz-Funktion p im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[0/1 P.]*

d) Das Unternehmen stellt auch Wandfarbe her.
In einem Heimwerker-Ratgeber wird empfohlen, mehr Farbe als vom Hersteller angegeben zu kaufen. Konkret werden dort folgende Empfehlungen gegeben:

- Für die zusätzlichen Flächen bei Tür- und Fensterrahmen sollten um insgesamt 10 % mehr Farbe als vom Hersteller angegeben gekauft werden.
- Um ganz sicher genug Farbe zu haben, sollte diese berechnete Menge anschließend nochmals um 20 % erhöht werden.

Auf den Farbkübeln ist angegeben, dass für 1 m² Wandfläche 0,14 L Farbe benötigt werden.

Es soll eine Formel für die Farbmenge M (in Litern) aufgestellt werden, die man für eine Wandfläche von A Quadratmetern benötigt. Dabei sollen die obigen Empfehlungen des Heimwerker-Ratgebers berücksichtigt werden.

1) Stellen Sie diese Formel auf.

$M =$ ____________________________________ *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Thermometer

Ein digitales Thermometer wird zur Messung der Temperatur des Wassers in einem Becken verwendet. Ausgehend von einem Startwert nähert sich die angezeigte Temperatur der tatsächlichen Temperatur des Wassers an.

a) Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei einer bestimmten Messung kann durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 38 - 6 \cdot 0{,}758^t$

t … Zeit nach Beginn der Messung in s
$f(t)$ … angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

1) Interpretieren Sie die Zahl 38 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Sobald die momentane Änderungsrate der angezeigten Temperatur unter 0,01 °C/s sinkt, ertönt ein Piepton.

2) Berechnen Sie, wie viele Sekunden nach Beginn der Messung der Piepton ertönt. *[0/1 P.]*

b) Zu Beginn einer anderen Messung zeigt das digitale Thermometer eine Temperatur von 33,0 °C an. Nach 4 s zeigt es eine Temperatur von 36,0 °C an.
Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei dieser Messung kann durch die Funktion g beschrieben werden.

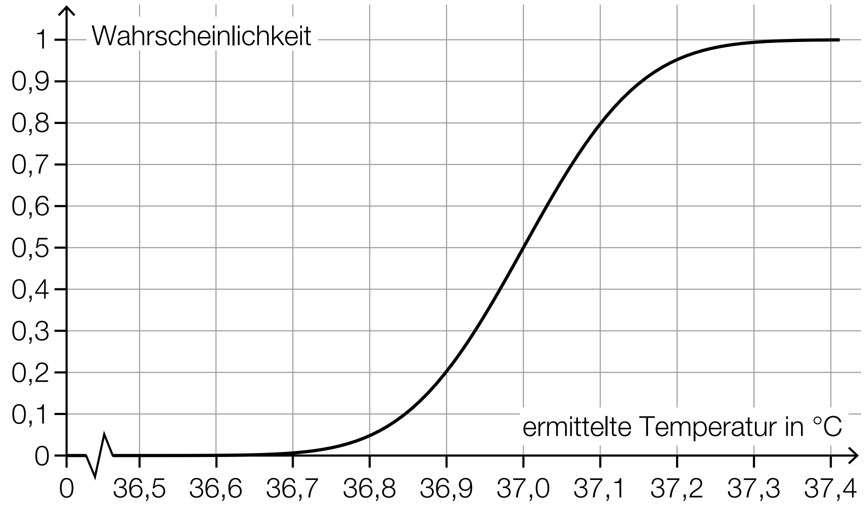
$g(t) = c - a \cdot e^{-0{,}275 \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn der Messung in s
$g(t)$ … angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a und c. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Parameter a und c. *[0/1 P.]*

c) Ein Unternehmen produziert Thermometer. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden die produzierten Thermometer unter jeweils gleichen Bedingungen getestet.
Die ermittelten Temperaturen können als annähernd normalverteilt angenommen werden.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = ____________________ °C *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit ab, dass die ermittelte Temperatur höchstens 36,9 °C beträgt. *[0/1 P.]*

3) Ermitteln Sie die Standardabweichung σ. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

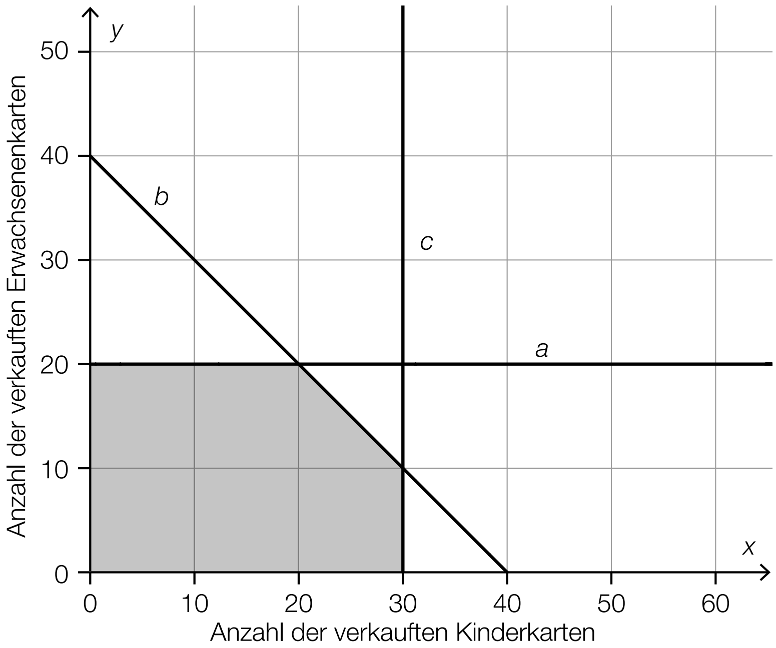
Waldführungen

Ein Naturschutzzentrum bietet verschiedene Waldführungen an.

a) Bei einer Tagestour nehmen Kinder und Erwachsene teil. Insgesamt können bei einer Tour maximal 30 Personen teilnehmen.
Aus Sicherheitsgründen müssen dabei mindestens so viele Erwachsene wie Kinder teilnehmen.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die Bedingungen für die Teilnahme von x Kindern und y Erwachsenen beschreibt. *[0/1/2 P.]*

b) Für eine Familientour werden die möglichen Verkaufszahlen von Erwachsenenkarten und Kinderkarten untersucht. In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Anzahl der verkauften Kinderkarten und Erwachsenenkarten dargestellt.



1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Der Lösungsbereich liegt _____①_____, da _____②_____ für die Familientour verkauft werden können.

①	
unterhalb der Geraden *a*	☐
unterhalb der Geraden *b*	☐
links von der Geraden *c*	☐

②	
höchstens 30 Kinderkarten	☐
höchstens 20 Kinderkarten	☐
mindestens 40 Karten	☐

Die Zielfunktion Z beschreibt den Erlös in Euro bei einer Familientour:

$Z(x, y) = 4 \cdot x + 6 \cdot y$

x ... Anzahl der verkauften Kinderkarten
y ... Anzahl der verkauften Erwachsenenkarten

Dieser Erlös soll maximiert werden.

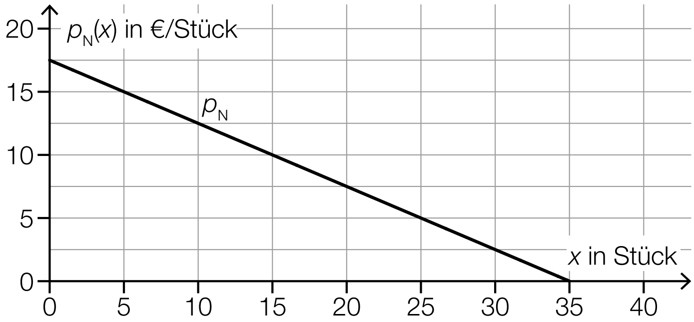
2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, auf der der optimale Wert der Zielfunktion im Lösungsbereich angenommen wird. *[0/1 P.]*

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die optimalen Verkaufszahlen ab. *[0/1 P.]*

4) Ermitteln Sie den maximalen Erlös. *[0/1 P.]*

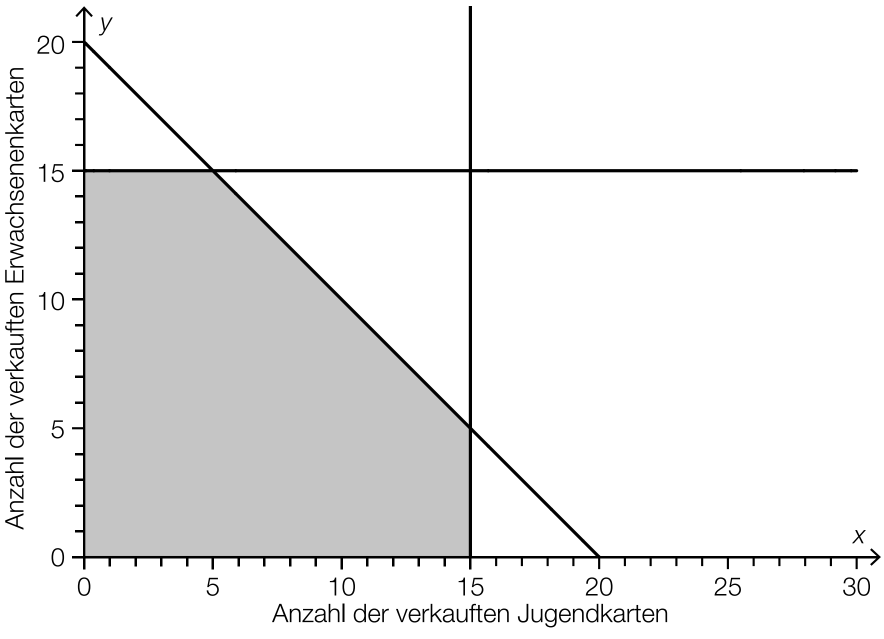
c) In den Sommerferien werden Abenteuertouren angeboten. Für diese Touren werden die möglichen Verkaufszahlen von Jugendkarten und Erwachsenenkarten untersucht.

Die tägliche Nachfrage nach Jugendkarten ist vom Preis der Karten abhängig. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage p_N für die Jugendkarten.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenige Nachfrage nach Jugendkarten ab, bei der der Preis 12,50 €/Stück beträgt. *[0/1 P.]*

In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Anzahl der verkauften Jugendkarten und Erwachsenenkarten bei Abenteuertouren dargestellt.



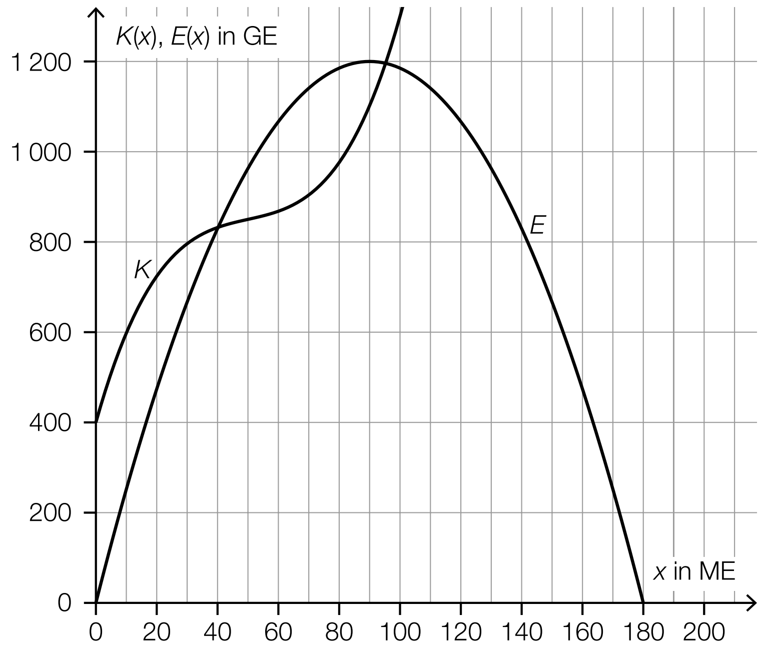
2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die oben ermittelte Nachfrage nach Jugendkarten an einem Tag erfüllt werden kann, an dem 13 Erwachsenenkarten verkauft werden. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Scheiben für PKWs

Ein Betrieb stellt Frontscheiben und Heckscheiben für PKWs her.

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der quadratischen Erlösfunktion E für Frontscheiben eines bestimmten Typs dargestellt.



1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf. *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage auf. *[0/1 P.]*

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinnzone ab.

[_______ ; _______] *[0/1 P.]*

b) Die variablen Kosten bei der Produktion von Heckscheiben eines bestimmten Typs können durch die Funktion K_v beschrieben werden.

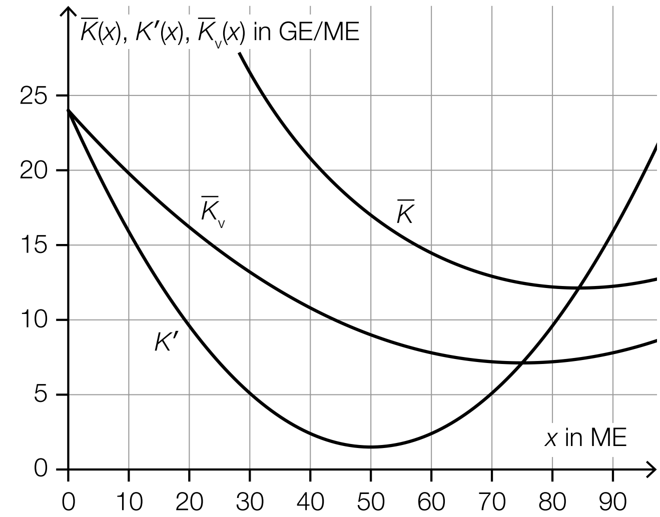
$K_v(x) = 0{,}0029 \cdot x^3 - 0{,}45 \cdot x^2 + 24 \cdot x$

x ... produzierte Menge in ME
$K_v(x)$ ... variable Kosten bei der produzierten Menge x in GE

Die Fixkosten betragen 450 GE.

1) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze. *[0/1 P.]*

In der nebenstehenden Abbildung sind der Graph der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$, der Graph der Grenzkostenfunktion K' und der Graph der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



2) Kreuzen Sie diejenige Größe an, die nicht aus der obigen Abbildung abgelesen werden kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Kostenkehre	☐
Fixkosten	☐
Betriebsminimum	☐
Betriebsoptimum	☐
kurzfristige Preisuntergrenze	☐

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N für Heckscheiben dieses Typs ist gegeben durch:

$p_N(x) = -0{,}16 \cdot x + 30$

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

3) Geben Sie den Höchstpreis an. *[0/1 P.]*

4) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis. *[0/1 P.]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Zinsentwicklung

Die Zinssätze für Kredite und Spareinlagen unterliegen zeitabhängigen Schwankungen.

a) Der Zinssatz für einen Kredit bei einer Bank ist unter anderem auch davon abhängig, welchen Verwendungszweck dieser hat.
Konsumkredite dienen der Finanzierung von Konsumgütern oder Dienstleistungen.
Immobilienkredite dienen der Wohnbaufinanzierung.

In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Zinssätze für beide Verwendungszwecke im Zeitraum von 2000 bis 2004 in Österreich dargestellt.

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004
Zinssatz für Konsumkredite in % p. a.	6,63	6,69	6,06	5,42	5,18
Zinssatz für Immobilienkredite in % p. a.	5,87	5,93	5,35	4,41	3,90

Datenquelle: https://www.oenb.at/Statistik/Standardisierte-Tabellen/zinssaetze-und-wechselkurse/Zinssaetze-der-Kreditinstitute.html [04.08.2021].

1) Stellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden für den Zusammenhang zwischen dem Zinssatz für Konsumkredite x und dem Zinssatz für Immobilienkredite y im angegebenen Zeitraum auf. *[0/1 P.]*

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um diesen Zusammenhang zu beschreiben. *[0/1 P.]*

Der Zinssatz im Jahr 2005 betrug für Konsumkredite 4,89 % p. a. und für Immobilienkredite 3,58 % p. a.

3) Berechnen Sie die Differenz zwischen dem tatsächlichen Zinssatz für Immobilienkredite im Jahr 2005 und dem mithilfe der Regressionsgeraden ermittelten entsprechenden Zinssatz. *[0/1 P.]*

b) Bei Abschluss eines Kreditvertrags kann festgelegt werden, ob der Zinssatz während der gesamten Laufzeit konstant bleibt oder ob sich der Zinssatz entsprechend der aktuellen Marktlage immer wieder verändert.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt aus einem Tilgungsplan dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80		€ 7.000,00	

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich der Zinssatz innerhalb der dargestellten 3 Jahre verändert hat. *[0/1 P.]*

2) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Beträge im Jahr 3 ein. *[0/1 P.]*

c) Ein Geldbetrag B wird 2 Jahre lang mit dem Jahreszinssatz i_0 verzinst, danach weitere 3 Jahre mit einem geänderten Jahreszinssatz i_1.

1) Stellen Sie eine Formel für den Endwert E am Ende dieser 5 Jahre auf. Verwenden Sie dabei B, i_0 und i_1.

$E =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

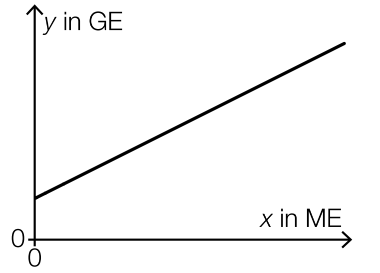
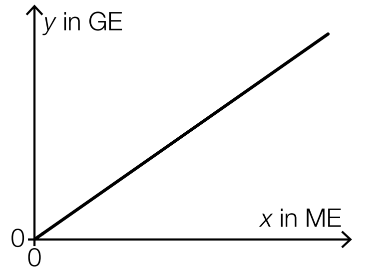
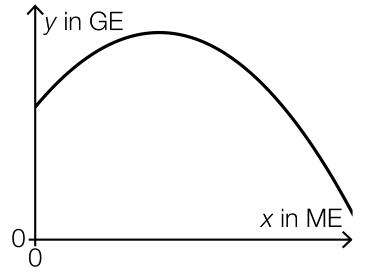
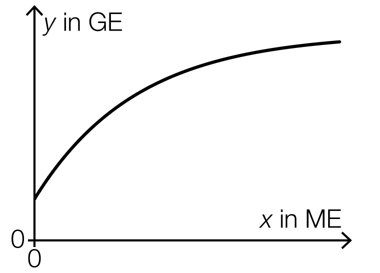
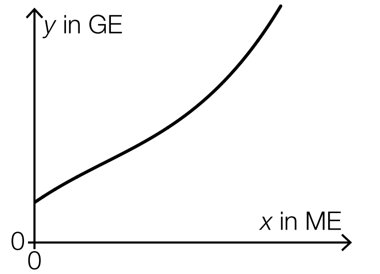
2) Berechnen Sie für $i_0 = 3\ \%$ und $i_1 = 1\ \%$ denjenigen gleichbleibenden Jahreszinssatz i, bei dem der Betrag B innerhalb von 5 Jahren auf den gleichen Endwert E anwächst. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

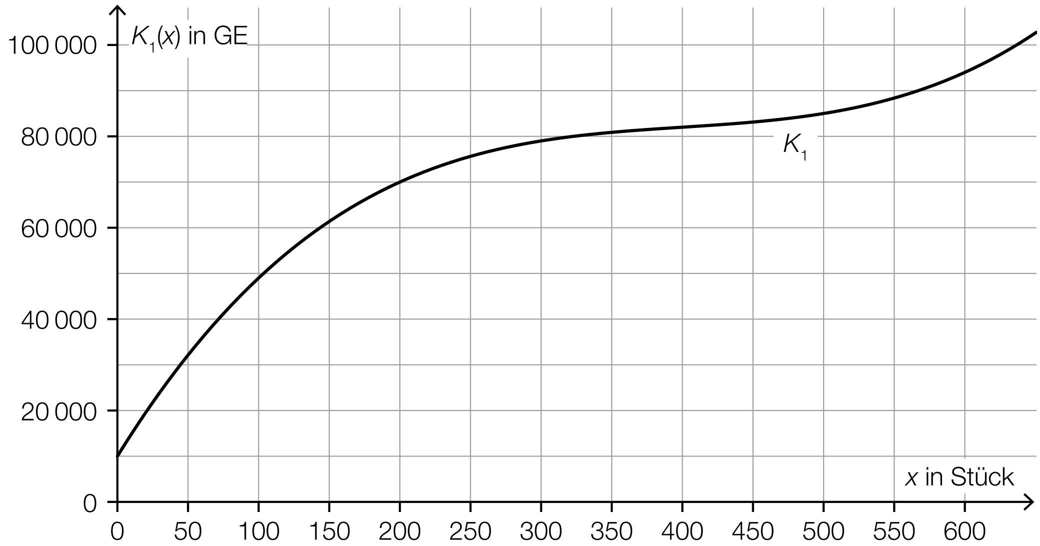
Möbel

a) Im Folgenden sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Nur einer dieser Graphen kann der Graph einer Erlösfunktion sein.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K_1 eines Betriebs bei der Produktion von Kleiderschränken dargestellt.



x ... Produktionsmenge in Stück
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Lesen Sie das größtmögliche Produktionsintervall ab, in dem der Verlauf der Kostenfunktion K_1 degressiv ist. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Stückkosten bei einer Produktion von 200 Stück. *[0/1 P.]*

Die Fixkosten können um 10 % reduziert werden.

3) Begründen Sie, warum sich die Grenzkostenfunktion dadurch nicht ändert. *[0/1 P.]*

c) Die Kostenfunktion K_2 eines Betriebs bei der Produktion von Kommoden ist gegeben durch:

$K_2(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + a \cdot x + 3000$
x ... Produktionsmenge in Stück
$K_2(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 100 Kommoden hat der Betrieb Gesamtkosten von 35 000 GE.

1) Berechnen Sie den Koeffizienten a der Kostenfunktion K_2. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie das Betriebsoptimum. *[0/1 P.]*

Der Break-even-Point wird bei einem Verkauf von 60 Kommoden erreicht.

3) Berechnen Sie den Preis pro Kommode bei dieser verkauften Menge. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Porzellan

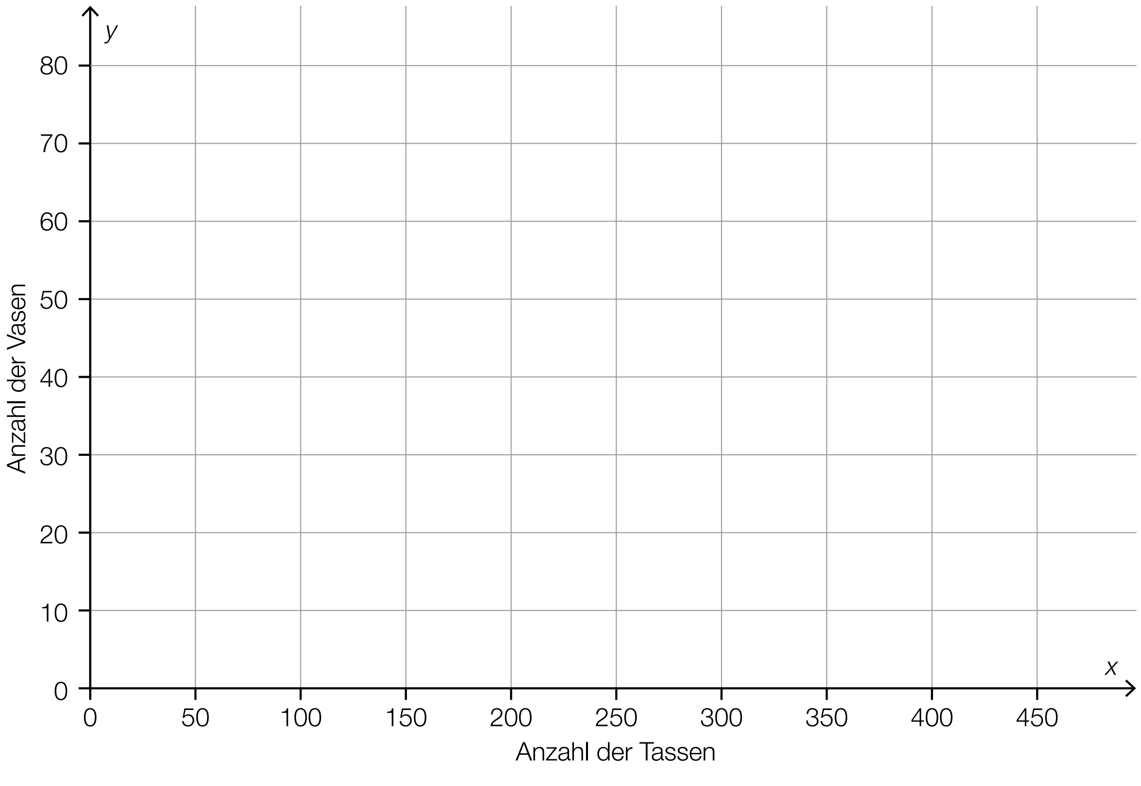
Ein Betrieb stellt Tassen und Vasen aus Porzellan her.

a) Am Standort *A* des Betriebs gelten folgende Produktionseinschränkungen:

Für die Produktion einer Tasse werden 0,2 kg Porzellanmasse benötigt.
Für die Produktion einer Vase wird 1 kg Porzellanmasse benötigt.
Insgesamt können maximal 80 kg Porzellanmasse verarbeitet werden.
Es können maximal 300 Tassen und maximal 50 Vasen produziert werden.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die Produktionseinschränkungen für x Tassen und y Vasen beschreibt. *[0/1/2 P.]*

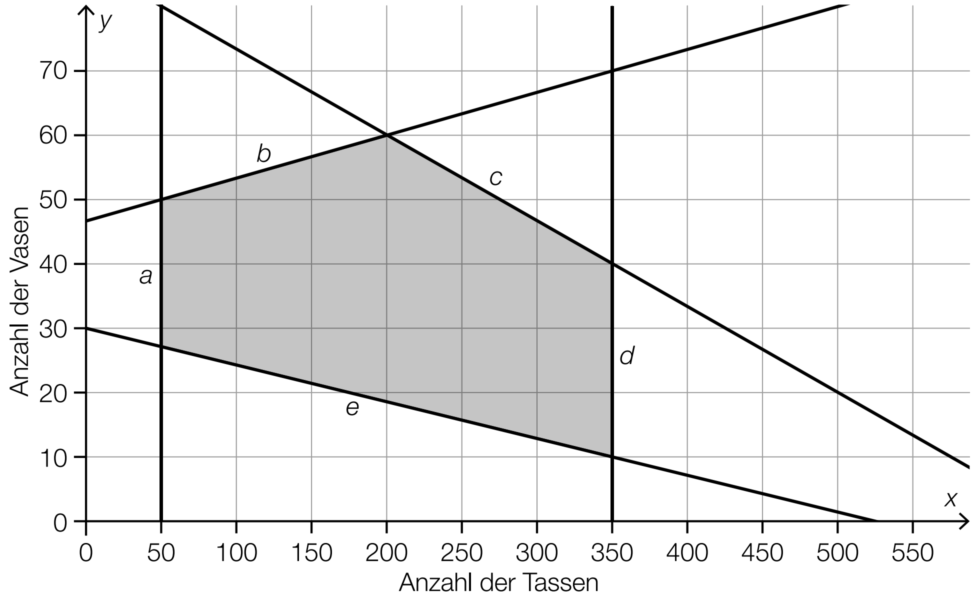
2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems ein. *[0/1 P.]*



Jemand behauptet: „Wenn 90 kg Porzellanmasse verarbeitet werden, ist es möglich, 250 Tassen und 40 Vasen zu produzieren."

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

b) Die Produktionseinschränkungen am Standort *B* des Betriebs sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der Geraden *e* durch Eintragen der fehlenden Zahlen.

$y = \boxed{} \cdot x + \boxed{}$ *[0/1 P.]*

2) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die entsprechende Gerade zu. *[0/1 P.]*

Eine Gleichung der Geraden ist gegeben durch: $-x + 15 \cdot y = 700$	
Die zugehörige Ungleichung beschreibt die Mindestproduktionsmenge für eines der beiden Produkte.	

A	*a*
B	*b*
C	*c*
D	*d*

Der Verkaufspreis für eine Tasse beträgt € 8, jener für eine Vase € 12.
Der Erlös soll maximiert werden.

3) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion *E* für den Erlös auf.

$E(x, y) =$ ____ *[0/1 P.]*

4) Ermitteln Sie die optimalen Produktionsmengen für den Standort *B*. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Öffentlicher Verkehr in Wien

a) In Wien kostet die Jahreskarte für öffentliche Verkehrsmittel bei einmaliger Zahlung € 365. Alternativ dazu kann die Jahreskarte auch durch 12 monatliche Zahlungen zu je € 33 bezahlt werden.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz, bei dem 12 vorschüssige Monatsraten in Höhe von € 33 einem Barwert von € 365 entsprechen. *[0/1 P.]*

b) Die Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten für öffentliche Verkehrsmittel in Wien lässt sich für den Zeitraum von 2011 bis 2016 näherungsweise durch die Funktion N beschreiben.

$N(t) = 815\,000 - 450\,000 \cdot a^t$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2011
$N(t)$ … Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten zur Zeit t
a … Parameter mit $0 < a < 1$

1) Erklären Sie, warum der Ordinatenabschnitt (Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse) des Graphen der Funktion N nicht vom Parameter a abhängt. *[0/1 P.]*

Im Jahr 2015 wurden 700 000 Jahreskarten verkauft.

2) Berechnen Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

Es wird davon ausgegangen, dass die Funktion N auch die zukünftige Entwicklung der Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten richtig beschreibt.

3) Interpretieren Sie die Zahl 815 000 in der obigen Gleichung der Funktion N im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

c) Personen, die ein öffentliches Verkehrsmittel ohne gültige Fahrkarte benützen, werden als *Schwarzfahrer/innen* bezeichnet.
In der nachstehenden Tabelle ist der Anteil der Schwarzfahrer/innen in den öffentlichen Verkehrsmitteln in Wien für verschiedene Jahre angegeben.

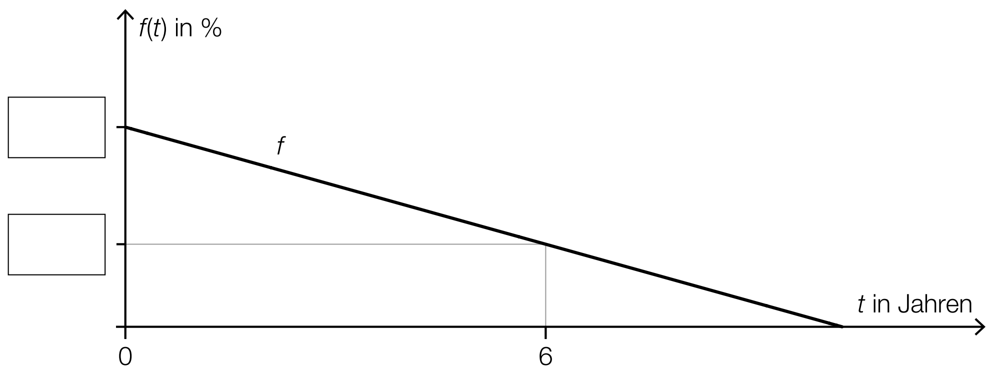
Jahr	2012	2013	2014	2015	2016
Anteil der Schwarzfahrer/innen in Prozent bezogen auf alle kontrollierten Personen	2,7	2,4	2,1	1,8	1,7

Datenquelle: https://wien.orf.at/v2/news/stories/2822992/ [27.10.2017].

Der Anteil der Schwarzfahrer/innen in Prozent soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2012. *[0/1 P.]*

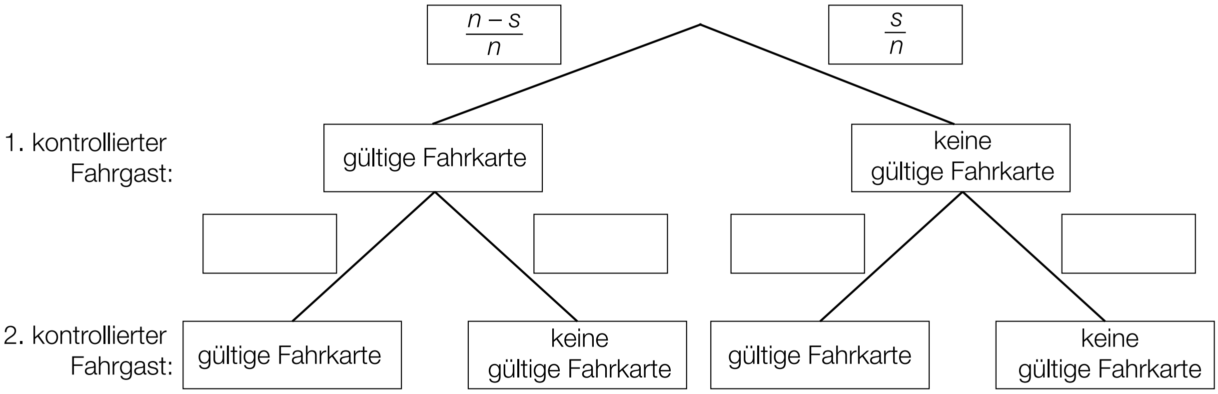
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Regressionsfunktion f dargestellt.



2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

d) In einer Straßenbahn befinden sich insgesamt n Fahrgäste, wovon s Fahrgäste keine gültige Fahrkarte besitzen. Eine Kontrollorin wählt nacheinander 2 Fahrgäste zufällig aus.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*



Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass genau 1 der beiden kontrollierten Fahrgäste keine gültige Fahrkarte besitzt.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der diese Wahrscheinlichkeit angibt. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	☐
$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{s-1}{n-1}$	☐

Aufgabe 6 (Teil B)

Streaming

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen.
Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.
Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. *[1 Punkt]*
2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$. *[1 Punkt]*
3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt. *[1 Punkt]*

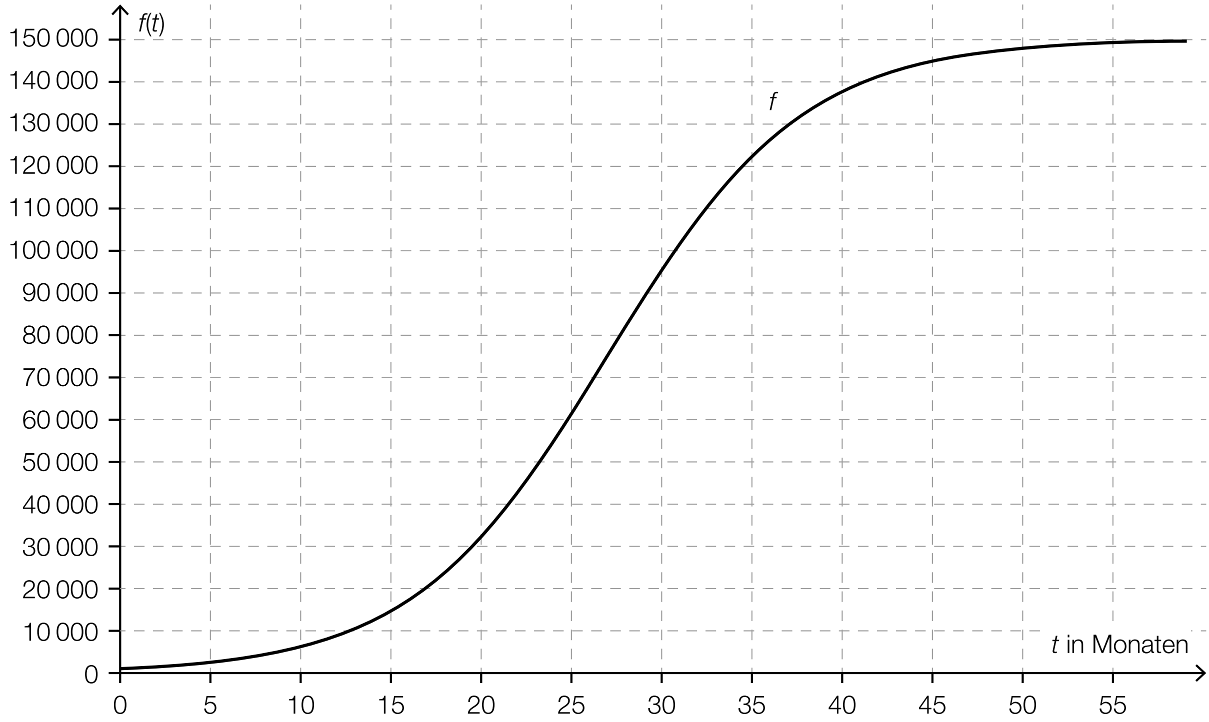
b) In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Kunden für einen bestimmten Zeitraum angegeben.

Zeit t in Monaten	18	20	24	26	28
Anzahl der Kunden	23 800	32 200	54 600	68 000	81 900

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. *[1 Punkt]*

c) Die über einen längeren Zeitraum betrachtete zeitliche Entwicklung der Anzahl der Kunden kann näherungsweise durch die logistische Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Zeitpunkt des stärksten Wachstums der Anzahl der Kunden ab. *[1 Punkt]*

Für die Funktion f gilt: $f(t) = \frac{150\,000}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$

Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

2) Ermitteln Sie die Parameter c und λ der Funktion f. *[2 Punkte]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Wohnanlage

Eine Wohnanlage wird saniert.

a) Die Kosten für die Sanierung in Höhe von € 52.647,60 werden proportional zur Wohnungsgröße aufgeteilt.
Die jeweiligen Größen der 4 Wohnungen sind: 52 m², 60 m², 78 m² und 102 m².

1) Berechnen Sie den Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung in Euro. *[1 Punkt]*

b) Zur Finanzierung der Sanierung nehmen die Wohnungseigentümer einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf.
Sie vereinbaren mit der Bank, den Kredit durch 6 vorschüssige Jahresraten R zu tilgen. Die erste Jahresrate ist nach 3 Jahren fällig. Für die Rückzahlung wird der Jahreszinssatz i vereinbart.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Kreditbetrag und Jahresraten) auf einer Zeitachse. *[1 Punkt]*
2) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R. Verwenden Sie dabei den Jahreszinssatz i. *[1 Punkt]*

Unmittelbar vor dem Bezahlen der 1. Jahresrate entscheiden sich die Wohnungseigentümer dafür, bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen den Kredit mit nur 3 Jahresraten zu tilgen.

3) Argumentieren Sie, dass diese neuen Jahresraten weniger als doppelt so hoch wie die zuvor vereinbarten Jahresraten sind. *[1 Punkt]*

c) Eine andere Bank unterbreitet den Wohnungseigentümern zur Rückzahlung eines Kredits ein Angebot, bei dem der Kredit bei einem fixen Jahreszinssatz in 5 Jahren vollständig getilgt wird.
Im Folgenden ist ein Teil des Tilgungsplans dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 20.000,00
1	€ 600,00		€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5				€ 0,00

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Kredits. *[1 Punkt]*

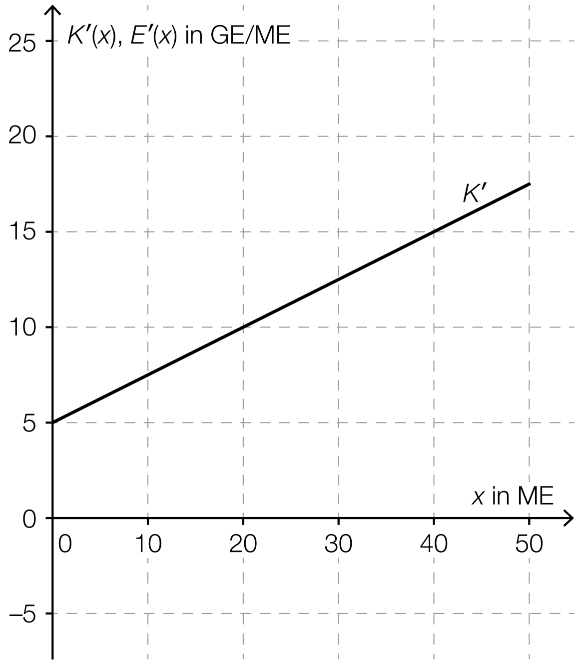
2) Tragen Sie im obigen Tilgungsplan die fehlenden Beträge in die grau markierten Zellen ein. *[2 Punkte]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Scharniere

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der Grenzkostenfunktion K'. *[1 Punkt]*

Die Fixkosten für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren betragen 50 GE.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K. *[1 Punkt]*

Die Grenzerlösfunktion E' für *Clip*-Scharniere ist gegeben durch:

$E'(x) = -0{,}5 \cdot x + 20$

x ... Absatzmenge in ME
$E'(x)$ ... Grenzerlös bei der Absatzmenge x in GE/ME

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Grenzerlösfunktion E' im Intervall [0; 50] ein. *[1 Punkt]*

4) Interpretieren Sie die Nullstelle der Grenzerlösfunktion E' in Bezug auf den Erlös. *[1 Punkt]*

b) Die Durchschnittskosten für die Herstellung des Scharniers *Modul* lassen sich durch die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ beschreiben:

$\overline{K}(x) = 0{,}25 \cdot x + 3 + \frac{1}{x}$
x ... Produktionsmenge in ME
$\overline{K}(x)$ ... Durchschnittskosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

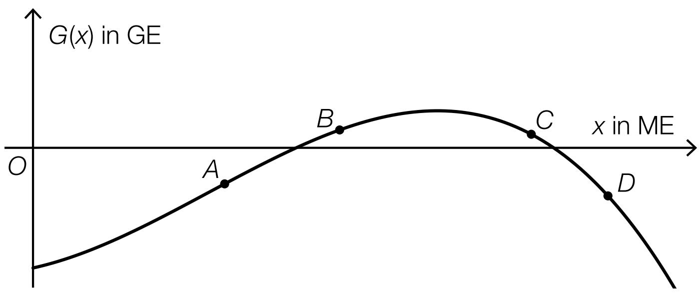
Es werden folgende Rechenschritte ausgeführt:

$$\overline{K}'(x) = 0{,}25 - \frac{1}{x^2}$$
$$0{,}25 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{0{,}25}}$$
$$x_1 = 2, \quad (x_2 = -2)$$

1) Interpretieren Sie die Lösung $x_1 = 2$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

2) Zeigen Sie mithilfe der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen, dass man als Ableitung von $\frac{1}{x}$ den Ausdruck $-\frac{1}{x^2}$ erhält. *[1 Punkt]*

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für das Scharnier *Top* dargestellt.
Auf dem Graphen der Gewinnfunktion G sind die Punkte A, B, C und D eingezeichnet.



1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den zutreffenden Punkt aus A bis D zu. *[2 zu 4]*
[1 Punkt]

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	

A	Punkt A
B	Punkt B
C	Punkt C
D	Punkt D

d) Der Gewinn für das Scharnier *Cardo* kann durch die Funktion G beschrieben werden:

$$G(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50$$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ermitteln Sie die untere Gewinngrenze. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Strandbar

Eine kleine Strandbar bietet zwei Eisdesserts an: Eiskaffee und Bananensplit.

x ... Anzahl der Eiskaffees
y ... Anzahl der Bananensplits

a) Für einen Eiskaffee benötigt man 2 Kugeln Vanilleeis und 1 Portion Obers.
Für ein Bananensplit benötigt man 3 Kugeln Vanilleeis und 1 Portion Obers.
Es ist Vanilleeis für maximal 80 Kugeln vorhanden.
Der Obersvorrat reicht für die Herstellung von maximal 30 Eisdesserts.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das diesen Sachverhalt beschreibt. *[1 Punkt]*

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Herstellung von 5 Eiskaffees und 25 Bananensplits möglich ist. *[1 Punkt]*

b) Die Zielfunktion E beschreibt den Gesamterlös in Euro bei einem Verkauf von x Eiskaffees und y Bananensplits.

$$E(x, y) = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y$$

Der Preis eines Bananensplits ist um 20 % höher als der Preis eines Eiskaffees.

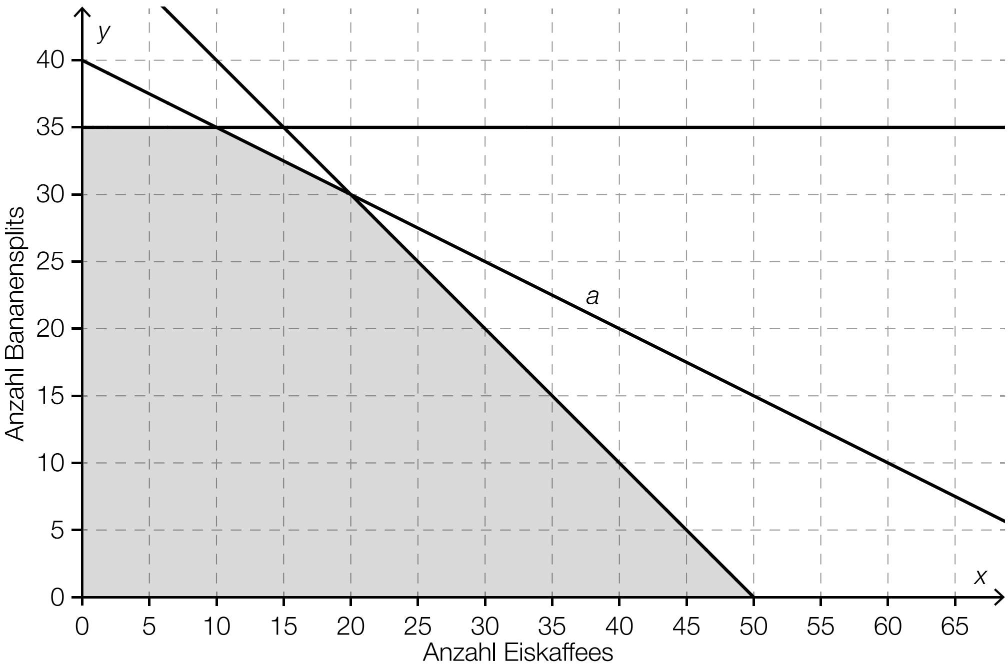
1) Erstellen Sie mithilfe von p_1 eine Formel zur Berechnung von p_2.

$p_2 =$ ____ *[1 Punkt]*

Der Gesamterlös bei einem Verkauf von 10 Eiskaffees und 5 Bananensplits beträgt € 72.

2) Ermitteln Sie p_1 und p_2. *[1 Punkt]*

c) Im nächsten Sommer werden die Rezepte und die Preise verändert. In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Herstellung von x Eiskaffees und y Bananensplits dargestellt.



1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der Geraden a durch Eintragen der fehlenden Zahl.

$x + \boxed{} \cdot y = 80$ *[1 Punkt]*

Ein Eiskaffee wird um € 4,60 und ein Bananensplit um € 6,00 verkauft.
Die Kosten für die Herstellung betragen € 1,10 für einen Eiskaffee und € 1,50 für ein Bananensplit.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns in Euro. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie diejenigen Verkaufsmengen, bei denen der Gewinn maximal ist. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Obsthändler

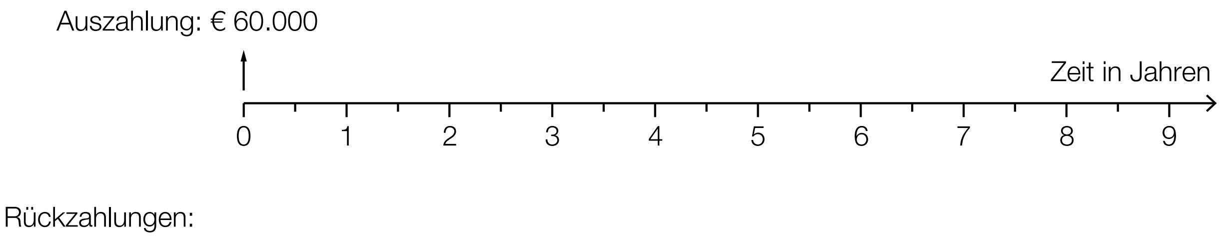
Ein Obsthändler plant die Renovierung seiner Geschäftsräume.

a) Die Renovierung soll durch einen Kredit in Höhe von € 60.000 finanziert werden.

Das Angebot einer Bank sieht folgende Rückzahlungen vor:

- eine Einmalzahlung in Höhe von € 15.000 am Ende des 1. Jahres
- eine weitere Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 am Ende des 3. Jahres
- 6 Halbjahresraten in Höhe von jeweils *R*, die erste Rate ist am Ende des 4. Jahres fällig

1) Veranschaulichen Sie diese Rückzahlungen auf der nachstehenden Zeitachse. *[1 Punkt]*



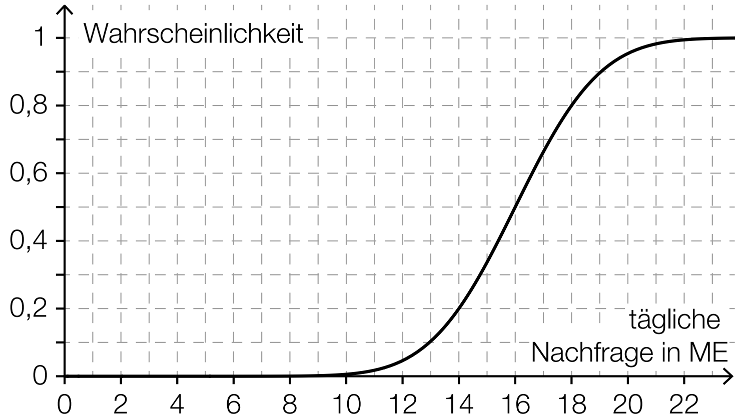
2) Berechnen Sie die Ratenhöhe *R* bei einem Semesterzinssatz von 3 % p. s. *[2 Punkte]*

b) Der Obsthändler überlegt, die Renovierung erst in 2 Jahren durchzuführen, um bis dahin Geld anzusparen. Er geht davon aus, dass er monatlich nachschüssig € 2.400 auf ein Konto einzahlen könnte. Dadurch möchte er innerhalb von 2 Jahren € 60.000 ansparen.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz *i*, bei dem der Obsthändler sein Sparziel genau erreichen würde. *[1 Punkt]*

2) Begründen Sie ohne Berechnung, warum der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger ist, wenn die monatlichen Einzahlungen vorschüssig erfolgen. *[1 Punkt]*

c) Die tägliche Nachfrage X nach einer bestimmten Obstsorte ist bei diesem Obsthändler annähernd normalverteilt. Der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der Abbildung den Erwartungswert μ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$ ab.

μ = ____________________ ME

$P(X \leq 14)$ = ____________________ *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Werte die Standardabweichung von X. *[1 Punkt]*

Der Obsthändler möchte herausfinden, welche Menge dieser Obstsorte er lagern sollte (Bestandsmenge). Zur Ermittlung der optimalen Bestandsmenge kann das sogenannte *Zeitungsjungen-Modell* verwendet werden.
Laut diesem Modell ist die Bestandsmenge q dann optimal, wenn Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Nachfrage höchstens q ist, beträgt $\frac{p-c}{p}$, also:

$P(X \leq q) = \frac{p-c}{p}$
q … optimale Bestandsmenge in ME
c … Einkaufspreis in GE/ME
p … Verkaufspreis in GE/ME

3) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung für $c = 2$ GE/ME und $p = 5$ GE/ME die zugehörige optimale Bestandsmenge. *[1 Punkt]*

Man betrachtet den Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ mit $p \neq 0$.

4) Kreuzen Sie die auf diesen Ausdruck zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

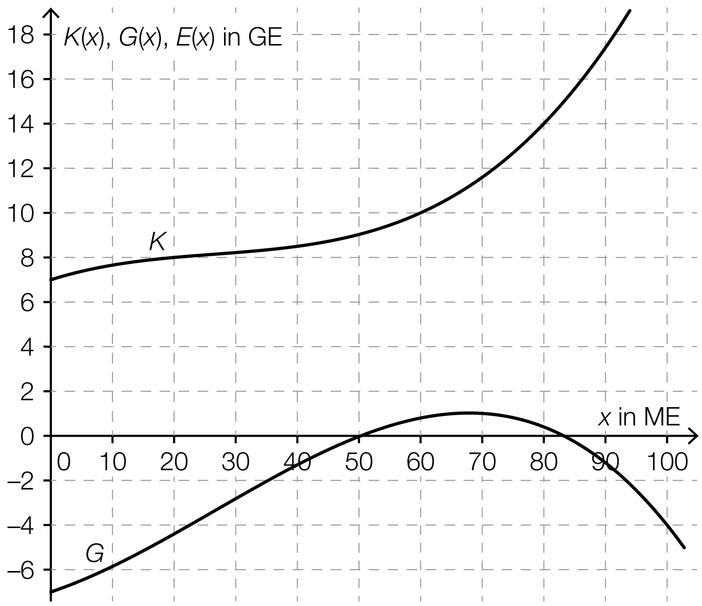
Wenn man für p und c die gleiche positive Zahl einsetzt, ist der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ nicht definiert.	☐
Der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ kann auch in der Form $p - c : p$ angeschrieben werden.	☐
Wenn sowohl p als auch c verdoppelt werden, bleibt der Wert des Ausdrucks $\frac{p-c}{p}$ unverändert.	☐
Wenn p das Doppelte von c ist, dann hat der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ den Wert $\frac{1}{3}$.	☐
Der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ kann für $p \neq 1$ zu $1 - c$ vereinfacht werden.	☐

Aufgabe 8 (Teil B)

Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen

Unbeschriebene CDs und DVDs werden als *Rohlinge* bezeichnet.

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Gewinnfunktion G für die Produktion von CD-Rohlingen dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen linearen Erlösfunktion E ein. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem die CD-Rohlinge verkauft werden. *[1 Punkt]*

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn G_{max} ab.

$G_{max} \approx$ ____________________ GE *[1 Punkt]*

b) Für bestimmte hochwertige DVD-Rohlinge ist das Unternehmen Monopolist.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

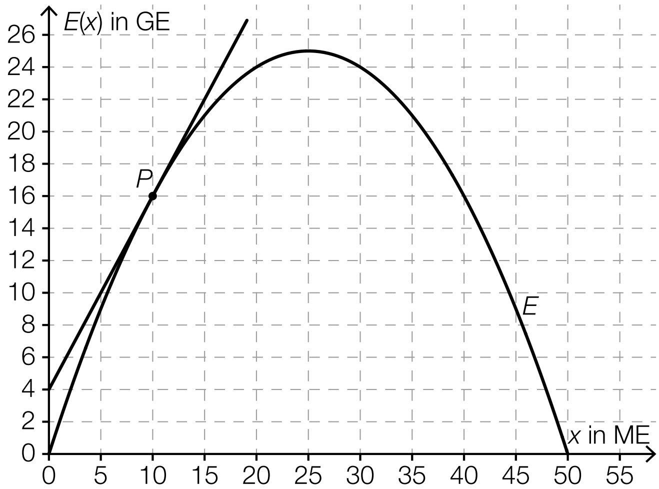
$p_N(x) = a \cdot x + b$

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die Sättigungsmenge angibt. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$\frac{a}{b}$	☐
$\frac{b}{a}$	☐
$-\frac{a}{b}$	☐
$-\frac{b}{a}$	☐
$-b - a$	☐

c) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Erlösfunktion E für spezielle DVD-Rohlinge dargestellt. Zusätzlich ist die Tangente an den Graphen von E in einem Punkt P eingezeichnet.



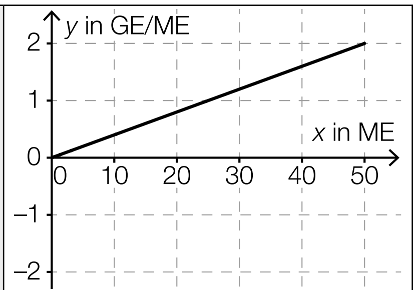
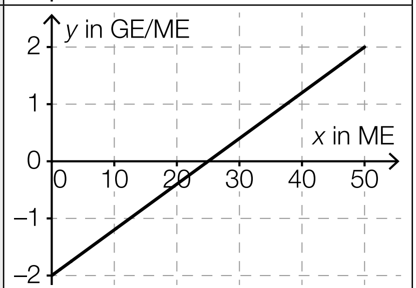
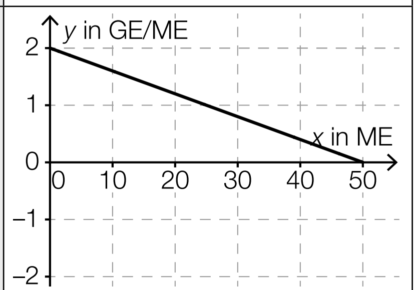
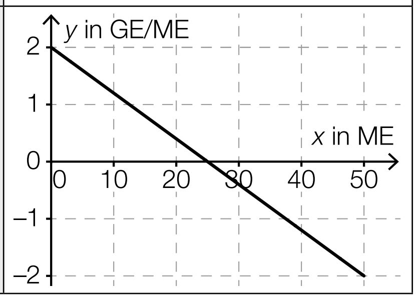
1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Tangente.

k = ____________________ GE/ME *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Tangente im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zugehörigen Graphen aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

Grenzerlösfunktion E'	
Preisfunktion der Nachfrage p_N	

A	
B	
C	
D	

Aufgabe 6 (Teil B)

Sozialausgaben

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020. *[1 Punkt]*

b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\sqrt[5]{\frac{87{,}8}{71{,}2}} - 1 \approx 0{,}043$$ *[1 Punkt]*

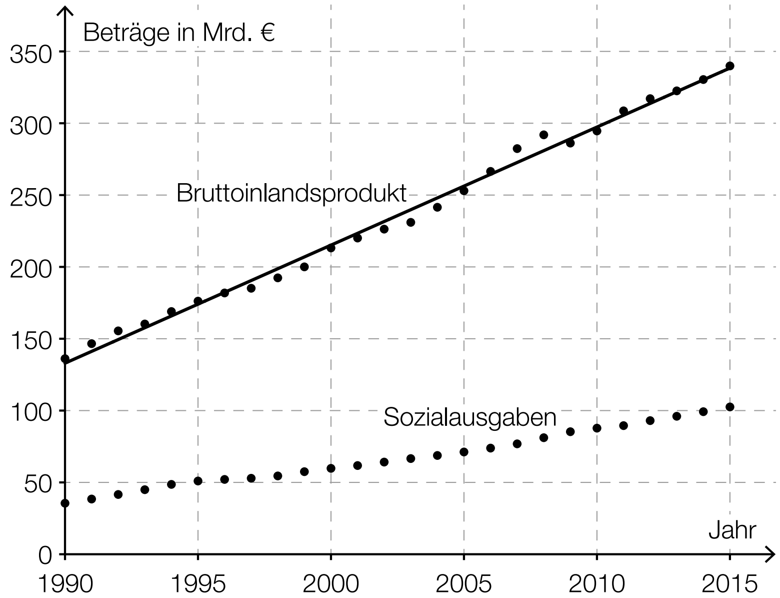
Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015. *[1 Punkt]*

c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt.
Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.

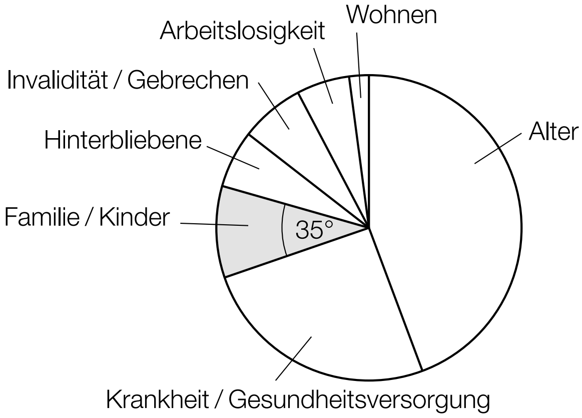


1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt. *[1 Punkt]*

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015. *[1 Punkt]*

d) Die Verteilung der Sozialausgaben von insgesamt 102,5 Milliarden Euro für das Jahr 2015 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Bereich „Familie / Kinder“ ist markiert.



1) Ermitteln Sie den Betrag, der im Jahr 2015 für den Bereich „Familie / Kinder“ ausgegeben worden ist. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Fruchtsaftproduktion

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1\,215$

x ... Produktionsmenge in hl
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

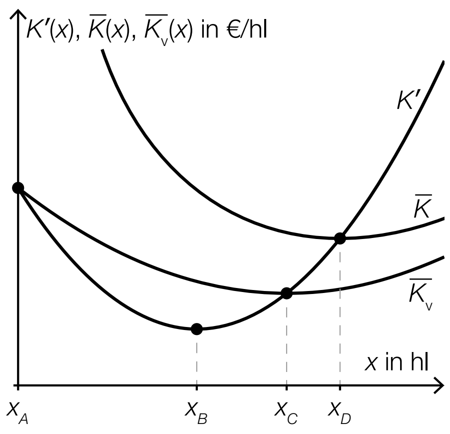
Von der Kostenfunktion ist bekannt:
I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.
II: $K''(25) = 0$

1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b. *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K', der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt.
Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D, sind auf der horizontalen Achse markiert.



1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $x \geq 0$

x ... Absatzmenge in hl
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in €

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]* *[1 Punkt]*

Der Koeffizient a muss ___①___ sein, weil der Graph von E ___②___.

①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
durch den Ursprung geht	☐
keinen Wendepunkt hat	☐
nach unten geöffnet ist	☐

2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird. *[1 Punkt]*

d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$G'(x) = -0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$

x ... Absatzmenge in hl
$G'(x)$ ... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird. *[1 Punkt]*

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten. *[1 Punkt]*

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

3) Ermitteln Sie diesen Bereich. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Lagerhalle

Für den Kauf einer Lagerhalle benötigt ein Unternehmen € 180.000. Es werden verschiedene Möglichkeiten für die Finanzierung überprüft.

a) Das Unternehmen konnte in den vergangenen Jahren Rücklagen bilden, die mit einem positiven jährlichen Zinssatz i verzinst werden:
Vor 4 Jahren konnte das Unternehmen € 50.000 zurücklegen, vor 3 Jahren konnte es € 70.000 zurücklegen.

Es soll derjenige Betrag X ermittelt werden, der für den Kauf der Lagerhalle heute noch fehlt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Betrags X.

$X =$ ____ *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie den Betrag X für den Zinssatz $i = 2{,}5\ \%$ p. a. *[1 Punkt]*

b) Das Unternehmen kann den Kauf der Lagerhalle mit einem Kredit in Höhe von € 180.000 finanzieren.

Der Kredit soll durch 40 nachschüssige Quartalsraten bei einem Zinssatz von 1 % p. q. getilgt werden.

1) Berechnen Sie die Höhe einer Quartalsrate. *[1 Punkt]*

c) Ein anderes Kreditangebot enthält Sonderkonditionen für die Jahre 1 und 2.

Diese Sonderkonditionen können dem Tilgungsplan entnommen werden:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 180.000
1	€ 5.400	€ –5.400	€ 0	€ 185.400
2	€ 5.562			€ 180.000

1) Ermitteln Sie den Jahreszinssatz für dieses Kreditangebot. *[1 Punkt]*

2) Erklären Sie mithilfe der Einträge im Tilgungsplan, warum der Tilgungsanteil im Jahr 1 negativ ist. *[1 Punkt]*

3) Vervollständigen Sie die Zeile für das Jahr 2 im obigen Tilgungsplan. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Käseproduktion

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5$

x … Produktionsmenge in kg
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

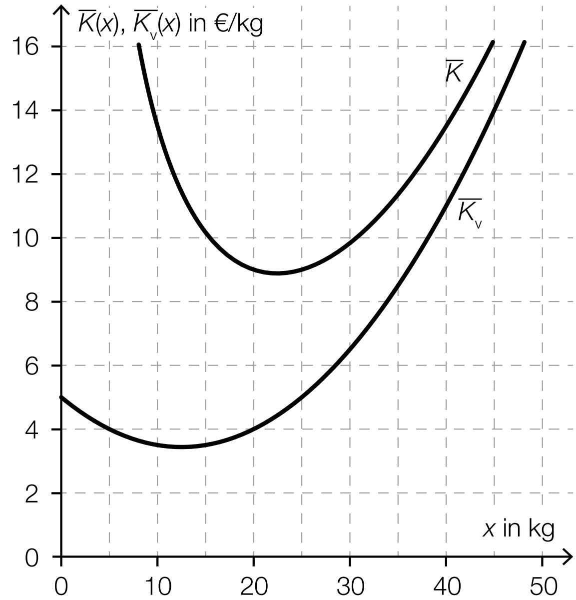
1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Kostenkehre. *[1 Punkt]*

3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$ *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Stückkostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an. *[1 Punkt]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an. *[1 Punkt]*

c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion G beschrieben werden.

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... Absatzmenge in kg
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.
Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.
Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von G ermittelt werden können. *[2 Punkte]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[1 Punkt]*

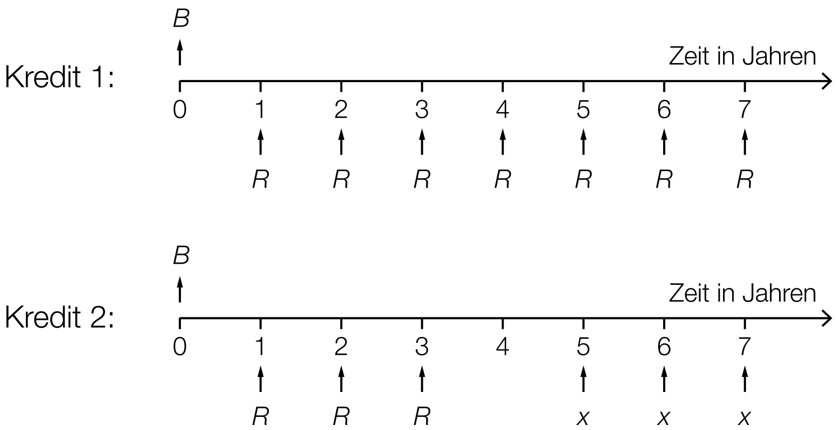
Aufgabe 8 (Teil B)

Kredit und Sparbuch

Die Begriffe *Kredit* und *Sparbuch* werden in dieser Aufgabe in vereinfachter Form ohne Berücksichtigung von Gebühren oder Steuern verwendet.

a) Die unten stehenden Zeitachsen beschreiben die Rückzahlungen von 2 Krediten, die nach 7 Jahren vollständig getilgt sind.

Bei beiden Krediten sind der Zinssatz, die Kredithöhe B und die Ratenhöhe R jeweils gleich hoch.



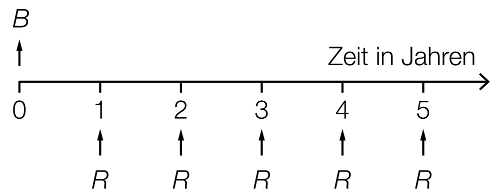
1) Argumentieren Sie, dass die Ratenhöhe x höher sein muss als die Ratenhöhe R. *[1 Punkt]*

Die Kredithöhe B beträgt € 10.000. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie für Kredit 2 die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt t = 4 Jahre. *[1 Punkt]*

b) Ein Kredit in der Höhe B wird mit einem Jahreszinssatz i verzinst.
Die Höhe der jährlichen Rate beträgt R.



Nachdem die erste Rate R zurückgezahlt wurde, beträgt die Restschuld B_1.

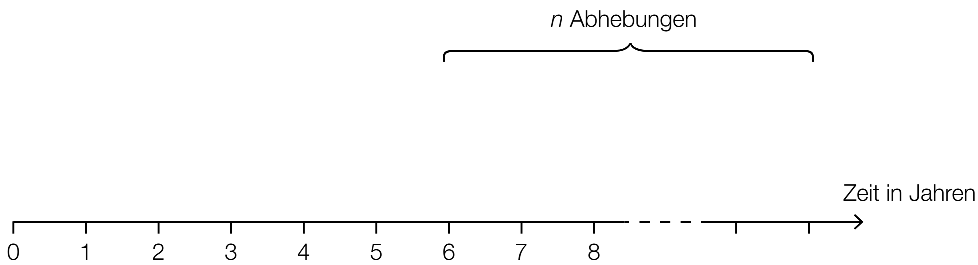
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von B_1 aus B, R und i.

B_1 = ____ *[1 Punkt]*

c) Jemand zahlt in 4 aufeinanderfolgenden Jahren jeweils zu Jahresbeginn einen Betrag in Höhe von € 300 auf ein Sparbuch ein. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

Beginnend 3 Jahre nach der letzten Einzahlung wird jeweils jährlich ein Betrag in Höhe von € 150 abgehoben.
Insgesamt finden n Abhebungen statt. Die letzte Abhebung setzt sich dabei aus den € 150 und einem Restbetrag x mit € $0 < x <$ € 150 zusammen.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zeitachse so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[1 Punkt]*



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$K = 300 \cdot 1{,}015^6 + 300 \cdot 1{,}015^5 + 300 \cdot 1{,}015^4 + 300 \cdot 1{,}015^3 \approx 1\,283{,}33$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von K im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Anzahl n der Abhebungen. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Kfz-Bestand

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist. *[1 Punkt]*

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$$

$$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Jemand berechnet weiters:

$$2 = 1{,}0169...^t$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) Der Kfz-Bestand kann nicht unbeschränkt wachsen.

Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands kann in einem Modell beschränkten Wachstums durch die Funktion K_B beschrieben werden:

$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_B(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

Der Graph der Funktion K_B soll durch die Datenpunkte für die Jahre 1992 und 2012 verlaufen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Parameter b und λ der Funktion K_B ermittelt werden können. *[1 Punkt]*
2) Ermitteln Sie die Parameter b und λ. *[1 Punkt]*
3) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells eine Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020. *[1 Punkt]*

d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$K_L(t) = \frac{22{,}5}{3 + 2 \cdot e^{-0{,}06264 \cdot t}}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_L(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich der Kfz-Bestand gemäß diesem Modell langfristig dem Wert 7,5 Millionen annähert. *[1 Punkt]*

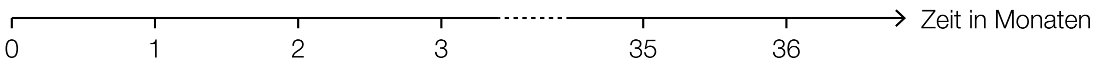
Aufgabe 6 (Teil B)

Autokauf

Frau Kopecek möchte ein neues Auto mit einem Listenpreis von € 17.100 kaufen. Dabei stehen verschiedene Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

a) Ein Händler verlangt eine Anzahlung von € 3.420 und 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

1) Veranschaulichen Sie die Zahlungen und den Listenpreis auf der nachstehenden Zeitachse. *[1 Punkt]*



Der Händler behauptet, dass es sich bei dieser Finanzierung um eine „Null-Prozent-Finanzierung" handelt.
Unter einer „Null-Prozent-Finanzierung" versteht man, dass keine Zinsen verrechnet werden.

2) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Händlers richtig ist. *[1 Punkt]*

b) Bei „Drittelfinanzierung" muss Frau Kopecek sofort, am Ende des 2. Jahres und am Ende des 3. Jahres jeweils einen gleich hohen Betrag R bezahlen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie R. *[1 Punkt]*

c) Bei einer anderen Finanzierung werden am Ende des 1. Jahres und am Ende des 2. Jahres jeweils € 6.000 bezahlt. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Tilgungsplan für die Jahre 1 und 2. *[1 Punkt]*

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 17.100
1				
2				

2) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, mit der die Schuld am Ende des 3. Jahres vollständig getilgt ist. *[1 Punkt]*

d) Bei Barzahlung gewährt der Händler 8 % Preisnachlass vom Listenpreis.

1) Berechnen Sie den Preis des Autos bei Barzahlung. *[1 Punkt]*

Bei einer Ratenfinanzierung verlangt der Händler eine Anzahlung von € 3.420 sowie 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.
Barzahlung und Ratenfinanzierung sind bei einem bestimmten Jahreszinssatz gleichwertig.

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz. *[2 Punkte]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Fahrräder

a) Die Verkaufszahlen für E-Bikes in Österreich sind in den letzten Jahren gestiegen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Verkaufszahlen (gerundet auf 1 000) für ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2008	2010	2012	2013
Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes	8 000	20 000	41 000	43 000

Die Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2008. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

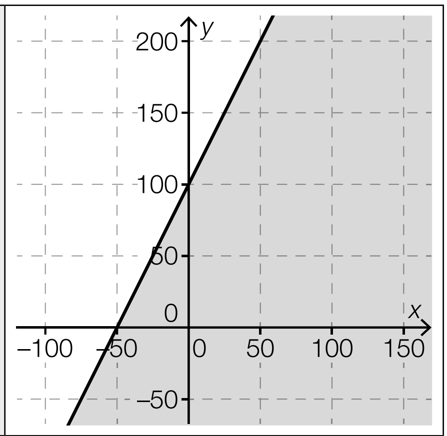
b) Ein Fahrradverleih möchte x E-Bikes und y Citybikes anschaffen.
Insgesamt möchte er höchstens 100 Fahrräder (E-Bikes und Citybikes) anschaffen.
Er möchte um mindestens 30 E-Bikes mehr als Citybikes anschaffen.

1) Erstellen Sie die beiden Ungleichungen, die diesen Sachverhalt beschreiben. *[2 Punkte]*

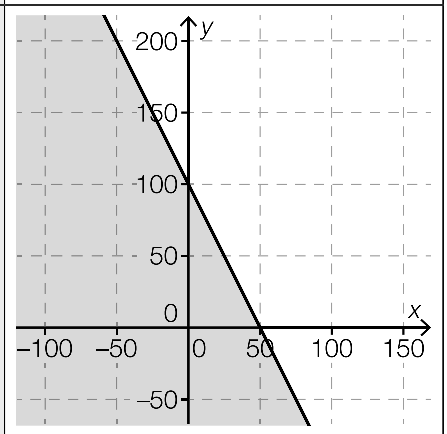
c) 1) Ordnen Sie den beiden Ungleichungen jeweils die richtige grafische Darstellung aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

$\frac{1}{2} \cdot x \leq y + 50$	
$\frac{1}{2} \cdot y \leq x + 50$	

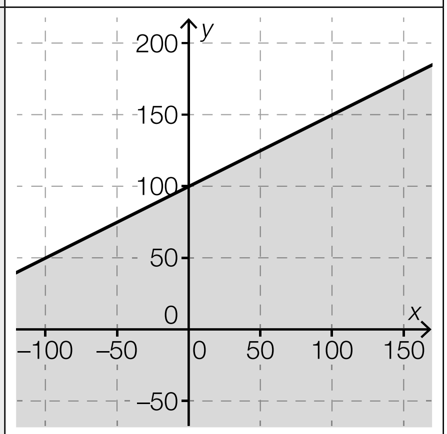
A



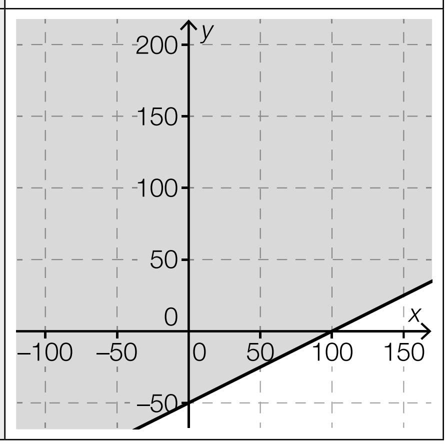
B



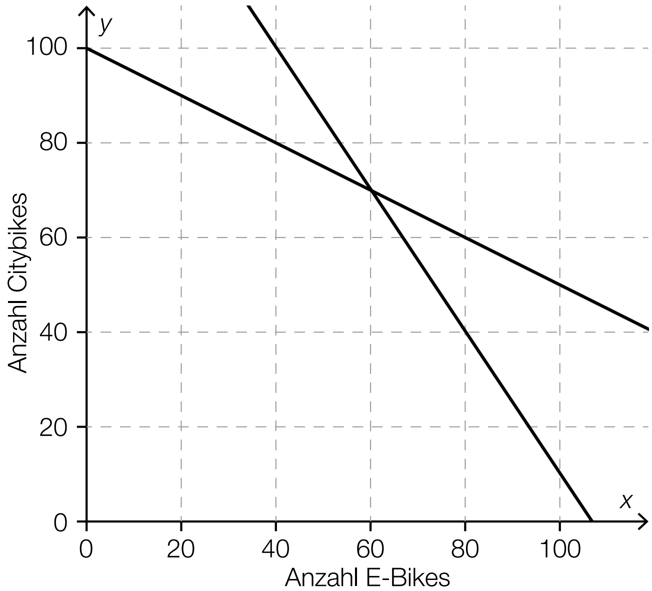
C



D



d) Ein anderer Fahrradverleih möchte x E-Bikes und y Citybikes anschaffen.
In der nachstehenden Abbildung sind bereits die beiden Begrenzungsgeraden für die Ungleichungen $y \leq -1{,}5 \cdot x + 160$ und $y \leq -0{,}5 \cdot x + 100$ eingezeichnet.

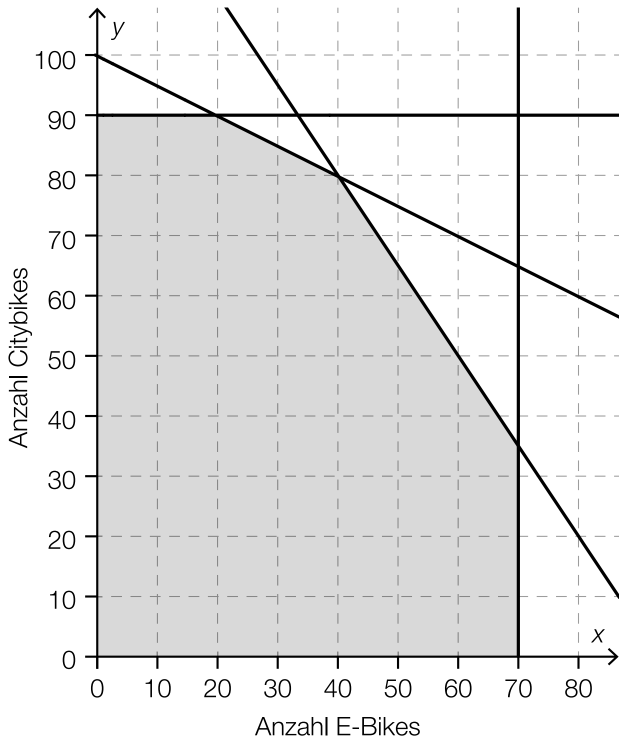


1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Begrenzungsgerade für die Ungleichung $x \leq 80$ ein. *[1 Punkt]*

Die 3 genannten Ungleichungen bilden ein Ungleichungssystem.

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems. *[1 Punkt]*

e) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für einen weiteren Fahrradverleih dargestellt.



Die Zielfunktion für den Erlös in Euro pro Tag bei diesem Fahrradverleih lautet:

$E(x, y) = 30 \cdot x + 20 \cdot y$

x ... Anzahl der E-Bikes
y ... Anzahl der Citybikes

Es soll ermittelt werden, wie viele E-Bikes und Citybikes pro Tag verliehen werden müssen, um den maximalen Erlös zu erzielen.

1) Argumentieren Sie, dass es dafür keine eindeutige Lösung gibt. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Zeitschriften

a) Die Kosten für die Produktion der Sport-Zeitschrift *Bike and Run* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K modelliert werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

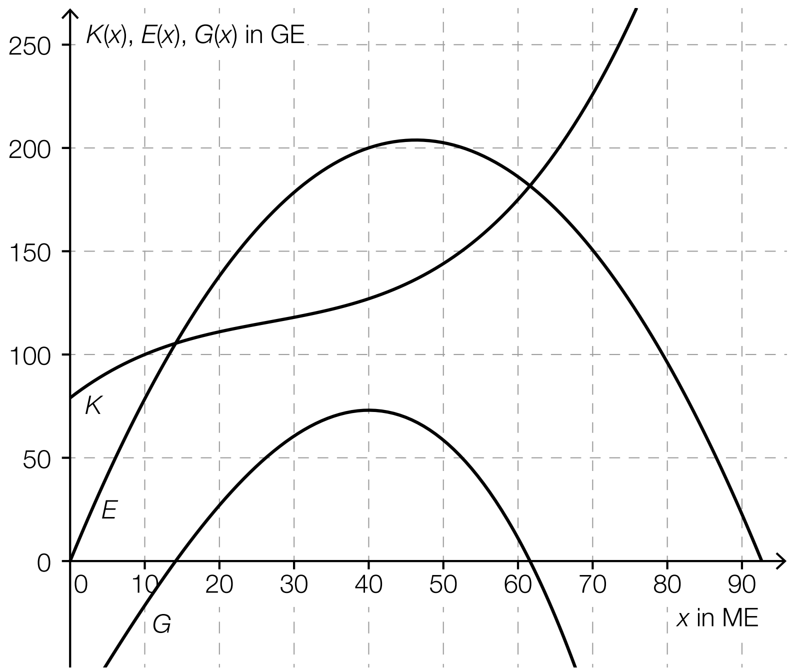
Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 100 GE und die Grenzkosten 1,5 GE/ME.

1) Erstellen Sie die beiden Gleichungen, die diesem Sachverhalt entsprechen. *[2 Punkte]*

Weiters gilt: $K''(10) = -0{,}1$

2) Interpretieren Sie das Vorzeichen von $K''(10)$ in Bezug auf den Verlauf des Funktionsgraphen von K. *[1 Punkt]*
3) Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b und c der Kostenfunktion K. *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K, der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Gewinnfunktion G für die Zeitschrift *Adventure* dargestellt.



Bei einer bestimmten Absatzmenge ist der Gewinn maximal.

1) Ermitteln Sie den Preis der Zeitschrift *Adventure* bei dieser Absatzmenge. *[1 Punkt]*

c) Von einer linearen Preisfunktion der Nachfrage kennt man den Höchstpreis p_h und die Sättigungsmenge x_s.

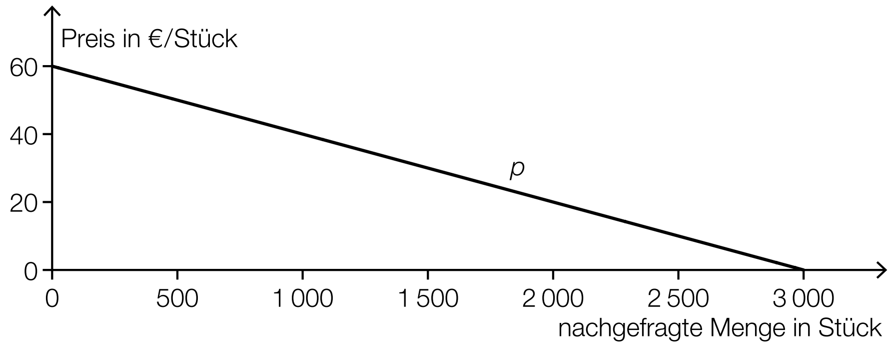
1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck für die Steigung der Preisfunktion der Nachfrage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$\frac{p_h}{x_s}$	☐
$-\frac{p_h}{x_s}$	☐
$\frac{x_s}{p_h}$	☐
$-\frac{x_s}{p_h}$	☐
$\frac{p_h - x_s}{x_s}$	☐

Aufgabe 6 (Teil B)

Betonrohre

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage *p* für Betonrohre des Modells *A* dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage *p*. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von *p* im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Die Betonrohre des Modells *A* werden um € 32 pro Stück verkauft.

3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells *A*. *[1 Punkt]*

b) Für Betonrohre des Modells *B* geht man von einer kubischen Gewinnfunktion *G* aus.

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Gleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

c) Für Betonrohre des Modells *C* geht man von einer kubischen Kostenfunktion *K* aus.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Die Fixkosten betragen 150 GE.
Bei einer Produktion von 20 ME ergeben sich Kosten von 530 GE.
Bei einer Produktion von 10 ME ergeben sich Grenzkosten von 17 GE/ME.
Bei einer Produktion von 30 ME ergeben sich Stückkosten von 22 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d. *[3 Punkte]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[1 Punkt]*

d) Der Durchmesser von Betonrohren des Modells *D* kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mm angenommen werden. Bei 3 % der Rohre ist der Durchmesser kleiner als 98 mm.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Küchenkauf

Frau Tomić will eine neue Küche um € 30.000 kaufen.

a) Um sich die Küche leisten zu können, hat sie vor 7 Jahren, vor 4 Jahren und vor 1 Jahr jeweils € 3.000 auf ein Sparbuch mit fixem Zinssatz eingezahlt. Nun befinden sich € 10.000 auf dem Sparbuch.

1) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Jahreszinssatz. *[1 Punkt]*

Bei diesem Sparvorgang wurden jährlich 25 % Kapitalertragssteuer (KESt) abgezogen.

2) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Sparbuchs vor Abzug der KESt. *[1 Punkt]*

b) Frau Tomić benötigt für den Kauf der Küche einen Kredit in Höhe von € 20.000. Ein Bekannter von Frau Tomić bietet an, ihr das Geld zu einem fixen Zinssatz von 4 % p. a. zu leihen. Für die Rückzahlung vereinbaren sie, dass am Ende des 1. Semesters nur die Zinsen zu bezahlen sind, danach sind Semesterraten in Höhe von jeweils € 2.000 fällig.

1) Berechnen Sie den äquivalenten Semesterzinssatz. *[1 Punkt]*

2) Vervollständigen Sie die Zeilen für die Semester 1 und 2 des nachstehenden Tilgungsplans. *[2 Punkte]*

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1				
2				

3) Erklären Sie, warum die folgende Behauptung richtig ist: „Eine Verdoppelung der Semesterrate führt nicht zu einer Verdoppelung des Tilgungsanteils.“ *[1 Punkt]*

c) Für einen Kredit in Höhe von € 20.000 holt Frau Tomić ein Angebot von einer Bank ein. Die Bank schlägt für die Rückzahlung nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 3.000 bei einem Jahreszinssatz i vor.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Restschuld S nach t Jahren.

$S =$ ____ *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Alkoholfreie Cocktails

Es gibt viele beliebte Cocktails ohne Alkohol.

a) Für einen Cocktail *Yellow Fun* benötigt man 2 Centiliter (cl) Mangosaft, 8 cl Maracujasaft, 2 cl Zitronensaft und 8 cl Pfirsichsaft.

Für einen Cocktail *Exotic Punch* benötigt man 4 cl Mangosaft, 4 cl Maracujasaft, 4 cl Ananassaft, 4 cl Grapefruitsaft und 4 cl Orangensaft.

Es sollen x Cocktails *Yellow Fun* und y Cocktails *Exotic Punch* hergestellt werden.

Insgesamt stehen maximal 2 L Mangosaft und maximal 2 L Maracujasaft zur Verfügung.

1) Ordnen Sie den beiden Einschränkungen jeweils die passende Ungleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

Einschränkung bezüglich Mangosaft	
Einschränkung bezüglich Maracujasaft	

A	$x + 2 \cdot y \leq 100$
B	$2 \cdot x + y \leq 100$
C	$y \leq -2 \cdot x + 50$
D	$x + 4 \cdot y \leq 200$

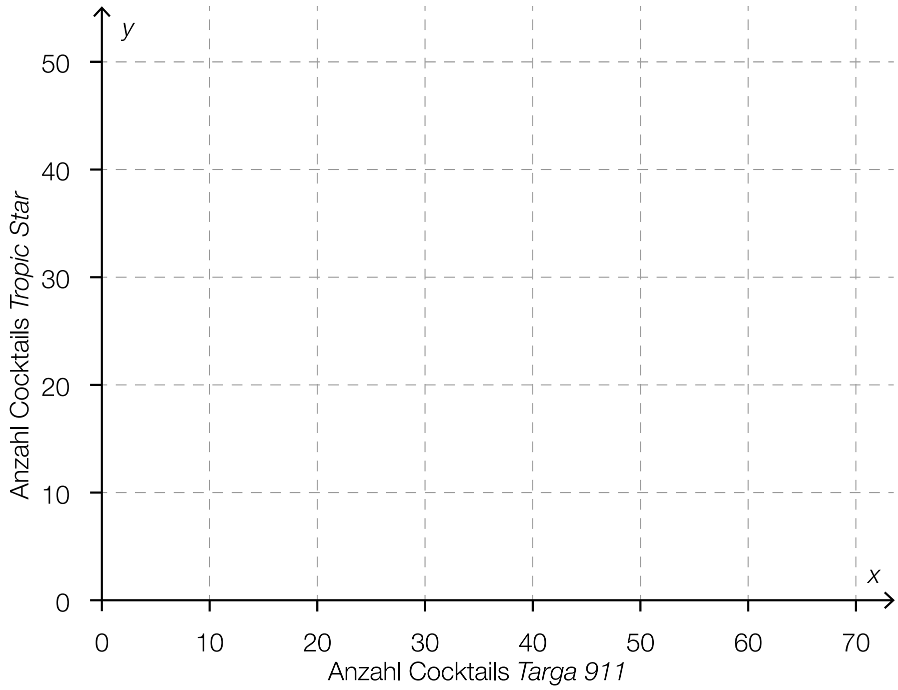
Man rechnet damit, dass mindestens doppelt so viele Cocktails *Yellow Fun* wie *Exotic Punch* benötigt werden.

2) Erstellen Sie eine Ungleichung, die diese Bedingung für die beiden Cocktails beschreibt. *[1 Punkt]*

b) Es sollen x Cocktails *Targa 911* und y Cocktails *Tropic Star* zubereitet werden.
Folgendes Ungleichungssystem beschreibt die Einschränkungen bei der Zubereitung:

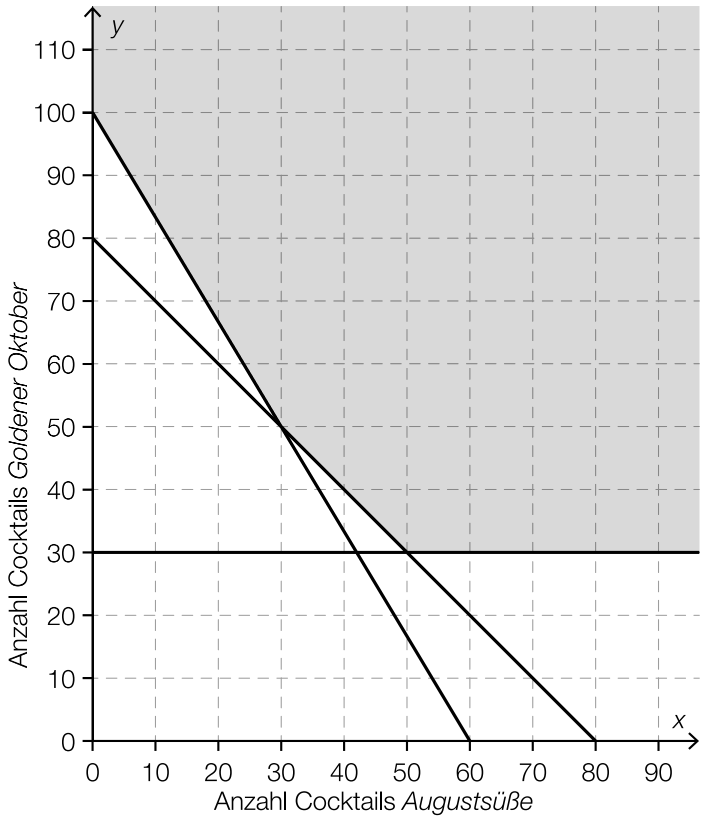
$6 \cdot x + 8 \cdot y \leq 400$
$2 \cdot y \geq x$
$x \geq 20$

1) Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in der nachstehenden Abbildung ein. *[2 Punkte]*



2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Ungleichung $x \geq 20$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Herstellung der Cocktails *Augustsüße* und *Goldener Oktober* dargestellt.



Die Produktionskosten für einen Cocktail *Goldener Oktober* sind um 50 % höher als die Produktionskosten für einen Cocktail *Augustsüße*. Die gesamten Produktionskosten sollen minimiert werden.

1) Geben Sie eine mögliche Zielfunktion Z an, die die gesamten Produktionskosten beschreibt.

$Z(x, y) =$ ____ *[1 Punkt]*

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die im Lösungsbereich der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Werbung

Der Campus einer Universität beherbergt 1200 Studierende. Eine Fast-Food-Kette möchte eine Filiale mit neuen, spezifisch auf Studierende abgestimmten Produkten am Campusgelände eröffnen. Es kursiert ein Gerücht, dass ein berühmter Hollywoodstar bei der Eröffnung der Filiale anwesend sein wird.

Die Funktion N_G beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben:

$$N_G(t) = \frac{1200}{1 + 1199 \cdot e^{-0{,}99 \cdot t}}$$

t ... Zeit nach Aufkommen des Gerüchts in Tagen
$N_G(t)$ ... Anzahl der Studierenden, die vom Gerücht bis zum Zeitpunkt t erfahren haben

a) 1) Berechnen Sie, wie viele Studierende nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben.
[1 Punkt]

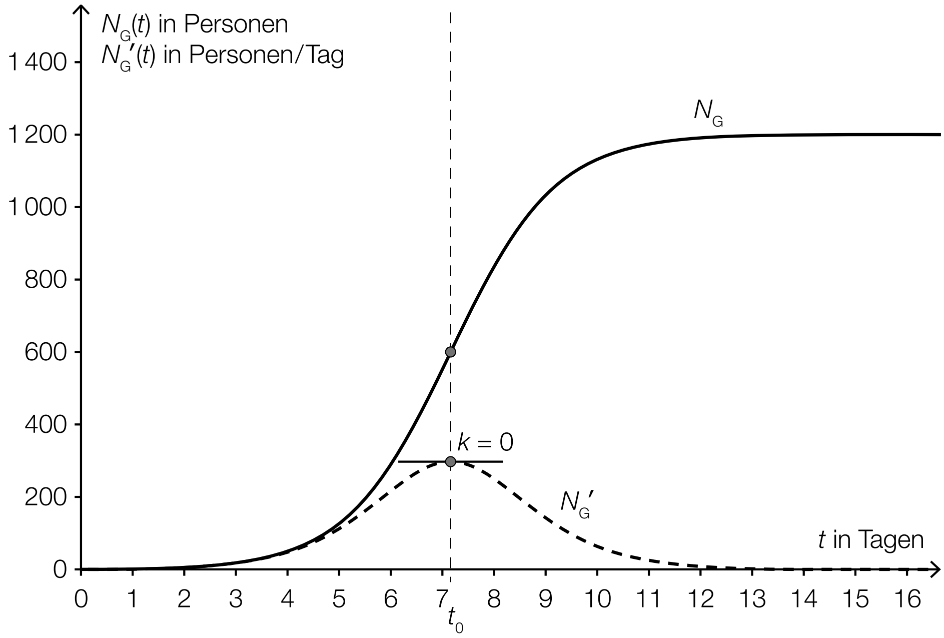
b) Auf einem anderen vergleichbaren Campus wird gleichzeitig eine Werbekampagne mit Plakaten gestartet.
Die Funktion N_W beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne erreicht werden:

$$N_W(t) = 1200 \cdot (1 - e^{-0{,}077 \cdot t})$$

t ... Zeit nach Beginn der Werbekampagne in Tagen ($t \geq 1$)
$N_W(t)$ ... Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne bis zum Zeitpunkt t erreicht wurden

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t ($t \geq 1$), zu dem gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren haben, wie von der Werbekampagne erreicht wurden. *[2 Punkte]*

c) In der nachstehenden Grafik sind der Graph der Funktion N_G und der Graph ihrer Ableitung N_G' dargestellt.



1) Beschreiben Sie, welche Eigenschaft die Ableitungsfunktion N_G' und welche Eigenschaft die Funktion N_G an der dargestellten Stelle t_0 hat. *[2 Punkte]*

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Stelle t_0 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Eine Studierende behauptet, dass die 2. Ableitung der Funktion N_G für alle $t \geq 0$ positiv ist.

3) Argumentieren Sie, warum diese Behauptung falsch ist. *[1 Punkt]*

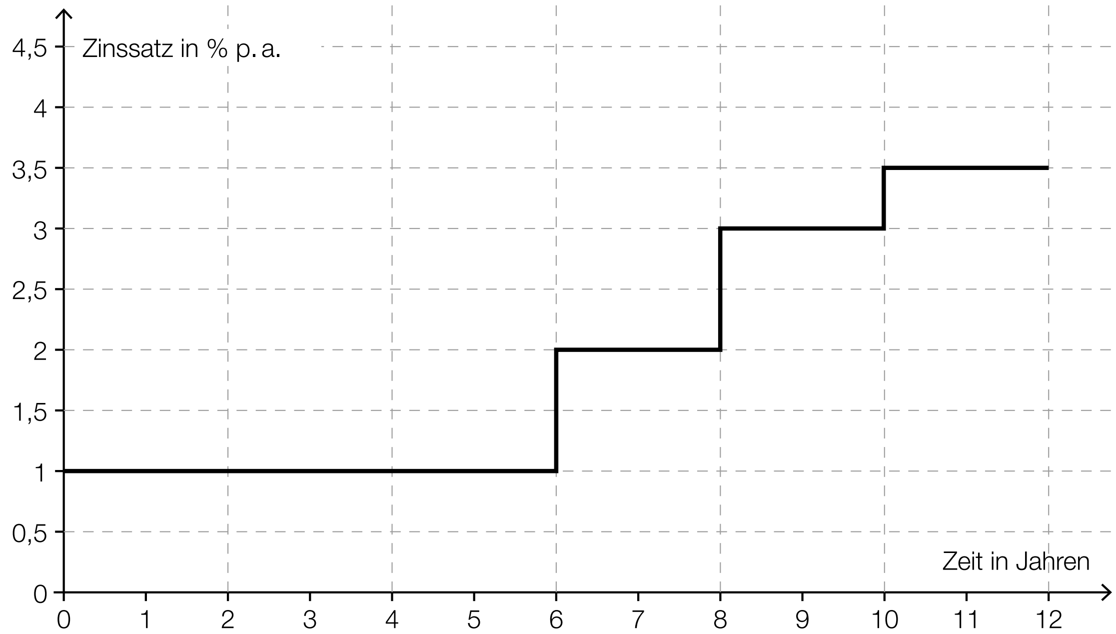
Aufgabe 8 (Teil B)

Ansparplan

Monika möchte in den nächsten 12 Jahren € 20.000 ansparen.

Im Folgenden wird die Kapitalertragssteuer nicht berücksichtigt.

a) Monika betrachtet das Angebot einer Bank für eine Wohnbauanleihe mit einer Laufzeit von 12 Jahren (siehe nachstehende Grafik). Die jährliche Verzinsung steigt dabei im Laufe der Jahre an.



1) Lesen Sie aus der obigen Grafik die Höhe und die Dauer der jährlichen Zinssätze ab. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie den mittleren jährlichen Zinssatz. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, den Monika jetzt anlegen muss, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen. *[1 Punkt]*

b) Auf einem Sparbuch bietet die Bank für 12 Jahre einen fixen Zinssatz von 2 % p. a. Um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen, könnte Monika sofort € 8.000 einlegen und 2 gleich hohe Einzahlungen Z nach 3 Jahren und nach insgesamt 8 Jahren tätigen.

1) Veranschaulichen Sie Monikas Zahlungsplan und das Sparziel auf einer Zeitachse. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Höhe der Einzahlung Z. *[2 Punkte]*

c) Monika überlegt, 12 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres einen gleich hohen Betrag einzuzahlen, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren bei einem fixen Zinssatz von 2 % p. a. zu erreichen.

1) Berechnen Sie die Höhe des jährlichen Einzahlungsbetrags R. *[1 Punkt]*

Sie überlegt, nicht zu Beginn jedes Jahres den Jahresbetrag einzuzahlen, sondern zu Beginn jedes Monats $\frac{1}{12}$ des Jahresbetrags.

2) Argumentieren Sie, dass sie ihr Sparziel damit nicht in der vorgesehenen Zeit erreicht. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Verkehrsbetriebe

Städtische Verkehrsbetriebe analysieren ihre Einnahmen.

a) In der Stadt A können die Einnahmen der Verkehrsbetriebe durch den Verkauf von Einzelfahrscheinen modellhaft durch die folgende Erlösfunktion E beschrieben werden:

$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 6{,}6 \cdot x$

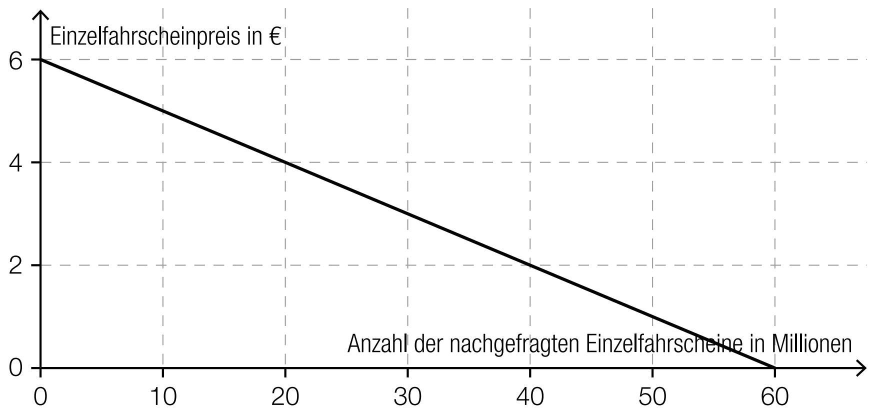
x ... Anzahl der verkauften Einzelfahrscheine in Millionen
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x Einzelfahrscheinen in Millionen Euro

1) Berechnen Sie den maximal möglichen Erlös in Euro. *[1 Punkt]*

2) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie den zum maximalen Erlös führenden Einzelfahrscheinpreis in Euro. *[1 Punkt]*

b) In der Stadt B wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen angenommen. Dieser Zusammenhang ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Höchstpreis ab. *[1 Punkt]*

2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) In der Stadt C wird modellhaft angenommen, dass der Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden kann.

$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen
$p(x)$ ... Einzelfahrscheinpreis bei x nachgefragten Einzelfahrscheinen in Euro

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,60 werden 50 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,80 werden 48 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Der Höchstpreis wird mit € 7,80 angenommen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten von p. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

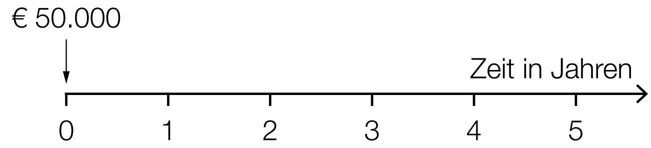
Erbschaft

a) Armin erhält ein Erbe in Höhe von € 50.000, das in Form von 3 Beträgen in den nächsten 5 Jahren ausbezahlt wird.
Die Höhe der Auszahlungen Z kann mit der nachstehenden Gleichung berechnet werden:

$$50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$$

1) Lesen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz ab. *[1 Punkt]*

2) Veranschaulichen Sie alle in der Gleichung vorkommenden Auszahlungen auf der nachstehenden Zeitachse. *[1 Punkt]*



3) Berechnen Sie die Höhe der Auszahlungen Z. *[1 Punkt]*

b) Jutta hat € 50.000 geerbt. Diesen Betrag legt sie mit einer Verzinsung von 3 % p. a. an.

In den nächsten 5 Jahren will sie nun jeweils am Ende jedes Monats einen gleich hohen Betrag abheben, sodass nach diesen 5 Jahren vom angelegten Geld ein Betrag in Höhe von € 20.000 vorhanden ist.

Jutta überlegt, dass sie monatlich rund $\frac{€\,50.000 - €\,20.000}{60} = €\,500$ abheben kann.

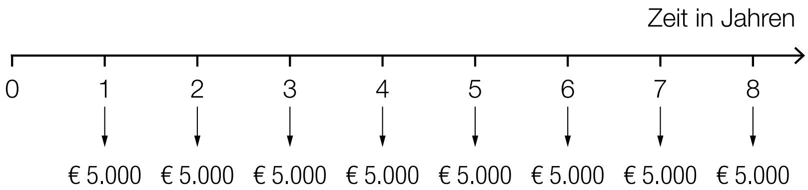
1) Begründen Sie, warum die tatsächlichen Monatsraten größer als € 500 sind. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz. *[1 Punkt]*

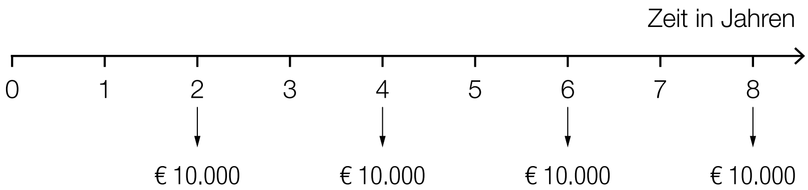
3) Berechnen Sie die Höhe dieser tatsächlichen Monatsraten. *[1 Punkt]*

c) Auf den unten stehenden Zeitachsen sind Erbschaftsauszahlungen dargestellt.

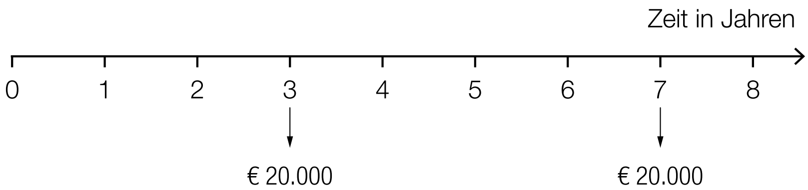
1) Kreuzen Sie diejenige Auszahlungsvariante an, die bei einem positiven Zinssatz den größten Barwert hat. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*



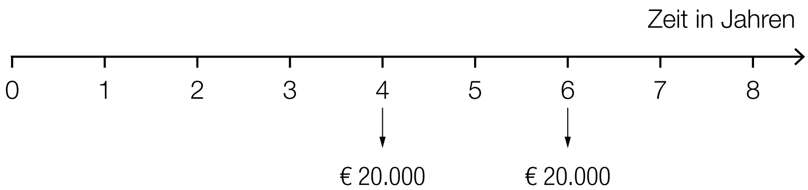
☐



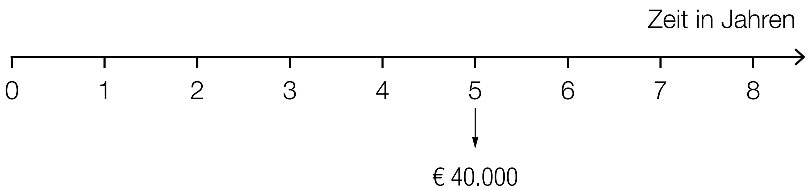
☐



☐



☐



☐

Aufgabe 7 (Teil B)

Marmelade

Sarah und Daniel stellen im Rahmen eines Schulprojekts selbstgemachte Marmelade her und füllen sie in Gläser ab. Es werden x Gläser Erdbeermarmelade und y Gläser Mehrfruchtmarmelade abgefüllt.

a) Für ein Glas Erdbeermarmelade benötigen sie 160 g Erdbeeren.
Für ein Glas Mehrfruchtmarmelade benötigen sie 60 g Erdbeeren, 60 g Himbeeren und 40 g Heidelbeeren.
Sie haben insgesamt 15 kg Erdbeeren, 4 kg Himbeeren und 2 kg Heidelbeeren zur Verfügung.
Insgesamt wollen sie mindestens 70 Gläser Erdbeermarmelade produzieren.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die obigen Mengenbeschränkungen für die Herstellung der beiden Marmeladesorten beschreibt. *[2 Punkte]*

b) Nach einer Besprechung der Projektgruppe ergeben sich die folgenden Mengenbeschränkungen für die Herstellung der beiden Marmeladesorten:

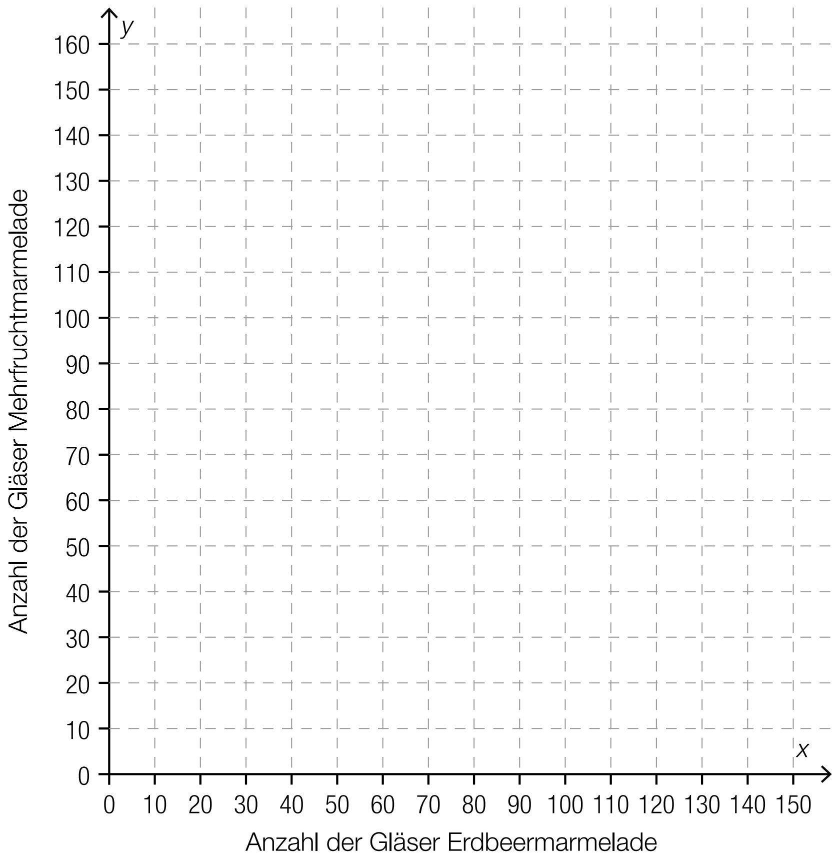
I: $150 \cdot x + 50 \cdot y \leq 18000$

II: $x + y \geq 100$

III: $y \geq 50$

IV: $y \leq 120$

V: $x \geq 0$

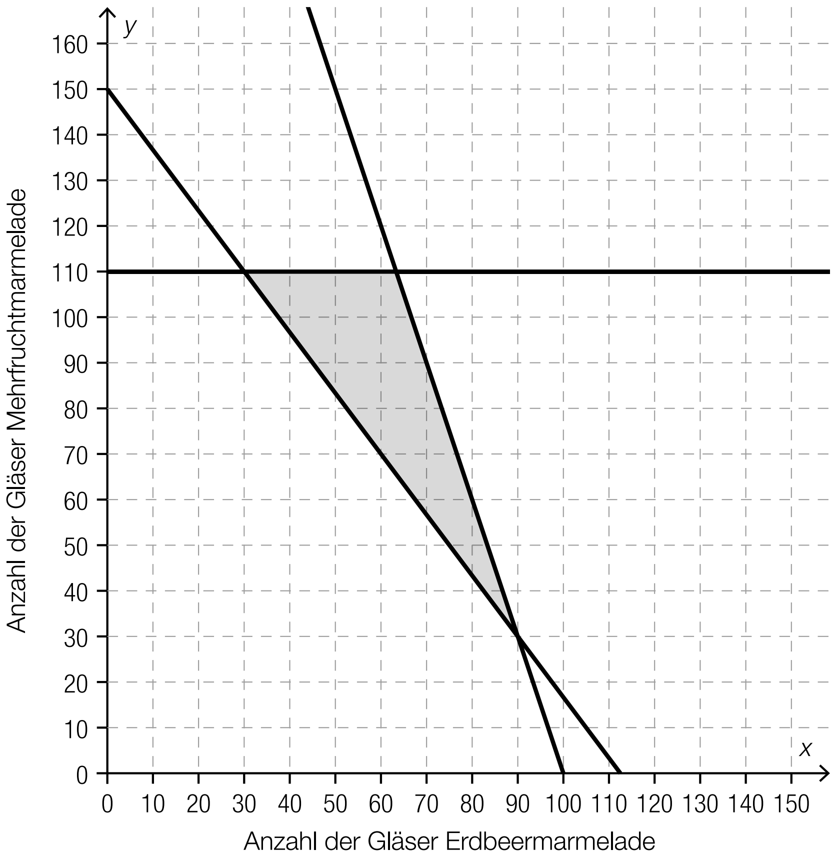


1) Zeichnen Sie im obigen Koordinatensystem die Begrenzungsgeraden der Ungleichungen I, II, III und IV ein. *[1 Punkt]*

2) Markieren Sie im obigen Koordinatensystem den Lösungsbereich des Ungleichungssystems. *[1 Punkt]*

3) Interpretieren Sie die Bedeutung der Ungleichungen III und IV im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) In der nachstehenden Grafik sind die Mengenbeschränkungen nach einer weiteren Überarbeitung des Projekts dargestellt.



Die Gleichung der Zielfunktion Z zur Ermittlung der Kosten in Euro bei der Herstellung lautet:

$Z(x, y) = 2{,}50 \cdot x + 3 \cdot y$

1) Zeichnen Sie in der obigen Grafik diejenige Gerade ein, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird. *[1 Punkt]*

Nachdem Sarah ihrer Tante von ihrem Schulprojekt erzählt hat, stellt diese Himbeeren kostenlos zur Verfügung. Die Kosten pro Glas Mehrfruchtmarmelade sinken dadurch auf € 2,50 pro Glas.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Zielfunktion Z_1 zur Ermittlung der Kosten. *[1 Punkt]*

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob Sarah und Daniel durch diese Kostensenkung auch die Produktionsmengen ändern müssen, wenn ihre Gesamtkosten minimal bleiben sollen. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Mixer

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Typen von Mixern her.

a) Bei einem Stückpreis von € 65 können 2 000 Stabmixer pro Jahr verkauft werden.
Bei einem Verkauf von 2 500 Stabmixern kann ein Erlös in Höhe von € 131.250 pro Jahr erzielt werden.

Der Erlös beim Verkauf der Stabmixer kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Anzahl der verkauften Stabmixer
$E(x)$ … Erlös bei x verkauften Stabmixern in €

1) Begründen Sie, warum in der Gleichung der Erlösfunktion der Parameter c gleich null sein muss. *[1 Punkt]*

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b der Erlösfunktion. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b. *[1 Punkt]*

4) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[1 Punkt]*

b) Der Gewinn beim Verkauf der Handmixer kann durch die Funktion G beschrieben werden.

$G(x) = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie die Gewinngrenzen. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn. *[1 Punkt]*

Durch Veränderungen im Unternehmen können die Fixkosten um 200 GE gesenkt werden.

3) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1. *[1 Punkt]*

c) Die Kosten bei der Produktion von Standmixern können durch die Funktion K beschrieben werden.

$K(x) = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Kostenverlauf bei einer Produktion von 25 ME progressiv oder degressiv ist. *[1 Punkt]*

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsoptimum ist. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$0 = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$	☐
$0 = 0{,}12 \cdot x^2 - 4{,}8 \cdot x + 63$	☐
$0 = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$	☐
$0 = 0{,}04 \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 63 + \frac{940}{x}$	☐
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☐

Aufgabe 7 (Teil B)

Smartphones

a) Der Akku eines Smartphones entlädt sich aufgrund von Hintergrundanwendungen auch dann, wenn das Gerät nicht aktiv benützt wird.

Für ein bestimmtes Smartphone wird die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent beobachtet. Zur Zeit $t = 0$ ist der Akku vollständig aufgeladen.

Zeit *t* in Stunden	Akku-Ladestand in Prozent
0	100
3	94
6	81
10	71
18	43

Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent soll beschrieben werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. *[1 Punkt]*

Bei einem Akku-Ladestand von 15 % sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

– Berechnen Sie, wie viele Stunden nach dem vollständigen Aufladen dies gemäß diesem linearen Regressionsmodell der Fall ist. *[1 Punkt]*

b) Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands beim Aufladen lässt sich näherungsweise durch die Funktion A beschreiben:

$A(t) = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn des Aufladens in h
$A(t)$ … Akku-Ladestand zur Zeit t in Prozent
λ … positiver Parameter

– Argumentieren Sie mathematisch, dass sich die Funktionswerte von A mit wachsendem t dem Wert 100 annähern. *[1 Punkt]*

2 Stunden nach Beginn des Aufladens beträgt der Akku-Ladestand 80 %.

– Berechnen Sie λ. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie, zu welcher Zeit nach Beginn des Aufladens der Akku-Ladestand 90 % beträgt. *[1 Punkt]*

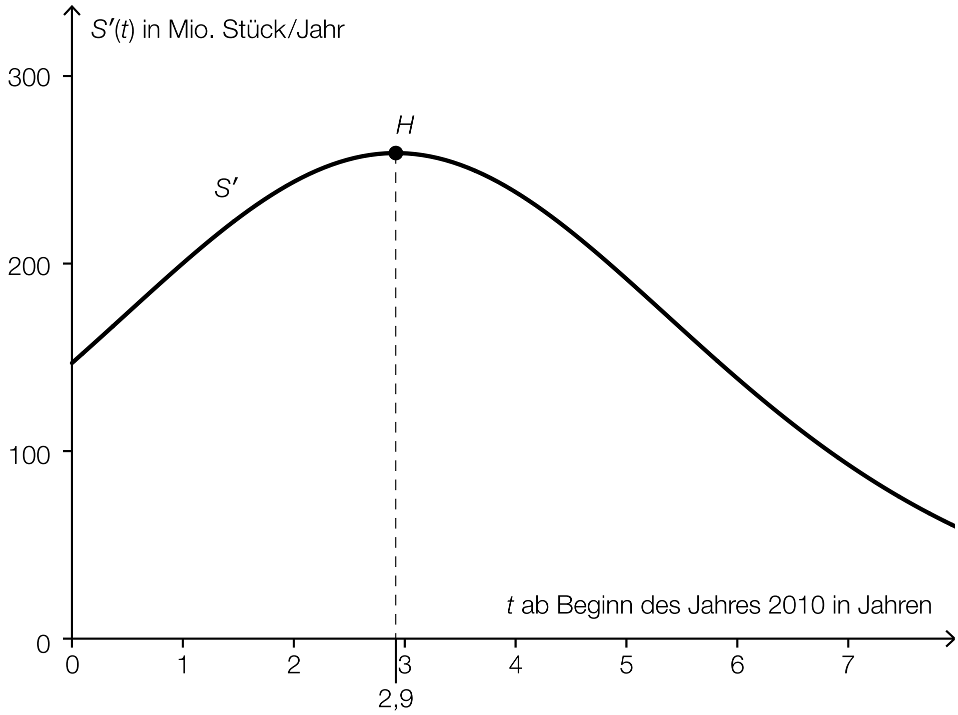
c) Die Entwicklung der weltweiten Verkaufszahlen von Smartphones kann modellhaft durch die Funktion S beschrieben werden:

$$S(t) = \frac{1918}{1 + 4{,}84 \cdot e^{-0{,}54 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010)
$S(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften Smartphones in Millionen Stück

– Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells die Anzahl der bis zum Beginn des Jahres 2020 insgesamt verkauften Smartphones. *[1 Punkt]*

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Ableitungsfunktion S' dargestellt. Auf dem Graphen von S' ist der Hochpunkt H markiert.



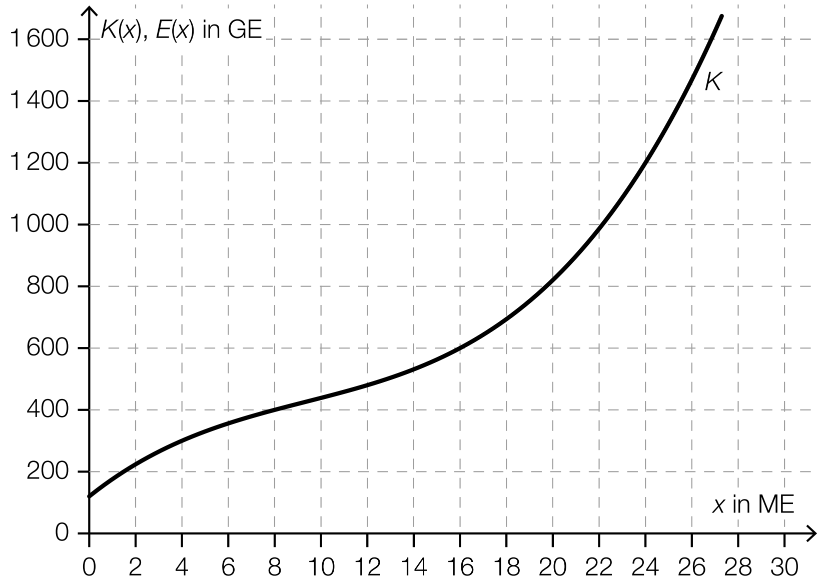
– Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Stelle $t = 2{,}9$ in Bezug auf die Funktion S. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Rohrproduktion

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffrohre her, die zu einem fixen Preis verkauft werden.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung der Kunststoffrohre dargestellt.



Der Break-even-Point liegt bei einer Produktion von 8 ME. Die Kosten betragen dabei 400 GE.

– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im obigen Diagramm ein. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie den zugehörigen Marktpreis. *[1 Punkt]*
– Ergänzen Sie in der nachstehenden Wertetabelle die fehlenden Werte für die zugehörige Gewinnfunktion G. *[1 Punkt]*

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE		0	

b) Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von Kunststoffrohren ist gegeben durch:

$K'(x) = \frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60$

x … produzierte Menge in ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der produzierten Menge x in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K mit $K(16) = 600$. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die Kostenkehre. *[1 Punkt]*

c) Ein anderes Unternehmen stellt Keramikrohre her.

Von der quadratischen Erlösfunktion E ist für den Absatz von 10 ME bekannt:

$E(10) = 15$
$E'(10) = -1{,}5$
$E''(10) = -0{,}6$

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über den Erlös bei einem Absatz von 11 ME an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$E(11) = 13{,}2$	☐
$E(11) = 13{,}5$	☐
$E(11) = 14{,}1$	☐
$E(11) = 16{,}2$	☐
$E(11) = 16{,}5$	☐

d) Die Erlösfunktion E für Betonrohre ist gegeben durch:

$E(x) = -3{,}2 \cdot x \cdot (x - 25)$

x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie den Höchstpreis. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Baugrundstücke

Die Preise von Baugrundstücken sind in den letzten Jahren erheblich gestiegen.

a) Herr Pfeifer hat ein Grundstück um € 228.000 gekauft. Nach der Umwidmung in ein Baugrundstück kann er es 4 Jahre später um € 753.000 verkaufen.

– Ermitteln Sie den mittleren jährlichen Zinssatz des eingesetzten Kapitals ohne Berücksichtigung von Spesen, Gebühren und Steuern. *[1 Punkt]*

b) Frau Maier möchte ein Baugrundstück verkaufen. Sie bekommt zwei Angebote.

Herr Altmann bietet € 150.000 sofort bei Vertragsabschluss und € 50.000 nach 2 Jahren.
Frau Bogner bietet € 202.000 ein Jahr nach Vertragsabschluss.

Frau Maier vergleicht die beiden Angebote.

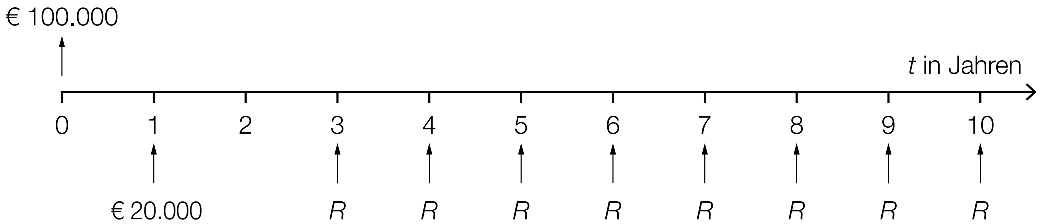
– Weisen Sie für einen Zinssatz von 3 % p. a. nach, dass sich die beiden Angebote zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses um rund € 1.013 unterscheiden. *[1 Punkt]*

Für die beiden Angebote wird folgende Gleichung aufgestellt:
$150\,000 \cdot x^2 + 50\,000 = 202\,000 \cdot x$
Eine Lösung dieser Gleichung ist $x \approx 1{,}0198$.

– Interpretieren Sie die Bedeutung von x im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) Herr Müller nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 100.000 auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 3 % p. a.

Der Kredit soll durch die auf der nachstehenden Zeitachse dargestellten Zahlungen vollständig getilgt werden.



Die Zahlungen R können als nachschüssige Rente aufgefasst werden.

– Markieren Sie auf der Zeitachse den Bezugszeitpunkt für den Barwert dieser nachschüssigen Rente. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die Höhe der Zahlungen R. *[1 Punkt]*

d) Frau Marth nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 120.000 mit jährlich nachschüssigen Kreditrückzahlungen auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 2,5 % p. a.

Für die ersten zwei Jahre vereinbart Frau Marth Sonderbedingungen, die im nachstehenden Tilgungsplan dargestellt sind.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1			€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00		€ 123.000,00

– Ermitteln Sie die Beträge für die beiden grau markierten Zellen im obigen Tilgungsplan. *[1 Punkt]*

Ab dem Jahr 3 werden jährliche Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt.

– Berechnen Sie, wie viele volle Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt werden müssen. *[1 Punkt]*