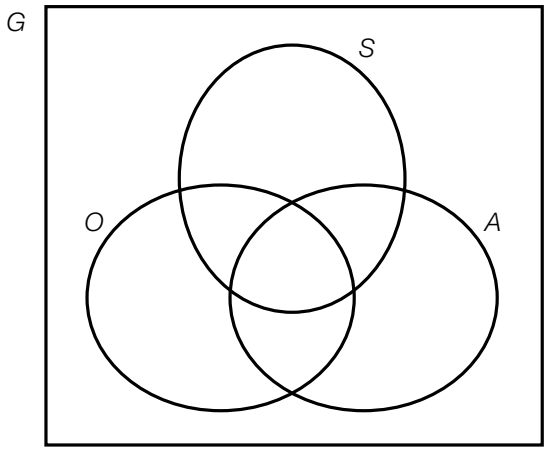
Aufgabe 7 (Teil B)

James Bond

James Bond ist ein erfundener britischer Geheimagent. In den bisher veröffentlichten James-Bond-Filmen spielten verschiedene Schauspieler die Rolle dieses Geheimagenten.

a) Die Menge *G* aller James-Bond-Filme wird gemäß dem nachstehenden Venn-Diagramm eingeteilt.



G ... Menge aller James-Bond-Filme
O ... Menge der James-Bond-Filme, die einen Oscar gewonnen haben
S ... Menge der James-Bond-Filme, die einen Schauplatz in Österreich haben
A ... Menge der James-Bond-Filme, in denen James Bond ein Auto der Marke *Aston Martin* fährt

Der Film *Im Geheimdienst Ihrer Majestät* hat einen Schauplatz in Österreich, James Bond fährt darin ein Auto der Marke *Aston Martin*, aber der Film hat keinen Oscar gewonnen.

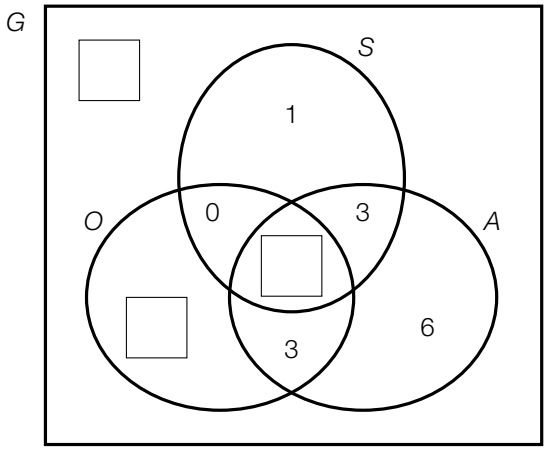
1) Markieren Sie im obigen Venn-Diagramm denjenigen Bereich, in dem der Film *Im Geheimdienst Ihrer Majestät* liegt. *[0/1 P.]*

Bis zum Jahr 2020 wurden insgesamt 24 James-Bond-Filme veröffentlicht.

Genau 1 Film hat sowohl einen Schauplatz in Österreich als auch einen Oscar gewonnen und James Bond fährt darin ein Auto der Marke *Aston Martin*.

Insgesamt haben 4 verschiedene James-Bond-Filme einen Oscar gewonnen.

2) Tragen Sie in das nachstehende Venn-Diagramm die fehlenden drei Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*



3) Geben Sie die Anzahl derjenigen James-Bond-Filme an, die einen Schauplatz in Österreich haben. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Tabelle sind die Einspielergebnisse einiger ausgewählter James-Bond-Filme seit 1985 angegeben.

Filmtitel	Jahr	Einspielergebnis in Mio. US-Dollar
Im Angesicht des Todes	1985	157,8
Lizenz zum Töten	1989	156,2
Der Morgen stirbt nie	1997	346,6
Stirb an einem anderen Tag	2002	456,0
Casino Royale	2006	599,2
Skyfall	2012	1 108,6

Die zeitliche Entwicklung der Einspielergebnisse soll mithilfe der Daten aus der obigen Tabelle in einem einfachen Modell durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1985
$f(t)$ … Einspielergebnis zur Zeit t in Mio. US-Dollar

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf.

$f(t) =$ _____ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent das tatsächliche Einspielergebnis des Films *Skyfall* über dem mit der Funktion f berechneten Einspielergebnis liegt. *[0/1 P.]*

c) In den insgesamt 24 bis zum Jahr 2020 veröffentlichten James-Bond-Filmen spielte der Schauspieler Sean Connery 6-mal die Rolle des James Bond.

Für einen Filmabend werden 3 verschiedene James-Bond-Filme nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens 1 ausgewählten Film Sean Connery die Rolle des James Bond spielt. *[0/1 P.]*

In der nachstehenden Tabelle ist für jeden der 24 Filme die Anzahl der Autos, mit denen James Bond fährt, angegeben.

Anzahl der Autos pro Film	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl der Filme	5	6	8	3	0	1	1

2) Ermitteln Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Autos, mit denen James Bond in einem zufällig ausgewählten Film fährt. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

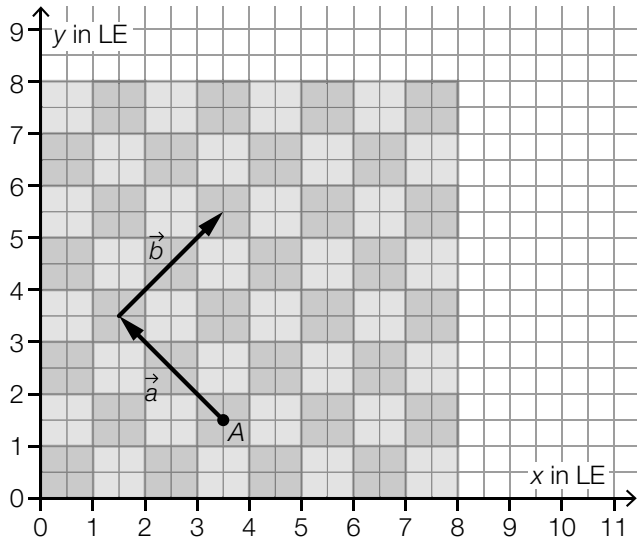
Spielesammlung

Franziska und Sandra spielen verschiedene Brettspiele einer Spielesammlung.

a) Bei dem Spiel *Dame* werden auf einem Spielbrett Spielsteine schräg gezogen.

Im nebenstehenden Koordinatensystem ist ein Spielzug von Franziska durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt.

x, y ... Koordinaten in Längeneinheiten (LE)



Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt folgender Zusammenhang: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

1) Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieses Zusammenhangs. *[0/1 P.]*

In einem anderen Spielzug zieht Sandra einen Spielstein entlang des Vektors $\vec{c}$.
Der Vektor $\vec{c}$ ist der Gegenvektor von $\vec{b}$.

2) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

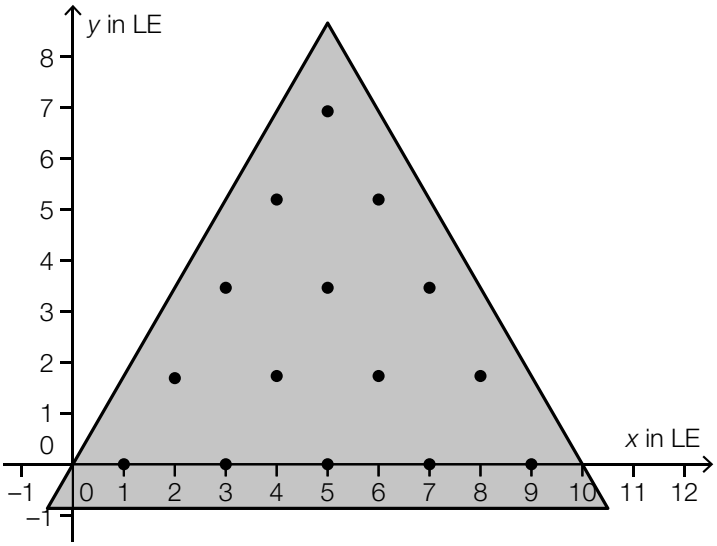
$\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{c}\rvert$	☐
$\vec{b} = -\vec{c}$	☐
$\vec{b} \cdot \vec{c} = -\lvert\vec{b}\rvert^2$	☐
$\vec{c} = \frac{1}{\lvert\vec{b}\rvert} \cdot \vec{b}$	☐
$\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐

b) *Solitär* ist ein Spiel, das man alleine spielt. Dabei werden Spielsteine durch Überspringen vom Spielfeld entfernt.

Die ersten zwei Spielzüge können durch folgende Vektoren beschrieben werden:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

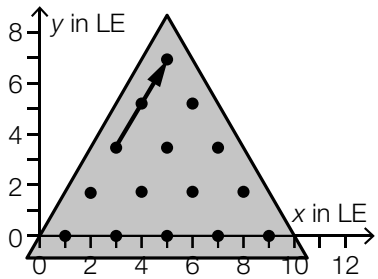
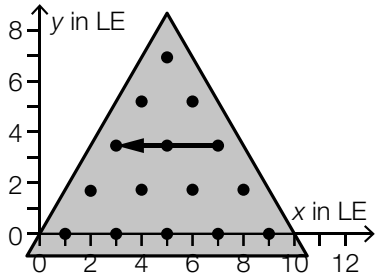
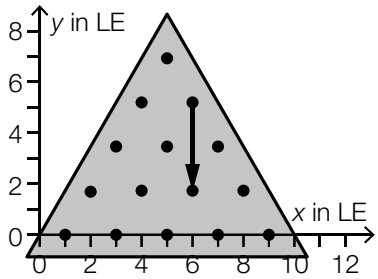
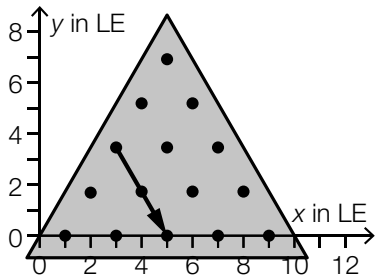
x, y ... Koordinaten in Längeneinheiten (LE)



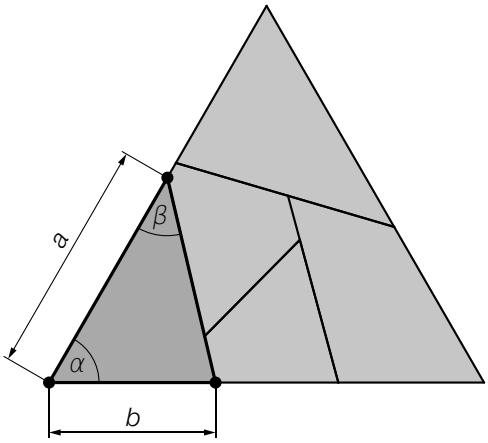
1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die gleiche Länge haben. *[0/1 P.]*

2) Ordnen Sie den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ jeweils eine passende Darstellung aus A bis D zu. *[0/½/1 P.]*

$\vec{u}$	☐
$\vec{v}$	☐

A	
B	
C	
D	

c) Die Spielesammlung enthält auch ein dreieckiges *Tangram*-Spiel (siehe nachstehende Abbildung).

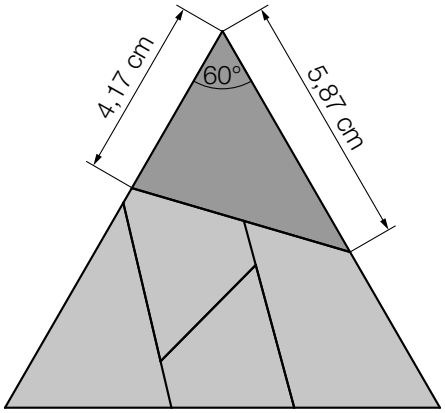


Für das in der obigen Abbildung dunkelgrau markierte spitzwinkelige Dreieck gilt:

$a = 5{,}44$ cm, $b = 3{,}83$ cm, $\beta = 43{,}23°$

1) Berechnen Sie den Winkel α. *[0/1 P.]*

Das oberste Teil des Tangram-Spiels ist in der nachstehenden Abbildung dunkelgrau markiert.



2) Berechnen Sie den Flächeninhalt des obersten Teiles. *[0/1 P.]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Windräder

a) Windräder können unterschiedliche Anzahlen an Rotorblättern aufweisen. Die jeweilige Anzahl der Rotorblätter verschiedener Windräder kann durch die Folge (f_n) beschrieben werden.

Dabei gilt: $f_1 = 2$ und $f_2 = 3$

Max nimmt an, dass (f_n) eine geometrische Folge ist.

1) Zeigen Sie, dass das Folgenglied f_3 gemäß diesem Modell nicht ganzzahlig ist. *[0/1 P.]*

Michaela nimmt an, dass (f_n) eine arithmetische Folge ist.

2) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge. *[0/1 P.]*

b) Ein Hobby-Handwerker plant den Bau von Western-Windrädern mit unterschiedlichen Anzahlen an Rotorblättern.

Bildquelle: Agnes Monkelbaan – own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goingarijp._(actm)_02.jpg#/media/File:Goingarijp._(actm)_01.jpg [25.04.2023].

Die Anzahlen der Rotorblätter lassen sich mithilfe der arithmetischen Folge (w_n) beschreiben.

$w_n = 5 \cdot (n + 3)$

Dieses Bildungsgesetz soll in einer anderen Form dargestellt werden.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$w_n = \boxed{} + (n - 1) \cdot \boxed{}$ *[0/1 P.]*

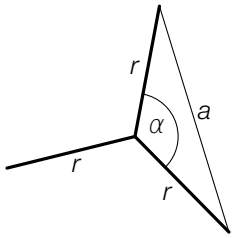
c) Sabine teilt die Windräder in einer bestimmten Region nach mehreren Merkmalen ein.

D … Menge der Windräder mit genau 3 Rotorblättern
V … Menge der Windräder mit genau 4 Rotorblättern
S … Menge der Windräder, die Strom erzeugen
M … Menge der Windräder, die Mehl mahlen

Für die Windräder in dieser Region gilt: $M \subseteq V$

1) Interpretieren Sie diese Aussage im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

d) In den nachstehenden Abbildungen ist ein bestimmtes Windrad mit 3 Rotorblättern dargestellt.



Bildquelle: BMBWF

Für dieses Windrad gilt:
$\alpha = 120°$
$a = 60{,}62$ m

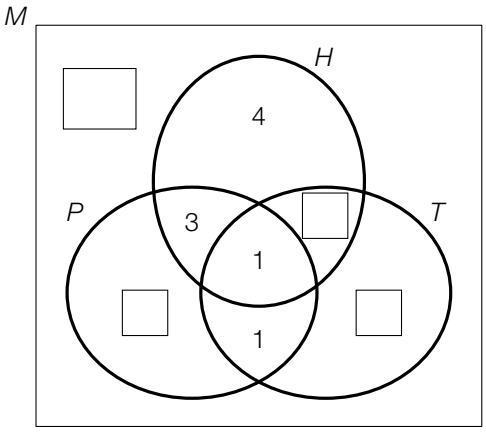
1) Berechnen Sie den Radius r. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Märchenbücher

a) Susis Märchenbuch enthält 20 Märchen. Viele dieser Märchen handeln von Prinzessinnen, Hexen oder Tieren.

- 3 Märchen handeln nur von Tieren.
- 1 Märchen handelt sowohl von Hexen als auch von Tieren, aber nicht von Prinzessinnen.
- 8 Märchen handeln von Prinzessinnen, aber nicht von Tieren.



M ... Menge aller Märchen im Märchenbuch
P ... Menge der Märchen, die von Prinzessinnen handeln
H ... Menge der Märchen, die von Hexen handeln
T ... Menge der Märchen, die von Tieren handeln

1) Vervollständigen Sie das obige Venn-Diagramm durch Eintragen der fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen. *[0/1 P.]*

Die Menge *S* enthält alle Märchen, die von Tieren oder Prinzessinnen, aber nicht von Hexen handeln.

2) Geben Sie die Menge *S* in Mengensymbolik an. Verwenden Sie dabei *P*, *H* und *T*.

$S =$ _____ *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie die Menge $M \setminus (P \cup T)$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Ein bestimmtes Märchenbuch für Leseanfänger/innen enthält Märchen mit aufsteigender Zeilenanzahl.

Das erste Märchen hat eine Zeilenanzahl von 10. Jedes weitere Märchen hat eine um 3 größere Zeilenanzahl als das jeweils davorstehende Märchen.

a_n ... Zeilenanzahl des n-ten Märchens

1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Folge (a_n). *[0/1 P.]*

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob es in diesem Märchenbuch ein Märchen gibt, das eine Zeilenanzahl von genau 27 hat. *[0/1 P.]*

Die gesamte Anzahl der Zeilen s_n für die ersten n Märchen kann mit der nachstehenden Formel berechnet werden.

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

3) Berechnen Sie die gesamte Anzahl der Zeilen der ersten 17 Märchen in diesem Märchenbuch. *[0/1 P.]*

c) Jedes der 24 Kinder einer bestimmten Klasse liest im Laufe des Schuljahres 1, 2 oder 3 Märchenbücher.

Anzahl N der gelesenen Märchenbücher	1	2	3
Anzahl der Kinder, die genau N Märchenbücher gelesen haben	15	6	3

Ein Kind dieser Klasse wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Märchenbücher, die dieses Kind gelesen hat.

1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Kind dieser Klasse mindestens 2 Märchenbücher gelesen hat. *[0/1 P.]*

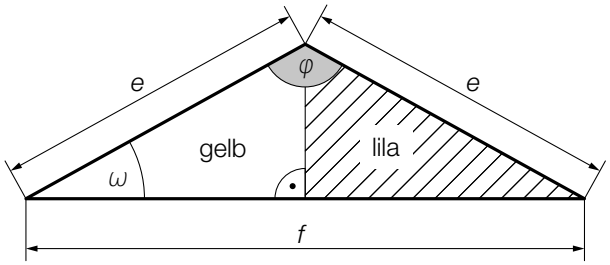
2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Pfadfinder/innen

Pfadfinder/innen sind Mitglieder einer weltweiten Jugendorganisation.

a) Ein gemeinsames Erkennungsmerkmal der Pfadfinder/innen sind dreieckige Halstücher. Eine kanadische Pfadfindergruppe hat ein zweifärbiges Halstuch als Erkennungsmerkmal (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



1) Ordnen Sie mithilfe der obigen Abbildung den beiden Winkeln jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/½/1 P.]*

ω	☐
φ	☐

A	$\arccos\left(\frac{f}{2 \cdot e}\right)$
B	$\arccos\left(\frac{e^2}{2 \cdot f \cdot e}\right)$
C	$\arccos\left(\frac{e^2 + f^2}{2 \cdot e}\right)$
D	$\arccos\left(\frac{f^2 - 2 \cdot e^2}{-2 \cdot e^2}\right)$

Für ein bestimmtes Halstuch gilt: $f = 1{,}615 \cdot e$

2) Zeigen Sie, dass dieses Halstuch <u>nicht</u> die Form eines rechtwinkeligen Dreiecks hat. *[0/1 P.]*

Dieses Halstuch hat die Form des obigen Dreiecks mit der Länge $e = 78$ cm.

3) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. *[0/1 P.]*

b) Alle 4 Jahre findet ein internationales Treffen statt. Die Anzahlen der teilnehmenden Personen der letzten Jahrzehnte sind in der nachstehenden Tabelle sowie im unten stehenden Koordinatensystem dargestellt.

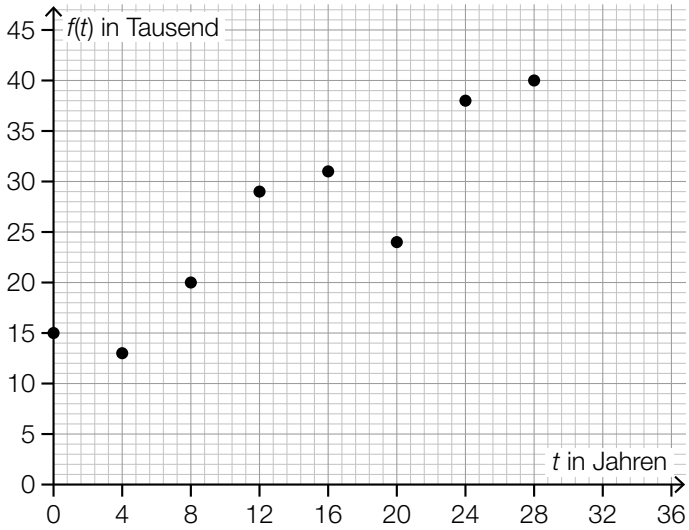
Jahr	Anzahl der teilnehmenden Personen in Tausend
1983	15
1987	13
1991	20
1995	29
1999	31
2003	24
2007	38
2011	40

Die Anzahl der teilnehmenden Personen in Abhängigkeit von der Zeit t soll durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1983
$f(t)$ ... Anzahl der teilnehmenden Personen zur Zeit t in Tausend

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der linearen Funktion f ein. *[0/1 P.]*



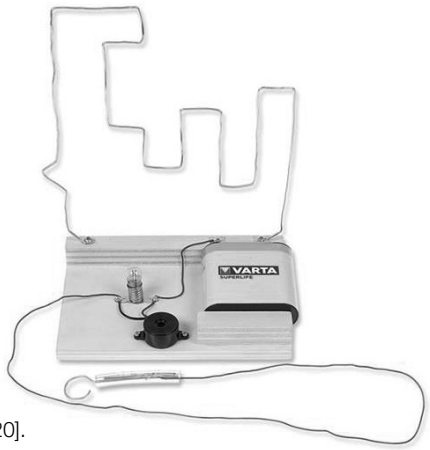
Marco vergisst, bei der Ermittlung der linearen Regressionsfunktion die Anzahl der teilnehmenden Personen des Jahres 2003 zu verwenden.

3) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich dadurch der Wert des Korrelationskoeffizienten vergrößert. *[0/1 P.]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Heißer Draht

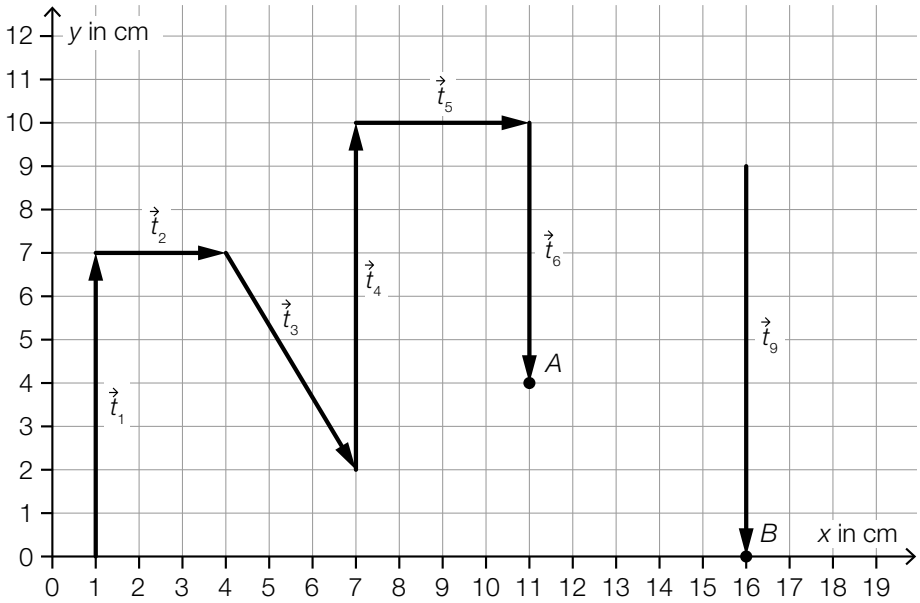
Heißer Draht ist ein Spiel, bei dem man eine Schlaufe einen Draht entlang führen muss, ohne diesen Draht zu berühren. Im Werkunterricht basteln Kinder ein solches Spiel. Dabei biegen die Kinder ihren Draht in verschiedene Formen (siehe nebenstehende Abbildung).



Bildquelle: https://www.winklerschulbedarf.com/at/i/einfache-rennstrecke-100517 [28.11.2020].

a) Timon hat seinen Draht in eine eckige Form gebogen.

Die Form dieses Drahtes wird durch Aneinanderreihen der Vektoren $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_9$ (in dieser Reihenfolge) beschrieben. Die Vektoren $\vec{t}_1$ bis $\vec{t}_6$ sowie $\vec{t}_9$ sind in der nachstehenden Abbildung bereits dargestellt.



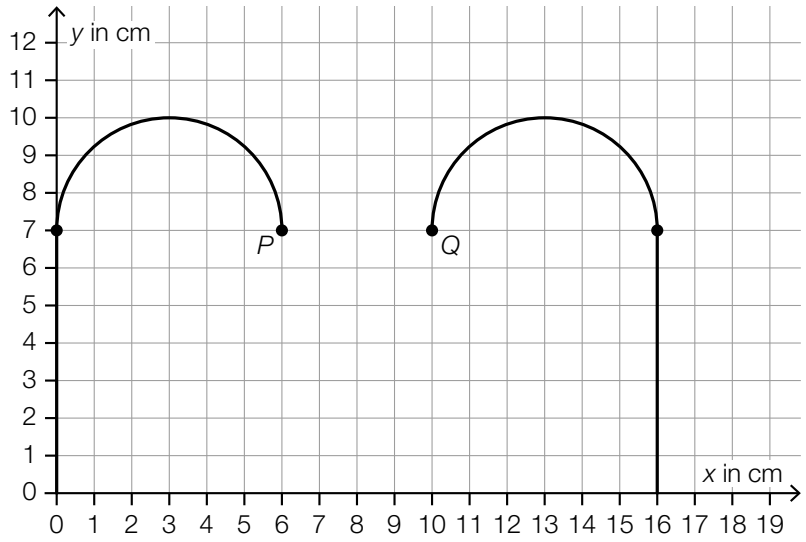
Es gilt: $\vec{t}_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{t}_8 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Vektoren $\vec{t}_7$ und $\vec{t}_8$ so ein, dass die Lücke im Draht geschlossen wird. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Länge des Drahtstücks zwischen den Punkten *A* und *B*. *[0/1 P.]*

3) Geben Sie diejenigen Vektoren aus $\vec{t}_1$ bis $\vec{t}_6$ an, deren Skalarprodukt mit dem Vektor $\vec{t}_6$ gleich 0 ist. *[0/1 P.]*

b) Die Form von Sabines Draht setzt sich aus 4 geradlinigen Stücken und 2 halbkreisförmigen Stücken zusammen. In der nachstehenden Abbildung sind nur 2 der 4 geradlinigen Stücke dargestellt.



Vom Punkt P führt der Draht geradlinig zuerst zu einem Punkt S und dann weiter zum Punkt Q.

Es gilt: $\vec{s}_1 = \overrightarrow{PS}$, $\vec{s}_2 = \overrightarrow{SQ}$

1) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf jeden Fall auf diese beiden Vektoren zutrifft.
[1 aus 5] *[0/1 P.]*

$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\lvert\vec{s}_1\rvert + \lvert\vec{s}_2\rvert < 4$	☐
$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{s}_1 - \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\lvert\vec{s}_1\rvert = \lvert\vec{s}_2\rvert = 1$	☐

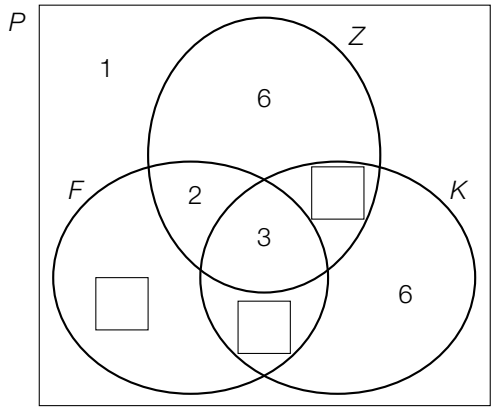
Aufgabe 7 (Teil B)

Strickpullover und -westen

Die Großeltern Annika und Johannes stricken für ihre Enkelkinder Pullover und Westen.

a) Im Laufe der Jahre haben die Großeltern 34 Pullover gestrickt.

4 Pullover hatten sowohl ein Zopfmuster als auch eine Kapuze, aber kein farbiges Muster.
16 Pullover hatten eine Kapuze.

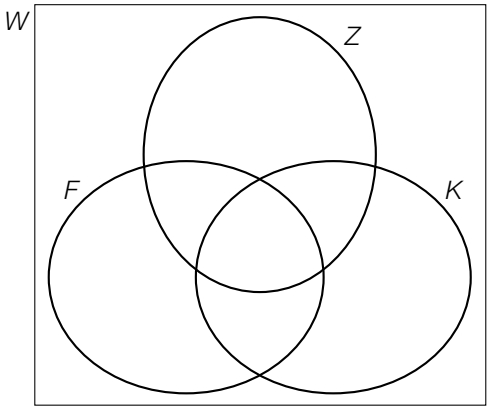


P ... Menge aller Pullover, die die Großeltern gestrickt haben
F ... Menge der Pullover mit farbigem Muster
Z ... Menge der Pullover mit Zopfmuster
K ... Menge der Pullover mit Kapuze

1) Tragen Sie im obigen Venn-Diagramm die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der gestrickten Pullover mindestens 2 der oben genannten 3 Eigenschaften (farbiges Muster, Zopfmuster, Kapuze) haben. *[0/1 P.]*

b) Die Großeltern stricken seit einigen Jahren auch Westen. Die im ersten Jahr gestrickten Westen haben jeweils nur 1 von 3 Eigenschaften. Jede Eigenschaft tritt dabei mindestens 1-mal auf.



W ... Menge aller Westen, die die Großeltern gestrickt haben
F ... Menge der Westen mit farbigem Muster
Z ... Menge der Westen mit Zopfmuster
K ... Menge der Westen mit Kapuze

1) Markieren Sie im obigen Venn-Diagramm diejenigen Bereiche, die den im ersten Jahr gestrickten Westen entsprechen. *[0/1 P.]*

Im darauffolgenden Jahr stricken die Großeltern auch Westen, die mehr als eine der oben genannten 3 Eigenschaften haben.

Enkelkind Monika wünscht sich eine Weste mit farbigem Muster und mit Kapuze, aber ohne Zopfmuster.
Enkelkind Leon wünscht sich eine Weste mit Kapuze, aber ohne Zopfmuster und ohne farbiges Muster.

2) Ordnen Sie den beiden Westen jeweils den zutreffenden Ausdruck in Mengensymbolik aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Weste, die sich Monika wünscht	☐
Weste, die sich Leon wünscht	☐

A	$K \setminus (F \cup Z)$
B	$(F \cap K) \setminus Z$
C	$Z \setminus (F \cup K)$
D	$(K \cap Z) \setminus F$

c) Die Großeltern ermitteln die Arbeitszeit, die sie für das Stricken der Pullover für ihre Enkelkinder benötigen.

Für 1 Pullover mit 1 Eigenschaft benötigen sie 3 Wochen.
Für 1 Pullover mit 2 Eigenschaften benötigen sie 4 Wochen.
Für 1 Pullover mit 3 Eigenschaften benötigen sie 5 Wochen.

Jeder von den Großeltern gestrickte Pullover hat mindestens 1 Eigenschaft, aber höchstens 3 Eigenschaften.

Die benötigte Arbeitszeit in Wochen für einen nach dem Zufallsprinzip ausgewählten Pullover kann durch die Zufallsvariable X beschrieben werden (siehe nachstehende Tabelle).

x_i	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,15	0,45	

1) Tragen Sie die fehlende Wahrscheinlichkeit in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *[0/1 P.]*

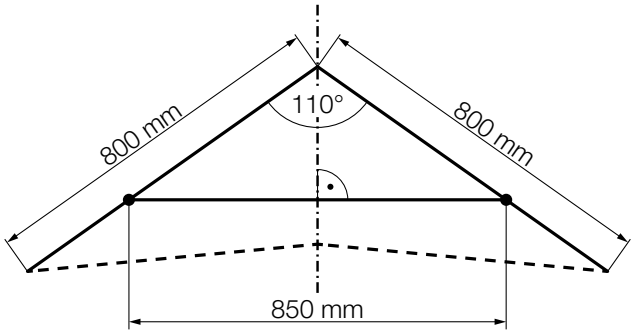
Aufgabe 8 (Teil B)

Lenkdrachen

Lenkdrachen sind Flugdrachen, die über Schnüre gesteuert werden können.

a) Ein Lenkdrachen soll aus 3 Stangen und einer Bespannung aus Nylon gebaut werden. Die 3 Stangen sind in den nachstehenden Abbildungen durch die durchgezogenen Strecken dargestellt.

Abbildung 1:

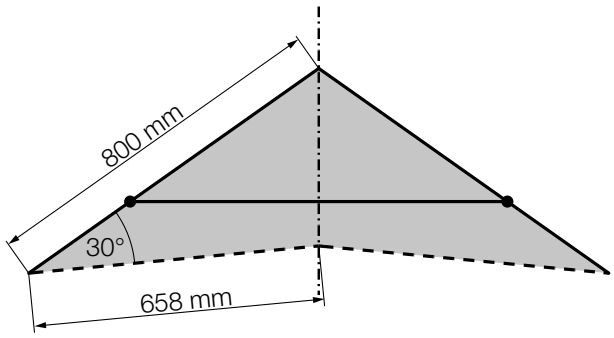


1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung 1 die Strecke x, deren Länge mit der nachstehenden Formel berechnet werden kann.

$x = \frac{425}{\sin(55°)}$ *[0/1 P.]*

Die grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung 2 entspricht der Bespannung aus Nylon.

Abbildung 2:



Die 3 Stangen und die verwendeten Nähte und Schlaufen haben insgesamt eine Masse von 220 g.
1 m² des verwendeten Nylons hat eine Masse von 48 g.

2) Berechnen Sie die gesamte Masse des Lenkdrachens. *[0/1 P.]*

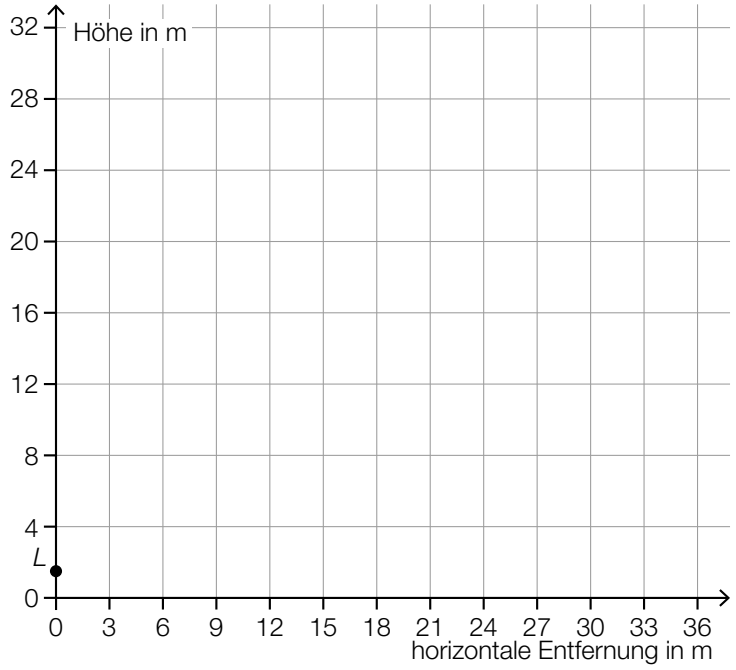
b) Lisa lässt ihren Lenkdrachen steigen und beobachtet ihn vom Punkt L aus.

Der Lenkdrachen wird dabei modellhaft als punktförmig angenommen.

Der Lenkdrachen steigt ausgehend vom Punkt D_1 und befindet sich nach dem Aufstieg im Punkt D_2.

Es gilt:
$L = (0|1{,}5)$, $\overrightarrow{LD_1} = \begin{pmatrix} 21 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{LD_2} = \begin{pmatrix} 12 \\ 26{,}5 \end{pmatrix}$ (Maße in m)

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die Vektoren $\overrightarrow{LD_1}$ und $\overrightarrow{LD_2}$ jeweils als Pfeil ausgehend vom Punkt L ein. *[0/1 P.]*

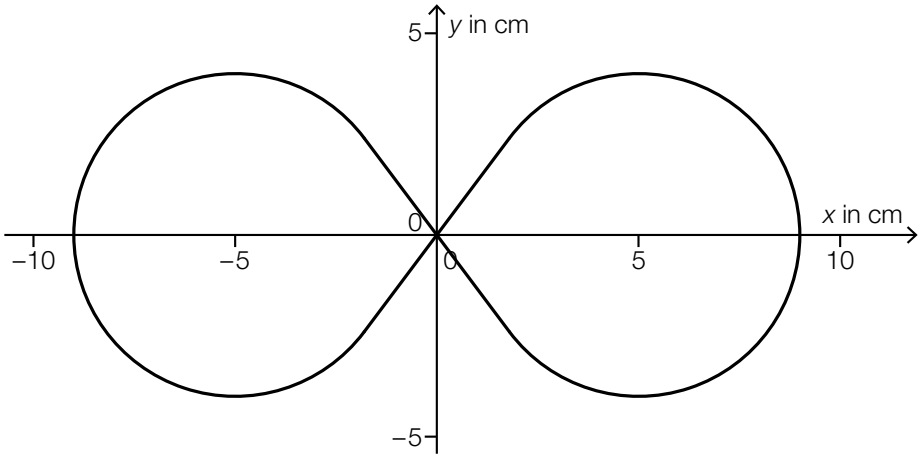


Die Entfernung vom Punkt L zum Punkt D_2 ist größer als die Entfernung vom Punkt L zum Punkt D_1.

2) Berechnen Sie die Differenz dieser beiden Entfernungen. *[0/1 P.]*

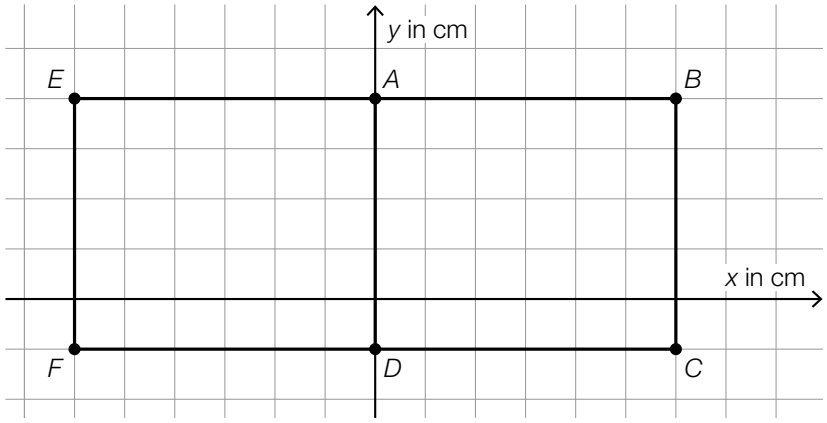
c) In einem Buch über Lenkdrachen sind Flugfiguren abgebildet.

Eine dieser Flugfiguren hat annähernd die Form eines liegenden Achters (siehe nachstehende Abbildung).



1) Begründen Sie, warum diese Flugfigur nicht durch den Graphen einer einzigen Funktion beschrieben werden kann. *[0/1 P.]*

Die Flugfigur *Square Eight* ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



2) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die obige Abbildung <u>nicht</u> zutrifft. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist der Gegenvektor von $\overrightarrow{AE}$.	☐
Der Vektor $\overrightarrow{CD}$ ist ein Normalvektor von $\overrightarrow{EF}$.	☐
$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$	☐
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{CD}\rvert$	☐
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	☐

Aufgabe 9 (Teil B)

Fotoausarbeitung

Ein Unternehmen bietet die Ausarbeitung von Fotos in Form von Fotobüchern und Wandbildern an.

a) Fotobücher werden mit verschiedener Seitenzahl angeboten.

In der nachstehenden Tabelle sind die Preise für einige solcher Fotobücher angegeben.

Seitenzahl	Preis für ein Fotobuch in Euro
26	25,90
28	26,90
34	29,90
40	33,90
42	34,90
46	36,90

Der Preis für ein Fotobuch in Abhängigkeit von der Seitenzahl x soll durch die lineare Funktion D modelliert werden.

x ... Seitenzahl
$D(x)$ ... Preis für ein Fotobuch mit der Seitenzahl x in Euro

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion D auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion D den Preis für ein Fotobuch mit 60 Seiten. *[0/1 P.]*

b) Wandbilder werden in verschiedenen Größen angeboten.

	Breite	Länge
Größe 1	$b_1 = \square$	ℓ_1
Größe 2	$b_2 = 50$	ℓ_2
Größe 3	$b_3 = \square$	ℓ_3
Größe 4	$b_4 = \square$	ℓ_4
Größe 5	$b_5 = 74$	ℓ_5

b_n ... Breite bei der Größe n in cm
ℓ_n ... Länge bei der Größe n in cm

Die Breiten dieser 5 Größen sind Glieder der arithmetischen Folge (b_n).

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Folge (b_n). *[0/1 P.]*

Für alle Größen gilt:

$$\ell_n = \frac{3}{2} \cdot b_n$$

3) Vervollständigen Sie das nachstehende rekursive Bildungsgesetz für die Folge (ℓ_n).

$\ell_{n+1} = \ell_n + \square \qquad \ell_1 = \square$ *[0/1 P.]*

Die Flächeninhalte dieser 5 Größen können durch die Folge (A_n) beschrieben werden.

4) Kreuzen Sie die zutreffende Formel für die Folge (A_n) an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$A_n = \frac{2}{3} \cdot b_n \cdot \ell_n$	☐
$A_n = \frac{2}{3} \cdot b_n^2$	☐
$A_n = \frac{3}{2} \cdot b_n^2$	☐
$A_n = \frac{3}{2} \cdot \ell_n^2$	☐
$A_n = \frac{3}{2} \cdot b_n \cdot \ell_n$	☐

Aufgabe 7 (Teil B)

Bärenwald Arbesbach

In der Gemeinde Arbesbach im Waldviertel wurde von einem Tierschutzverein eine Auffangstation für Bären errichtet.

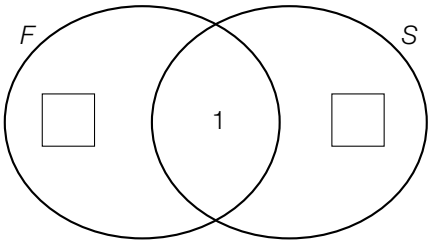
a) In der nachstehenden Tabelle sind die jährlichen Futterkosten pro Bär für das Jahr 2008 angegeben.

Futtermittel	jährliche Futterkosten pro Bär in Euro	Futterspende
Obst	1 960	nein
Gemüse	1 070	nein
Brot	270	nein
Essensreste	200	ja
Walnüsse	keine	ja
Honig	keine	ja
Sonstiges	937	nein

Im Jahr 2008 wurden im Bärenwald 6 Bären versorgt. Das Jahr 2008 war ein Schaltjahr mit 366 Tagen.

1) Berechnen Sie die täglichen Futterkosten im Jahr 2008 für diese 6 Bären. *[0/1 P.]*

Im nachstehenden Venn-Diagramm sind die Mengen F und S dargestellt.



F ... Menge der Futtermittel, die Futterkosten verursacht haben
S ... Menge der Futtermittel, die als Futterspende abgegeben wurden

2) Geben Sie dasjenige Futtermittel an, das im Bereich $F \cap S$ liegt. *[0/1 P.]*

3) Tragen Sie die zwei fehlenden Anzahlen der Elemente (von $F \setminus S$ und $S \setminus F$) in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

b) Im Bärenwald Arbesbach steht eine Tafel mit Informationen über die Vermehrung von Streunerkatzen. Auf dieser Tafel findet man folgende Angaben:

Jahr n	Anzahl der Streunerkatzen im Jahr n
1	2
2	12
3	66
4	382
6	12 680

Die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Streunerkatzen kann als Folge (a_n) aufgefasst werden.

1) Zeigen Sie, dass es sich bei (a_n) <u>nicht</u> um eine geometrische Folge handelt. *[0/1 P.]*

In einem einfachen Modell soll die Vermehrung von Streunerkatzen dennoch näherungsweise durch eine geometrische Folge beschrieben werden. Diese geometrische Folge wird mit (b_n) bezeichnet.

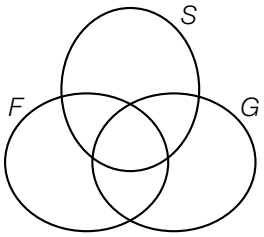
2) Erstellen Sie nur mithilfe der Folgenglieder $b_1 = 2$ und $b_4 = 382$ ein explizites Bildungsgesetz der geometrischen Folge (b_n). *[0/1 P.]*

3) Zeigen Sie, dass b_6 um weniger als 1 % (von a_6) kleiner als a_6 ist. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Wohnungen

a) Tanja und Moritz suchen eine gemeinsame Wohnung. Sie teilen die gefundenen Wohnungen nach 3 Kriterien ein.



F ... Menge der Wohnungen mit einem Fenster im Badezimmer
S ... Menge der Wohnungen mit zwei Schlafzimmern
G ... Menge der Wohnungen mit einem Garten

Tanja wünscht sich eine Wohnung, die sowohl zwei Schlafzimmer als auch ein Fenster im Badezimmer als auch einen Garten hat.

Die Menge der Wohnungen, die Tanjas Wünschen entsprechen, wird mit *T* bezeichnet.

1) Geben Sie *T* in Mengensymbolik an. Verwenden Sie dabei *F*, *S* und *G*.

$T =$ _____ *[0/1 P.]*

Moritz wünscht sich eine Wohnung aus der folgenden Menge:
$M = G \setminus (S \cap F)$

2) Markieren Sie die Menge *M* in der obigen Abbildung. *[0/1 P.]*

b) Tarek beobachtet die Wertsteigerung seiner Wohnung im Zeitraum von 2014 bis 2020.

Jahr	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Wert der Wohnung in tausend Euro	153	155	158	163	170	171	180

Tarek nimmt an, dass sich die zeitliche Entwicklung des Wertes seiner Wohnung näherungsweise durch die quadratische Funktion *W* beschreiben lässt.

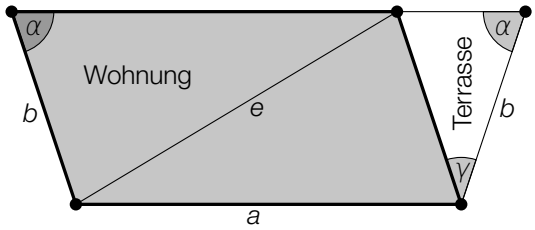
t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2014
$W(t)$ ... Wert der Wohnung zur Zeit *t* in tausend Euro

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion *W* auf. *[0/1 P.]*

Tarek plant, seine Wohnung im Jahr 2025 zu verkaufen.

2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion *W* den prognostizierten Wert der Wohnung im Jahr 2025 in Euro. *[0/1 P.]*

c) Sanja betrachtet den Plan einer Wohnung mit Terrasse. Die Grundfläche dieser Wohnung hat modellhaft die Form eines Parallelogramms (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von γ auf.

$\gamma =$ _____ *[0/1 P.]*

Der Flächeninhalt der Wohnung und der Flächeninhalt der Terrasse sollen berechnet werden.

2) Ordnen Sie der Wohnung und der Terrasse jeweils die zutreffende Formel zur Berechnung ihres Flächeninhalts aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Wohnung	
Terrasse	

A	$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \sin(\gamma)$
B	$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$
C	$A = b \cdot b \cdot \sin(\alpha - \gamma)$
D	$A = a \cdot b \cdot \sin(180° - \alpha)$

3) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung einen Winkel ω, der durch den nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

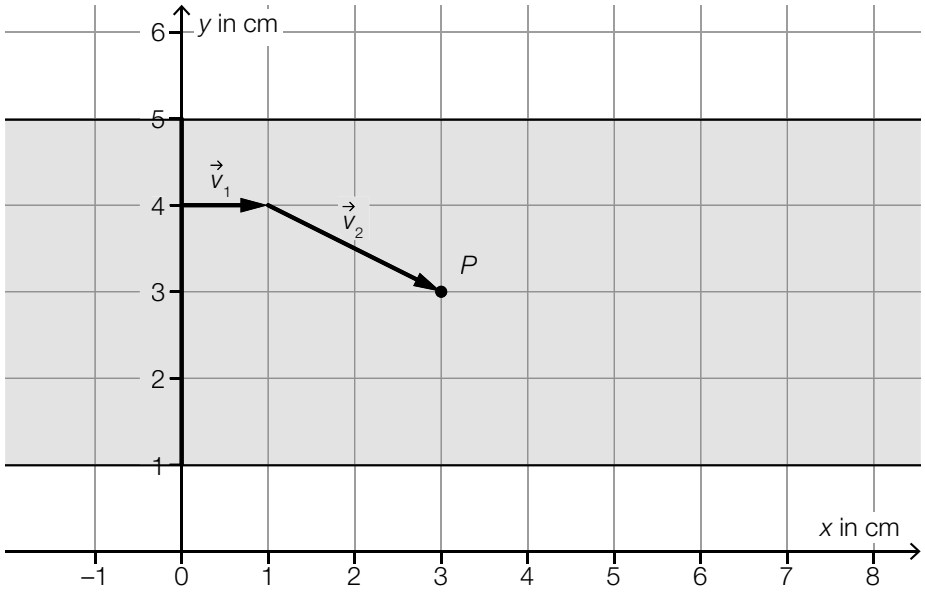
$\omega = \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha) \cdot b}{e}\right)$ *[0/1 P.]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Vektorrennen

Beim Spiel *Vektorrennen* zeichnen die Spieler/innen Pfeile auf einer Rennstrecke in einem Koordinatensystem ein.
Diese Pfeile stellen die Bewegung ihres Fahrzeugs dar.

a) In der nachstehenden Abbildung sind die ersten zwei Bewegungen des Fahrzeugs von Martin auf einer bestimmten Rennstrecke dargestellt.



Der Vektor $\vec{v}_2$ ist in der obigen Abbildung als Pfeil dargestellt.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.
$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt P ein. *[0/1 P.]*

Die Länge der Strecke s ist die Summe der Längen der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$.

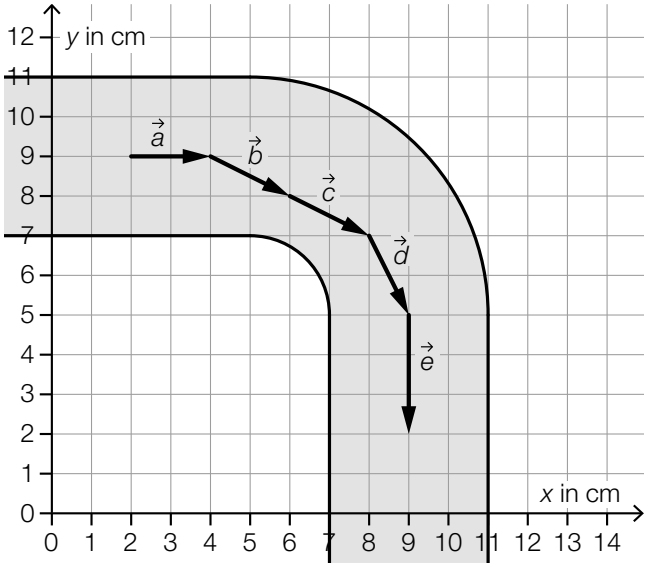
3) Berechnen Sie die Länge der Strecke s. *[0/1 P.]*

Für einen Winkel α gilt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3}{|\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_3|}\right)$$

4) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung α mit dem Punkt P als Scheitel ein. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Bewegungen des Fahrzeugs von Emese auf einer anderen Rennstrecke dargestellt.



1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{d}\rvert$	☐
$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0$	☐
$\vec{a} + \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$\arccos\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\lvert\vec{b}\rvert \cdot \lvert\vec{c}\rvert}\right) = 0°$	☐

Aufgabe 6 (Teil B)

Avengers

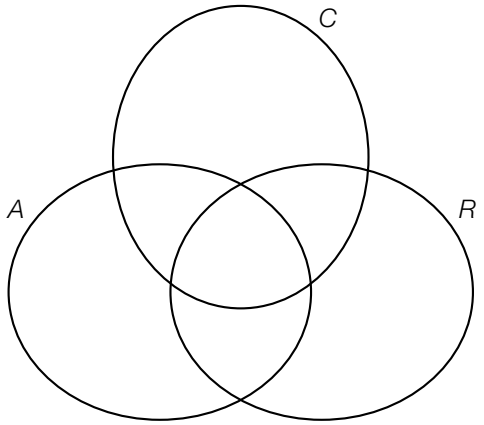
Die Avengers sind eine Gruppe von Superheldinnen und Superhelden des Comicverlags MARVEL™. Neben zahlreichen Comics gibt es auch mehrere Verfilmungen ihrer Geschichten.

a) Die verschiedenen Superheldinnen und Superhelden tauchen dabei oft in mehreren Filmen auf.

Die nachstehende Tabelle ist für die 4 Superhelden Captain America, Hulk, Iron Man und Thor ausgefüllt.

Filmtitel	mitwirkende Superhelden
Civil War	Captain America, Iron Man
Ragnarok	Hulk, Thor
Avengers	Captain America, Hulk, Iron Man, Thor

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Venn-Diagramm denjenigen Bereich, in dem Iron Man liegt. *[0/1 P.]*



A ... Menge der Superhelden, die in *Avengers* mitwirken
C ... Menge der Superhelden, die in *Civil War* mitwirken
R ... Menge der Superhelden, die in *Ragnarok* mitwirken

2) Geben Sie den Bereich des Venn-Diagramms, in dem Captain America liegt, in Mengensymbolik an. *[0/1 P.]*

3) Kreuzen Sie diejenige Menge an, die <u>nicht</u> leer ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$R \setminus (C \cup A)$	☐
$(C \cap R) \setminus A$	☐
$A \setminus (C \cup R)$	☐
$A \cap R \cap C$	☐
$(R \cap A) \setminus C$	☐

Der Superheld Black Panther liegt in der folgenden Menge: $C \setminus (A \cup R)$

4) Geben Sie an, in wie vielen der obigen 3 Filme Black Panther gemeinsam mit Hulk und Thor zu sehen ist. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Tabelle sind die Erscheinungsjahre und die Einnahmen der ersten 6 MARVEL™-Filme angegeben.

Filmtitel	Erscheinungsjahr	Einnahmen pro Film in Millionen US-Dollar
Der unglaubliche Hulk	2008	263,4
Iron Man	2008	585,2
Iron Man 2	2010	623,9
The First Avenger	2011	370,6
Thor	2011	449,3
Avengers	2012	1519,6

Die Entwicklung der Einnahmen pro Film soll in Abhängigkeit vom Erscheinungsjahr durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Erscheinungsjahr 2008. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den zugehörigen Korrelationskoeffizienten. *[0/1 P.]*

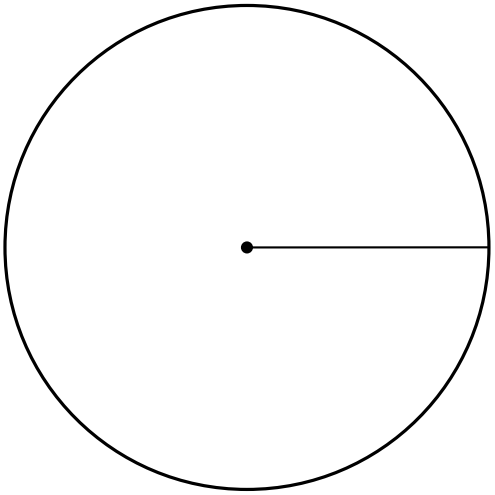
c) Auf einer bestimmten Online-Plattform werden Filme mit 1 bis 5 Sternen bewertet.

In der nachstehenden Tabelle sind die Bewertungen aller 23 MARVEL™-Filme (Stand 2019) eingetragen.

Anzahl der Filme	Bewertung in Sternen
1	★★★ (3)
6	★★★⯪ (3,5)
15	★★★★ (4)
1	★★★★⯪ (4,5)

Die Bewertungen dieser 23 Filme sollen in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm durch Einzeichnen der entsprechenden 4 Sektoren. *[0/1 P.]*



Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sterne eines aus diesen 23 Filmen zufällig ausgewählten Films an.

2) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$. *[0/1 P.]*

Daniela wählt 2 verschiedene dieser 23 Filme zufällig aus.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Filme jeweils eine Bewertung von mindestens 4 Sternen haben. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Puzzles

a) Bei einem sogenannten *Rundpuzzle* werden die Teile in Ringen aneinandergelegt.
Der innerste Ring besteht aus 4 Teilen. Die Anzahl der Teile jedes Ringes ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

n (Nummer des Ringes – von innen aus gezählt)	1	2	3	4	5	6	7	8
r_n (Anzahl der Teile im n-ten Ring)	4	10	16	22	32	36	38	42

Die Anzahl der Teile im jeweiligen Ring kann durch die Folge (r_n) beschrieben werden.

1) Begründen Sie, warum sich die Anzahl der Teile im n-ten Ring bis $n = 4$ durch eine arithmetische Folge beschreiben lässt. *[0/1 P.]*

2) Weisen Sie nach, dass sich die Anzahl der Teile im n-ten Ring ab $n = 5$ nicht mehr durch eine arithmetische Folge beschreiben lässt. *[0/1 P.]*

Die gesamte Anzahl aller Teile bis zum n-ten Ring kann bis $n = 4$ mithilfe der nachstehenden Formel berechnet werden.

$s_n = k \cdot n^2 + \ell \cdot n$

s_n ... gesamte Anzahl der Teile in den ersten n Ringen
n ... Anzahl der Ringe
k, ℓ ... Parameter

Es gilt: $s_1 = 4$ und $s_2 = 14$

3) Berechnen Sie die Parameter k und ℓ. *[0/1 P.]*

b) Vom Hersteller B gibt es Puzzles, deren Teilezahlen der Folge (b_n) entsprechen.
b_1 ist dabei die Teilezahl des größten Puzzles (d. h. des Puzzles mit den meisten Teilen).

$b_n = 4\,000 \cdot q^{n-1}$ mit $n \leq 6$

Das fünftgrößte Puzzle ($n = 5$) hat 250 Teile.

1) Ermitteln Sie den Parameter q. *[0/1 P.]*

Das fünftgrößte Puzzle des Herstellers C hat doppelt so viele Teile wie das fünftgrößte Puzzle des Herstellers B. Dieses Verhältnis gilt für alle Puzzlegrößen.

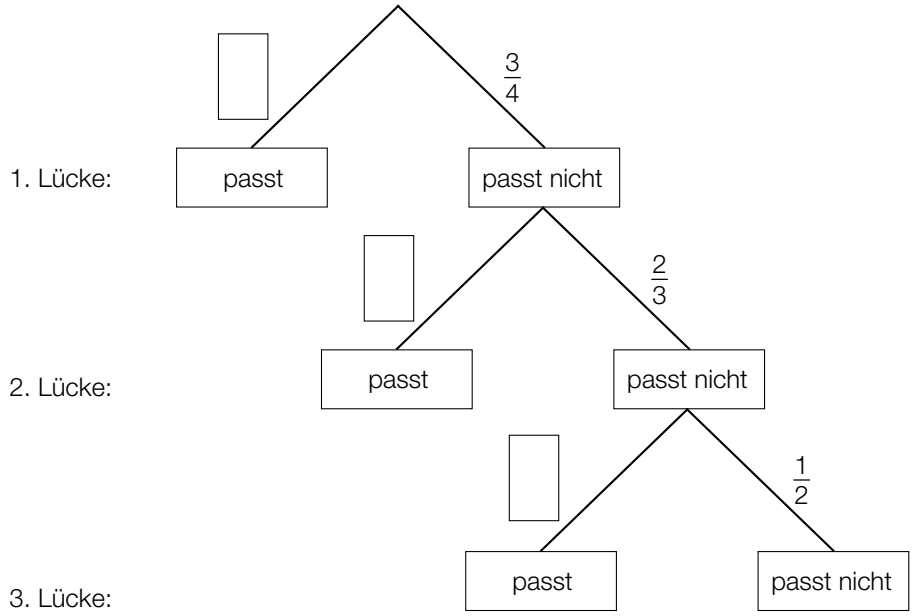
Die Teilezahlen der Puzzles des Herstellers C entsprechen der Folge (c_n).

2) Kreuzen Sie das auf die Folge (c_n) zutreffende Bildungsgesetz an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$c_n = 4\,000 \cdot q^{2 \cdot n-1}$	☐
$c_n = 4\,000 \cdot q^{2 \cdot (n-1)}$	☐
$c_n = 4\,000 \cdot (2 \cdot q)^{n-1}$	☐
$c_n = (4\,000 \cdot 2) \cdot q^{n-1}$	☐
$c_n = 4\,000 \cdot q^{(n-1)^2}$	☐

c) Bei einem Puzzle für Kinder sind noch 4 Lücken für jeweils 1 Teil frei.

Andreas nimmt eines der 4 Teile und versucht so oft, es in jede der Lücken zu legen, bis er die richtige Lücke gefunden hat.
Dieser Vorgang wird bis zur 3. Lücke durch das nachstehende Baumdiagramm beschrieben.



1) Tragen Sie im obigen Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

Lena wählt ein Teil zufällig aus und betrachtet die folgenden zwei Ereignisse:

E_1 ... „das Teil passt in die 1. Lücke“
E_2 ... „das Teil passt nicht in die 1. Lücke, aber es passt in die 2. Lücke“

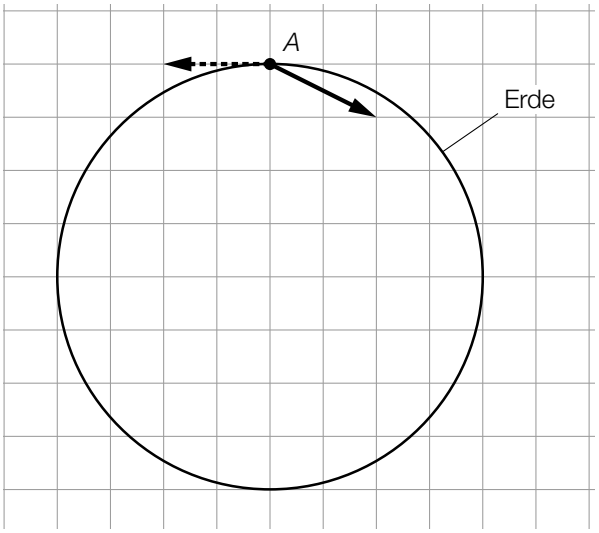
2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 ist. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Erde

a) In jedem Punkt der Erdoberfläche entsteht eine Gezeitenkraft, die vereinfacht betrachtet durch Addition von Anziehungskraft des Mondes und Trägheitskraft zustandekommt.

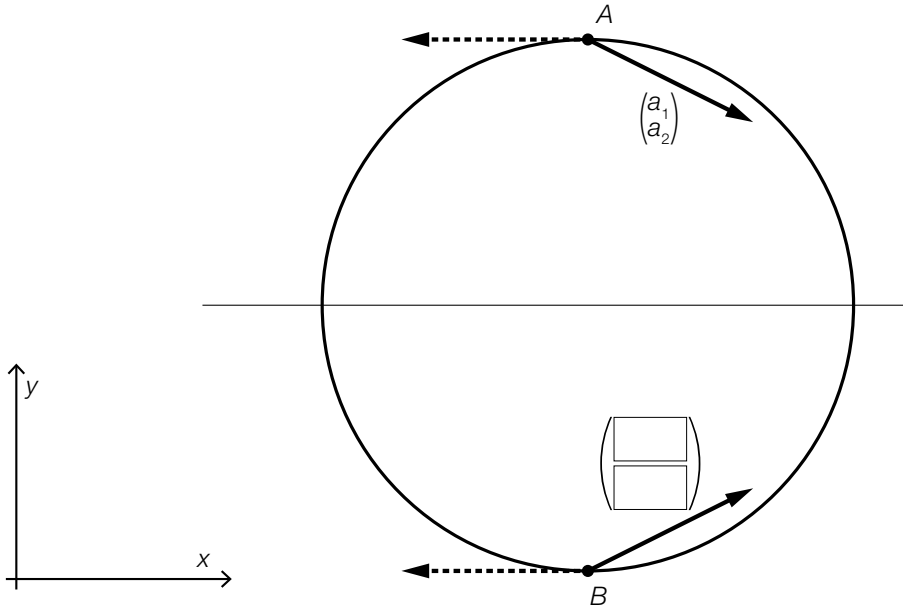
Der Punkt *A* liegt auf der Erdoberfläche. In diesem Punkt sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile dargestellt. (Siehe nachstehende modellhafte Abbildung.)



Der durchgezogene Pfeil symbolisiert dabei die Anziehungskraft des Mondes, der strichlierte Pfeil symbolisiert die Trägheitskraft.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die resultierende Gezeitenkraft im Punkt *A* als Pfeil ein. *[0/1 P.]*

Der Punkt B liegt ebenfalls auf der Erdoberfläche. Auch hier sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile eingezeichnet. (Siehe nachstehende modellhafte Abbildung.)



Die entsprechenden Vektoren sind entlang der eingezeichneten Geraden gespiegelt.

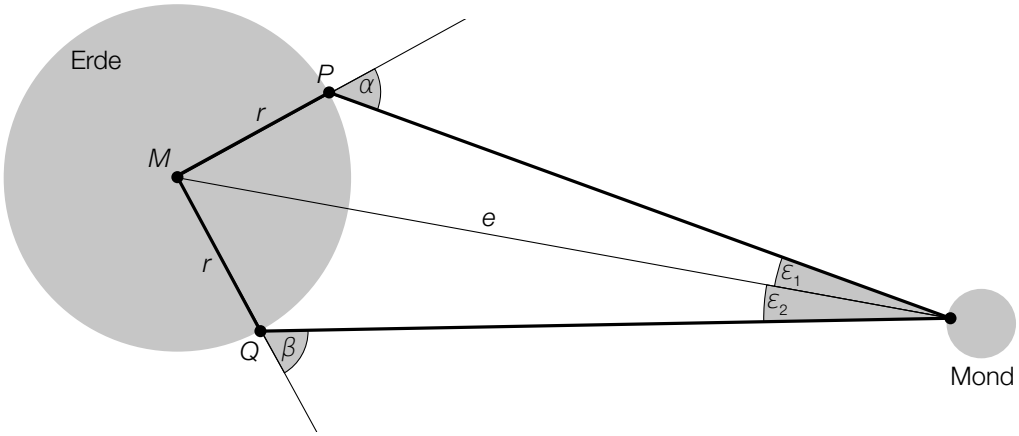
2) Ergänzen Sie in der obigen Abbildung mithilfe von a_1 und a_2 die fehlenden Koordinaten des Vektors für die Anziehungskraft des Mondes im Punkt B. *[0/1 P.]*

Im Mittelpunkt der Erde ist der Vektor der Trägheitskraft $\vec{f}$ der Gegenvektor zur Anziehungskraft $\vec{a}$ des Mondes.
Dabei gilt: $\vec{f} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\vec{f} = -\vec{a}$	☐
$\vec{f} \cdot \vec{a} = 0$	☐
$\lvert\vec{f}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert$	☐
$\vec{f} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{f} - \vec{a} = 2 \cdot \vec{f}$	☐

b) Mithilfe der sogenannten *Triangulation* lässt sich die Entfernung Erde – Mond bestimmen. Dazu werden unter anderem ausgehend von den Punkten P und Q auf der Erde mehrere Winkel bestimmt (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



1) Markieren Sie in der obigen Abbildung den Winkel γ, für den gilt:
$360° = (180° - \alpha) + (180° - \beta) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \gamma$ *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von $\sin(\varepsilon_1)$ auf. Verwenden Sie dabei r, e und α.

$\sin(\varepsilon_1) =$ _____ *[0/1 P.]*

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Strecke ein, deren Länge ℓ sich mit dem nachstehenden Ausdruck berechnen lässt.
$\ell = \sqrt{2 \cdot r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \cos(\gamma)}$ *[0/1 P.]*

c) In einer Fernseh-Dokumentation über die Erde wurden einige Überlegungen zur Größe der Erde angestellt. Die Erde wurde dabei modellhaft als kugelförmig angenommen.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

_____①_____ man den Durchmesser der Erde, so _____②_____ sich ihr Volumen.

①	
Verdoppelt	☐
Verdreifacht	☐
Vervierfacht	☐

②	
verdoppelt	☐
verachtfacht	☐
verneunfacht	☐

Aufgabe 6 (Teil B)

Smoothies

Smoothies sind Mixgetränke mit Obst oder Gemüse.

a) In der nachstehenden Tabelle sind der Vitamin-C-Gehalt und der Nährwert von Orangen und Mangos dargestellt.

	Orangen	Mangos
Vitamin-C-Gehalt in mg/g	0,45	0,37
Nährwert in Kilokalorien pro g (kcal/g)	0,47	0,62

Der empfohlene Tagesbedarf eines Menschen an Vitamin C beträgt 100 mg.

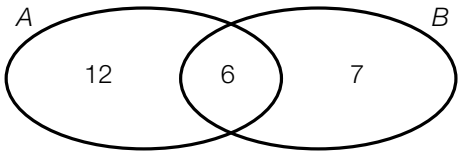
Für einen Smoothie sollen die beiden Obstsorten so gemischt werden, dass man eine Mischung erhält, die 100 mg Vitamin C enthält und einen Nährwert von 125 kcal hat.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die benötigten Mengen an Orangen und Mangos (in g) berechnet werden können. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die benötigten Mengen an Orangen und Mangos (in g). *[0/1 P.]*

b) 27 Schülerinnen bereiten Smoothies mit Orangen und/oder Mangos zu.

Jede Schülerin darf höchstens 1 Smoothie verkosten.
Im nachstehenden Venn-Diagramm sind die Anzahlen der Schülerinnen dargestellt, die diese Smoothies nach der Zubereitung verkosten.



A … Menge der Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der Orangen enthält
B … Menge der Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der Mangos enthält

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent dieser 27 Schülerinnen keinen Smoothie verkosten. *[0/1 P.]*

Die Menge aller Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der nur eine einzige der oben genannten Obstsorten enthält, wird mit *L* bezeichnet.

2) Kennzeichnen Sie im obigen Venn-Diagramm die Menge *L*. *[0/1 P.]*

3) Geben Sie die Menge *L* in Mengensymbolik an. *[0/1 P.]*

c) Die Funktion f beschreibt näherungsweise die vom Körper aufgenommene Vitamin-C-Menge in Abhängigkeit von der konsumierten Vitamin-C-Menge.

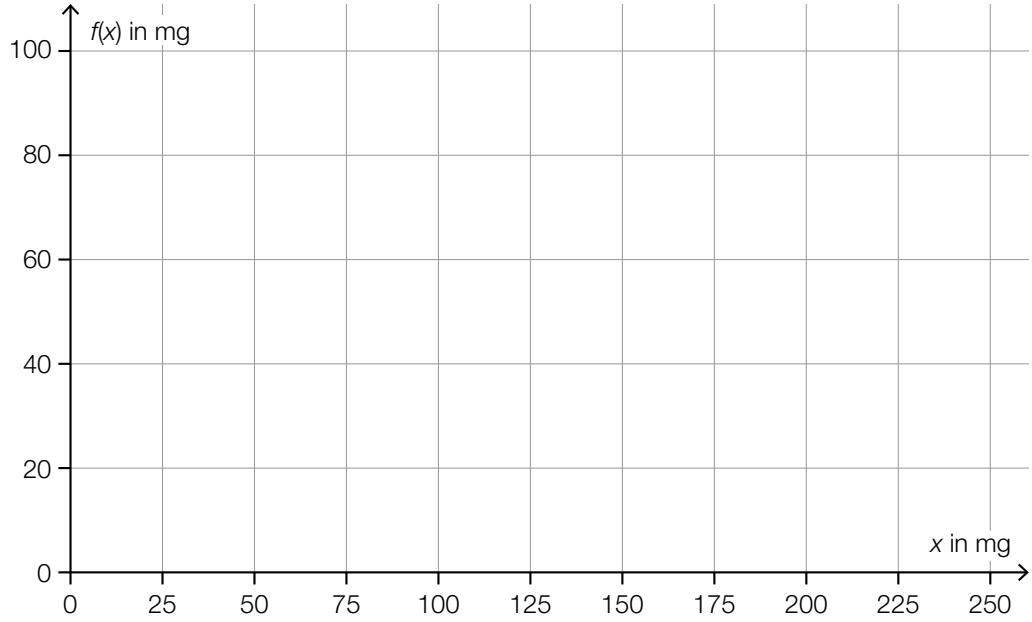
$f(x) = 28{,}7 \cdot \ln(x) - 73{,}6$ mit $25 \leq x \leq 250$

x … konsumierte Vitamin-C-Menge in mg
$f(x)$ … vom Körper aufgenommene Vitamin-C-Menge in mg

Für alle x mit $25 \leq x \leq 250$ gilt: $f'(x) > 0$

1) Interpretieren Sie die obige Ungleichung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

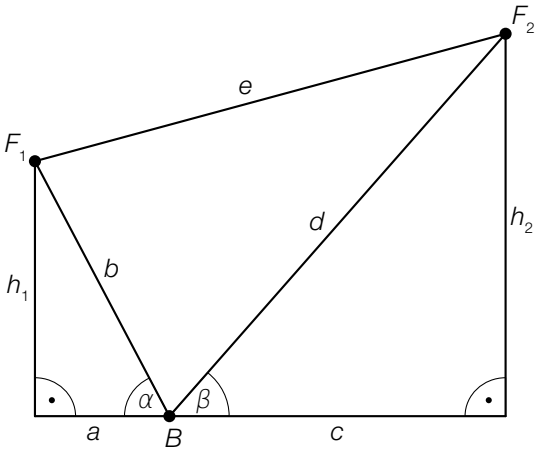
2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion f ein. *[0/1 P.]*



Aufgabe 7 (Teil B)

Flugzeuge

a) Ein bestimmtes Flugzeug befindet sich nach dem Start im Steigflug. Barbara befindet sich im Punkt B und sieht das Flugzeug zunächst im Punkt F_1 und kurze Zeit später im Punkt F_2 (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung in der Ansicht von der Seite).



1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Formel an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$b = \frac{h_1}{\sin(\alpha)}$	☐
$d = \sin(90°) \cdot \frac{h_2}{\sin(\beta)}$	☐
$e = \sqrt{b^2 + d^2 - 2 \cdot b \cdot d \cdot \cos(180° - \alpha - \beta)}$	☐
$a = \frac{h_1}{\cos(\alpha)}$	☐
$c = \frac{h_2}{\tan(\beta)}$	☐

b) Zwei Flugzeuge fliegen in gleicher, konstant bleibender Höhe mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.
Die Kurse der zwei Flugzeuge können dabei modellhaft in der Ansicht von oben als Vektoren dargestellt werden.

Das erste Flugzeug fliegt in 12 min vom Punkt A zum Punkt B. Sein Kurs kann durch den Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \end{pmatrix}$ (in km) beschrieben werden.

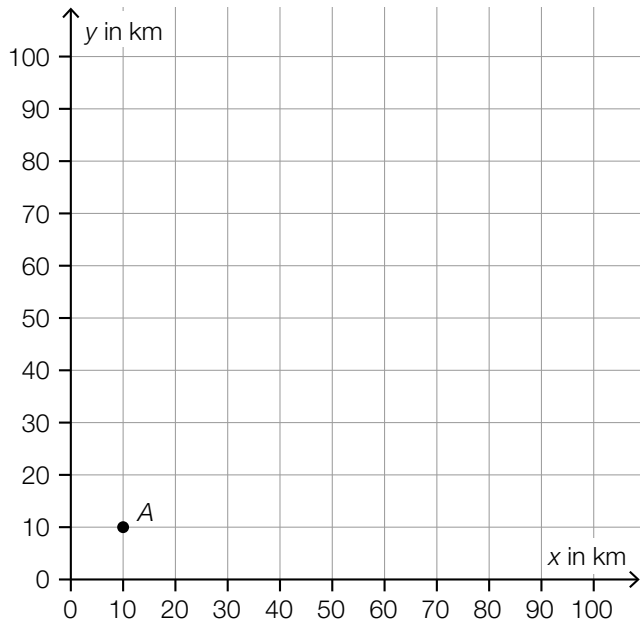
1) Berechnen Sie die Geschwindigkeit dieses Flugzeugs auf seinem Weg von A nach B in km/h. *[0/1 P.]*

Das zweite Flugzeug fliegt vom Punkt A zum Punkt C einen Kurs, der durch den Vektor $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix}$ (in km) beschrieben werden kann.

2) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. *[0/1 P.]*

Das zweite Flugzeug fliegt vom Punkt C aus direkt zum Punkt B.

3) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Vektor $\overrightarrow{CB}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt C ein. *[0/1 P.]*



c) Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug auf einen Flughafen. Nachdem es einen Kontrollpunkt überflogen hat, kann seine Höhe über der Landebahn näherungsweise durch die Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden.

$h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... waagrechte Entfernung vom Kontrollpunkt in km
$h(x)$ ... Höhe über der Landebahn in der Entfernung x in m

In einer waagrechten Entfernung von 12 km vom Kontrollpunkt nimmt die Höhe pro km waagrechter Entfernung am stärksten ab.

1) Tragen Sie die fehlenden Zeichen („<“, „=“ oder „>“) in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$h'(12)$ ☐ 0

$h''(12)$ ☐ 0 *[0/1 P.]*

Der Graph der Funktion h hat den Wendepunkt $W = (12|1\,000)$ und den Tiefpunkt $T = (24|0)$.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion h. *[0/1/2 P.]*

3) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion h. *[0/1 P.]*

d) Bei einem Landeanflug eines Flugzeugs wurde die Außentemperatur in verschiedenen Höhen gemessen (siehe nachstehende Tabelle).

Höhe über dem Meeresspiegel in m	2925	2301	2000	1665	1370	1108	700	200
Außentemperatur in °C	–5	–4	–2	+1	+3	+5	+8	+8

Die Außentemperatur soll in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel durch die lineare Funktion T beschrieben werden.

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in m
$T(h)$ ... Außentemperatur in der Höhe h in °C

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion T auf. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Gewinnspiele

Bei den in dieser Aufgabe behandelten Gewinnspielen wird ein fairer Spielwürfel geworfen, bei dem die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten. Dabei wird der Spielwürfel 2-mal hintereinander geworfen.

a) Beim 2-maligen Werfen eines Spielwürfels gibt es 36 mögliche Würfelergebnisse.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch Eintragen der entsprechenden Zahlen. *[0/1 P.]*

Anzahl der möglichen Würfelergebnisse, bei denen ...		
die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf ist	beide Augenzahlen gleich sind	die Augenzahl beim 2. Wurf größer als beim 1. Wurf ist
15		

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf ist.

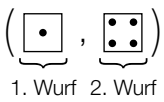
P(„die Augenzahl ist beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf“) = _____ *[0/1 P.]*

Folgende Bedingungen gelten für ein Spiel:
Ist die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf, so gewinnt man 5 Euro.
Ist die Augenzahl beim 2. Wurf größer als beim 1. Wurf, so gewinnt man 3 Euro.
Sind die beiden Augenzahlen gleich, so verliert man 10 Euro.

3) Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn bei diesem Spiel. *[0/1 P.]*

b) Im Folgenden sind die Wahrscheinlichkeiten einer Zufallsvariablen X für ein anderes Gewinnspiel dargestellt.
Die Zufallsvariable X gibt dabei die größte geworfene Augenzahl beider Würfe an.

Es wird folgende Schreibweise verwendet:



$P(X = 1) = P\left(\left\{\left(\boxed{\cdot}, \boxed{\cdot}\right)\right\}\right) = \frac{1}{36}$

$P(X = 2) = P\left(\left\{\left(\boxed{\cdot\,\cdot}, \boxed{\cdot}\right), \left(\boxed{\cdot}, \boxed{\cdot\,\cdot}\right), \left(\boxed{\cdot\,\cdot}, \boxed{\cdot\,\cdot}\right)\right\}\right) = \frac{3}{36}$

$P(X = 3) = P\left(\left\{\left(\boxed{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \boxed{\cdot}\right), \left(\boxed{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \boxed{\cdot\,\cdot}\right), \left(\boxed{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \boxed{\cdot\,\cdot\,\cdot}\right), \left(\boxed{\cdot\,\cdot}, \boxed{\cdot\,\cdot\,\cdot}\right), \left(\boxed{\cdot}, \boxed{\cdot\,\cdot\,\cdot}\right)\right\}\right) = \frac{5}{36}$

usw.

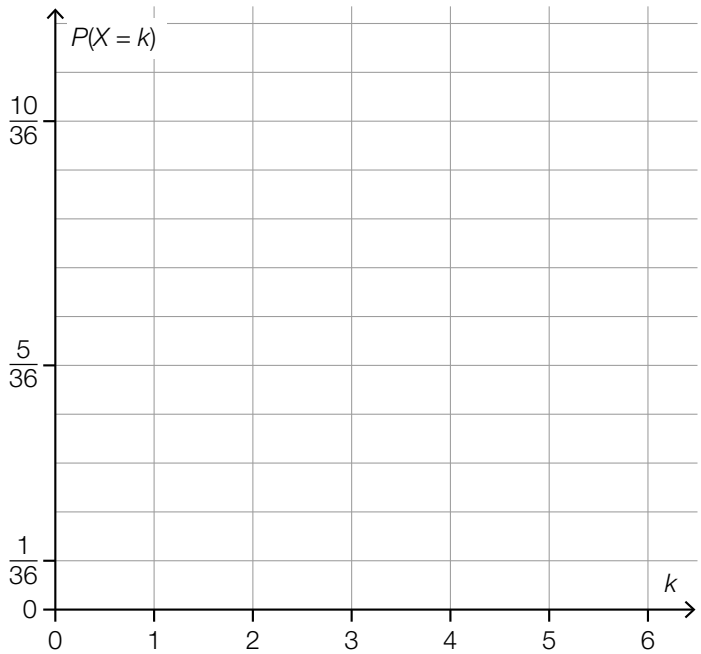
$P(X = 6) = \ldots = \frac{11}{36}$

Die obigen Wahrscheinlichkeiten bilden eine arithmetische Folge.

1) Zeigen Sie dies für $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$. *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese Folge. *[0/1 P.]*

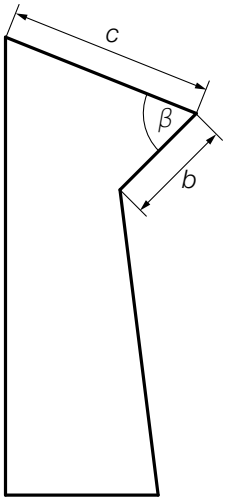
3) Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion als Säulendiagramm dar. *[0/1 P.]*



Aufgabe 6 (Teil B)

Klettern

a) In der nachstehenden Abbildung ist eine Kletterwand modellhaft in der Ansicht von der Seite dargestellt.



Für die Strecke f gilt:

$f^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\beta)$

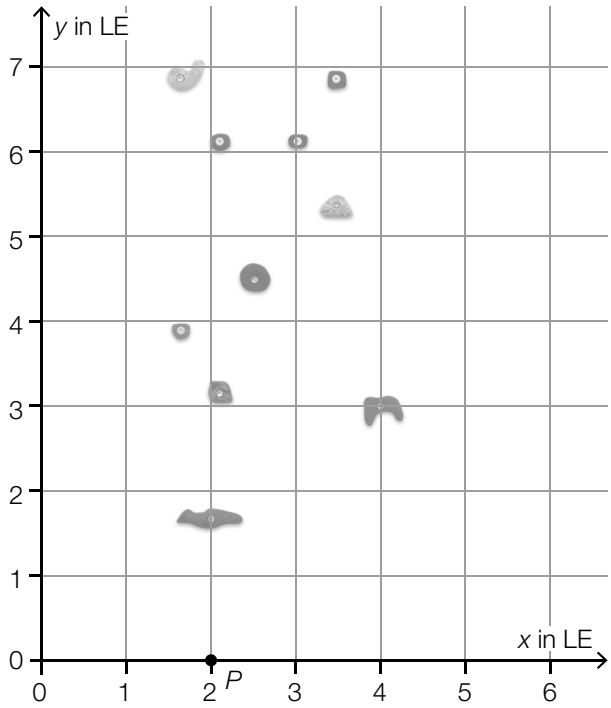
1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Strecke f ein. *[0/1 P.]*

Die von f, b und c begrenzte Fläche soll eingefärbt werden.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A dieser Fläche auf. Verwenden Sie dabei b, c und β.

$A =$ _____ *[0/1 P.]*

b) Lilli verwendet eine App zur Planung ihrer Routen beim Klettern auf einer Kletterwand. In der nachstehenden Abbildung ist die Kletterwand mit Griffen und Tritten in einem Koordinatensystem dargestellt.



x, y ... Koordinaten in Längeneinheiten (LE)

Lilli plant eine Route für einen Aufstieg. Sie startet im Punkt P, danach führt die Route über die Punkte Q und R zum Punkt S.

Es gilt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diese Route als Abfolge von Vektoren ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\overrightarrow{QR}$. *[0/1 P.]*

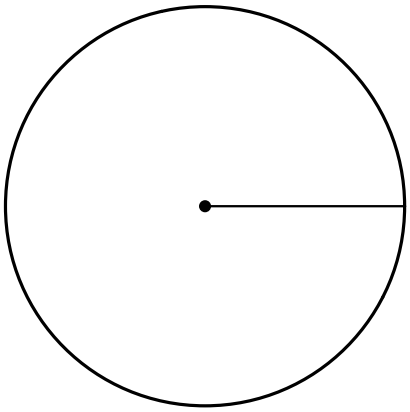
3) Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{PS}$.

$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

c) Der Deutsche Alpenverein gibt an, dass sich im Jahr 2016 in Kletterhallen 53 Seilkletterunfälle, 119 Boulderunfälle und 14 sonstige Unfälle ereignet haben.

Datenquelle: https://www.alpenverein.de/bergsport/sicherheit/unfallstatistik/klettern-unfall-unfallstatistik-kletterhalle-kletterunfall_aid_30268.html [19.01.2023].

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*



d) David verbraucht beim Klettern 130 Kilokalorien (kcal) in 15 min.
1 cm^3 eines bestimmten Softdrinks führt dem Körper 400 Kalorien (cal) zu.
David hat 1 Woche lang jeden Tag 1,5 L dieses Softdrinks getrunken und seinem Körper damit eine bestimmte Energiemenge zugeführt.

1) Berechnen Sie, wie lange David klettern müsste, um diese Energiemenge zu verbrauchen. Geben Sie das Ergebnis in Stunden an. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Ferienwohnungen

Im Zuge der Urlaubsplanung vergleicht Familie Hadek verschiedene Angebote für Ferienwohnungen.

a) Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Rosenhof* kostet 1.200 Euro.
Jede weitere Woche kostet um 10 % weniger als die vorangegangene Woche.

Die Kosten der n-ten Woche können durch eine Folge beschrieben werden.

1) Geben Sie an, ob es sich dabei um eine arithmetische oder eine geometrische Folge handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[0/1 P.]*
2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge. *[0/1 P.]*
3) Berechnen Sie die Kosten für die 4. Woche in dieser Ferienwohnung. *[0/1 P.]*

b) Die jeweiligen Kosten der n-ten Woche in den Ferienwohnungen *Seeblick* und *Bergschlössl* können durch Folgen beschrieben werden.

Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Bergschlössl* kostet 1.750 Euro.
Jede weitere Woche ist um 100 Euro billiger als die jeweils vorangegangene Woche.

Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Seeblick* kostet 1.450 Euro.
Jede weitere Woche ist um 50 Euro billiger als die jeweils vorangegangene Woche.

1) Ordnen Sie den beiden Ferienwohnungen jeweils den zutreffenden Zusammenhang aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Bergschlössl	
Seeblick	

A	(a_n) mit $a_n = a_{n+1} - 100$
B	(b_n) mit $b_{n+1} = b_{n-3} - 200$
C	(c_n) mit $c_{n+2} = c_{n+1} + 50$
D	(d_n) mit $d_{n-1} = d_{n+1} + 200$

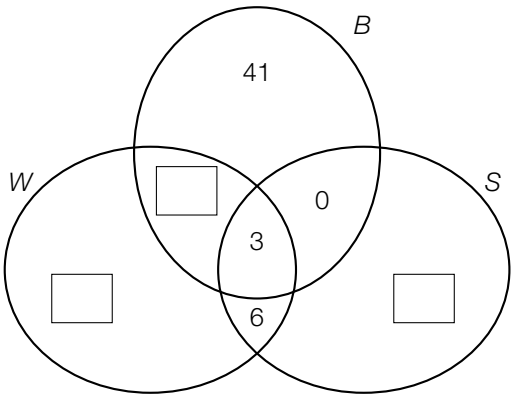
2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Kosten der n-ten Woche in der Ferienwohnung *Bergschlössl*. *[0/1 P.]*
3) Ermitteln Sie für die Ferienwohnung *Bergschlössl* diejenige Woche, die erstmals um mindestens 25 % billiger als die 1. Woche ist. *[0/1 P.]*

c) Im Ferienort Almdorf werden Ferienwohnungen mit verschiedenen Ausstattungen angeboten.

45 Ferienwohnungen verfügen über eine Waschmaschine.
62 Ferienwohnungen verfügen über einen Balkon.
20 Ferienwohnungen verfügen über eine Sauna.

Jede Ferienwohnung verfügt über mindestens eine der obigen Ausstattungen.

Im nachstehenden Venn-Diagramm sollen die Ferienwohnungen im Ferienort Almdorf nach ihren Ausstattungen eingeteilt werden.



W ... Menge der Ferienwohnungen, die über eine Waschmaschine verfügen
B ... Menge der Ferienwohnungen, die über einen Balkon verfügen
S ... Menge der Ferienwohnungen, die über eine Sauna verfügen

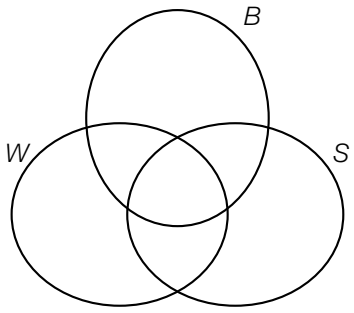
1) Tragen Sie im obigen Venn-Diagramm die fehlenden Anzahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

Familie Hadek möchte eine Ferienwohnung im Ferienort Almdorf, die über einen Balkon und eine Waschmaschine verfügt. Ob die Ferienwohnung über eine Sauna verfügt, ist Familie Hadek egal.

2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Ferienwohnungen im Ferienort Almdorf für Familie Hadek infrage kommen. *[0/1 P.]*

Im Ferienort Buchensee verfügt jede Ferienwohnung über mindestens 2 der obigen Ausstattungen.

3) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm denjenigen Bereich, in dem die Ferienwohnungen im Ferienort Buchensee enthalten sind. *[0/1 P.]*



Aufgabe 8 (Teil B)

Wasserversorgung

a) Zum Transport von Wasser wurden im antiken Rom sogenannte *Aquädukte* errichtet.
Die Namen der wichtigsten Aquädukte, ihre jeweilige Länge und ihre jeweilige Durchflussrate sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Name	Länge in km	Durchflussrate in tausend m^3 pro Tag
Aqua Appia	16	70
Aqua Vetuis	64	175
Aqua Marcia	91	185
Aqua Tepula	20	18
Aqua Julia	25	48
Aqua Virgo	21	48
Aqua Alsientina	33	16

Datenquelle: Ausstellung im Wasserleitungsmuseum Kaiserbrunn

Linus vermutet, dass die Durchflussrate der Aquädukte linear von deren Länge abhängt.

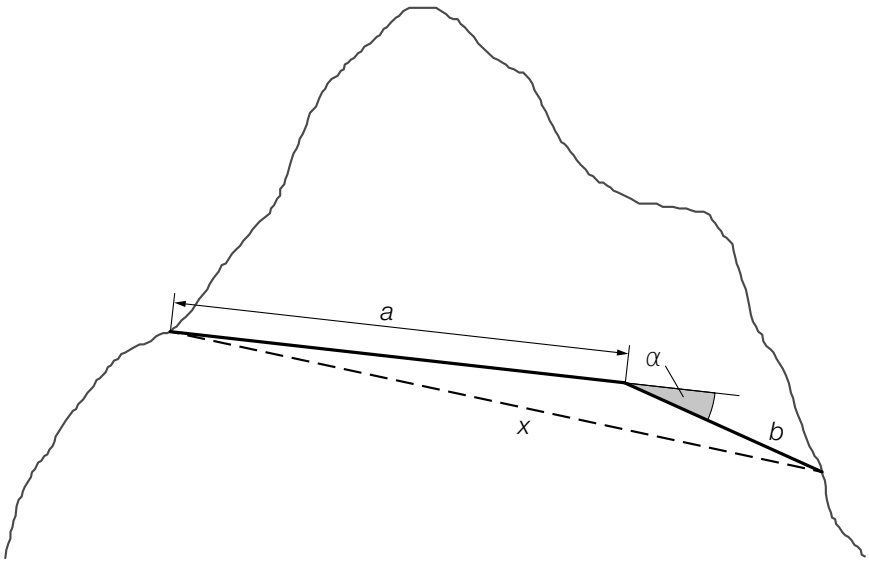
1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion auf. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Längen der in der obigen Tabelle angegebenen Aquädukte. *[0/1 P.]*

In der Fachliteratur wird ein Wert als *Ausreißer* bezeichnet, wenn er mehr als das 1,5-Fache der Standardabweichung vom arithmetischen Mittel abweicht.

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob es unter den Längen der in der obigen Tabelle angegebenen Aquädukte einen Ausreißer gibt. *[0/1 P.]*

b) Zwei unterirdische Stollen einer Wasserversorgung, ein Stollen mit der Länge a und ein Stollen mit der Länge b, sollen durch einen neuen Stollen mit der Länge x ersetzt werden (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von x auf. Verwenden Sie dabei a, b und α.

$x =$ _____ *[0/1 P.]*

Es gilt: $a = 8$ km, $b = 3{,}6$ km und $\alpha = 11{,}9°$

2) Berechnen Sie die Länge x des neuen Stollens. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stollen mit der Länge x und dem Stollen mit der Länge a. *[0/1 P.]*

c) Folgende Zusammenhänge wurden festgestellt:

W ... Steigt der Wohlstand in einer Region, so verbessert sich auch die Versorgung mit Wasser.
K ... Verbessert sich die Versorgung mit Wasser, so sinkt die Ausbreitung von Krankheiten in der betreffenden Region.

Die Korrelation für den Zusammenhang *W* ist dabei schwächer als jene für den Zusammenhang *K*.

1) Ordnen Sie den beiden Zusammenhängen jeweils den zutreffenden Korrelationskoeffizienten aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

W	
K	

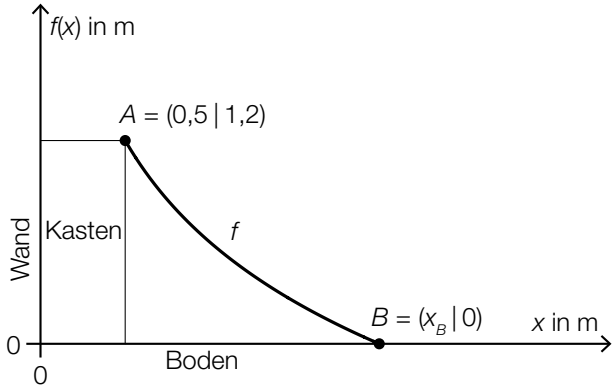
A	$r = 0$
B	$r = 0{,}87...$
C	$r = -0{,}93...$
D	$r = -0{,}72...$

Aufgabe 6 (Teil B)

Piratenschiff

Piratenschiff ist ein Spiel im Turnunterricht.
Für dieses Spiel wird ein Parcours mit Turngeräten als Hindernissen aufgebaut, in dem Fangen gespielt wird.

a) An einen Kasten (Turngerät) wird eine Matte gelegt. In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Matte zwischen den Punkten A und B durch den Graphen der Funktion f modellhaft dargestellt.



Es gilt:

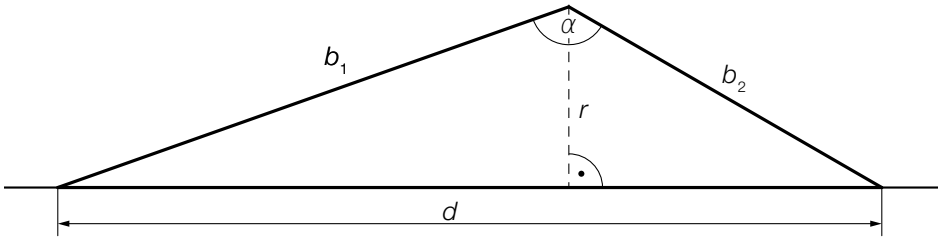
$f(x) = a - 1{,}209 \cdot \ln(x + 0{,}5)$

x ... horizontale Entfernung von der Wand in m
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m
a ... Parameter

1) Ermitteln Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Stelle x_B. *[0/1 P.]*

b) Auf einer Reckstange, die in der Höhe r montiert ist, werden zwei Langbänke mit den Längen b_1 und b_2 eingehängt (siehe nachstehende modellhafte Skizze in der Ansicht von der Seite).



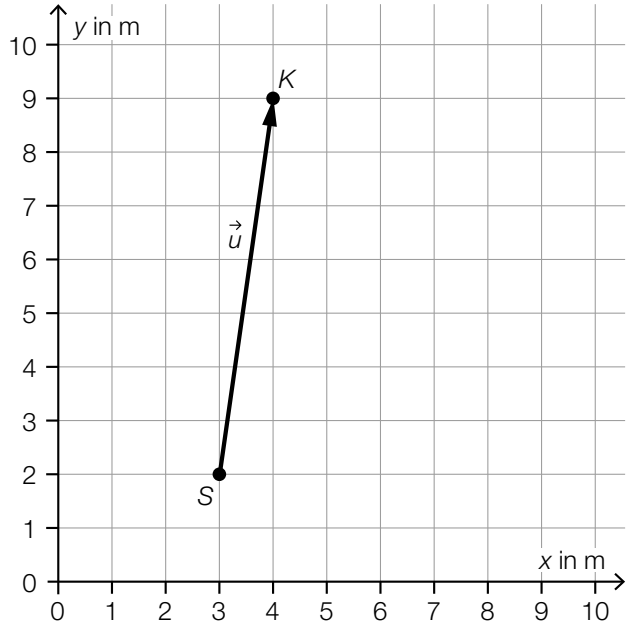
1) Vervollständigen Sie die nachstehende Formel zur Berechnung des Winkels α. Verwenden Sie dabei r, b_1 und b_2.

$$\alpha = \arccos\left(\square\right) + \arccos\left(\square\right)$$ *[0/1 P.]*

Es gilt:
$b_1 = 4{,}5$ m, $b_2 = 3$ m und $\alpha = 131°$

2) Berechnen Sie die Länge d. *[0/1 P.]*

c) Tim und Angela skizzieren einen Plan, um ihre Strategie beim Spiel *Piratenschiff* festzulegen (siehe nachstehende Abbildung).



Beide starten im Punkt S.
Tim möchte vom Punkt S geradlinig zum Punkt K laufen.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{u}$. *[0/1 P.]*

Angela folgt vom Punkt S aus dem Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{w}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt S ein. *[0/1 P.]*

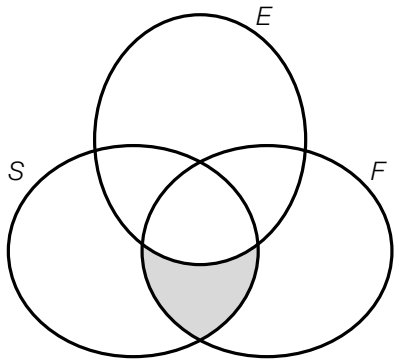
4) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Biologieunterricht

Im Biologieunterricht werden verschiedene Tierarten und ihre Lebensweisen betrachtet.

a) Mit dem nachstehenden Venn-Diagramm können verschiedene Tierarten nach bestimmten Merkmalen eingeteilt werden.



S ... Menge der Tierarten, die Säugetiere sind
E ... Menge der Tierarten, die Eier legen können
F ... Menge der Tierarten, die (selbstständig) fliegen können

Der grau markierte Bereich entspricht der Menge der Tierarten, die Fledertiere sind.

1) Geben Sie für jede der drei Mengen S, E und F an, ob die Menge der Tierarten, die Fledertiere sind, eine Teilmenge der jeweiligen Menge ist. *[0/1 P.]*

Die Menge der Tierarten, die Vögel sind, wird mit V bezeichnet.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von $V \setminus F \neq \{\ \}$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Es gibt eine Menge von Tierarten, die sowohl Säugetiere sind als auch Eier legen können, aber nicht fliegen können.

3) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der dieser Menge entspricht. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$F \setminus (S \cap E)$	☐
$S \setminus (F \cap E)$	☐
$(S \cup E) \setminus F$	☐
$(E \setminus F) \cap S$	☐
$E \cup (S \setminus F)$	☐

Es gibt keine Tierarten, die Säugetiere sind und sowohl Eier legen als auch fliegen können.

4) Tragen Sie die Zahl 0 in den entsprechenden Bereich im obigen Venn-Diagramm ein. *[0/1 P.]*

b) Auf einem Arbeitsblatt sind die Körperlängen verschiedener Säugetiere sowie deren Sprungweiten angegeben (siehe nachstehende Tabelle).

	Körperlänge in m	Sprungweite in m
Fuchs	0,7	2,8
Känguru	1,4	10
Löwe	1,8	4,5
Mauswiesel	0,2	1,2
Mensch (Weltrekord)	1,8	8,9
Tiger	2	5

Datenquelle: https://www.zoo.ch/sites/default/files/media/file/Weitspringen.pdf [03.08.2022].

Die Sprungweite soll in Abhängigkeit von der Körperlänge betrachtet werden.
Mathias behauptet, dass die obige Tabelle die Wertetabelle einer entsprechenden Funktion ist.

1) Begründen Sie, warum die Behauptung von Mathias falsch ist. *[0/1 P.]*

Susanne vermutet, dass die Sprungweite in Abhängigkeit von der Körperlänge näherungsweise durch die quadratische Funktion f beschrieben werden kann.

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion f auf. *[0/1 P.]*

c) Mäuse vermehren sich unter bestimmten Bedingungen sehr schnell. Die Anzahl der Jungtiere, die in einer Generation geboren werden, kann näherungsweise durch das nachstehende rekursive Bildungsgesetz beschrieben werden.

$a_n = a_{n-1} \cdot 5$ und $a_1 = 20$

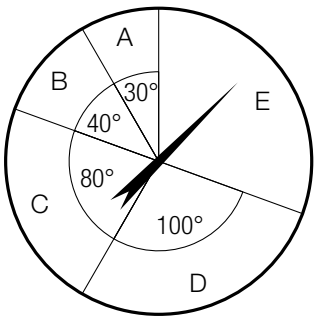
a_n ... Anzahl der Jungtiere in der n-ten Generation

1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Folge (a_n). *[0/1 P.]*
2) Berechnen Sie, in der wievielten Generation erstmals 500 Jungtiere geboren werden. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Spielshow

a) Ein Glücksrad ist in die Sektoren A, B, C, D und E unterteilt.
In der Mitte des Glücksrads ist ein drehbarer Zeiger montiert, der im Rahmen einer Spielshow gedreht wird.
(Siehe nebenstehende Abbildung.)



Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger des Glücksrads nach einer Drehung auf einen bestimmten Sektor zeigt, ist direkt proportional zum Winkel des jeweiligen Sektors.

Zeigt der Zeiger auf den Sektor A, so werden 10 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor B, so werden 16 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor C, so werden 20 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor D, so werden 25 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor E, so werden 31 Punkte verloren.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Punkte, die nach einmaligem Drehen des Zeigers gewonnen bzw. verloren werden.

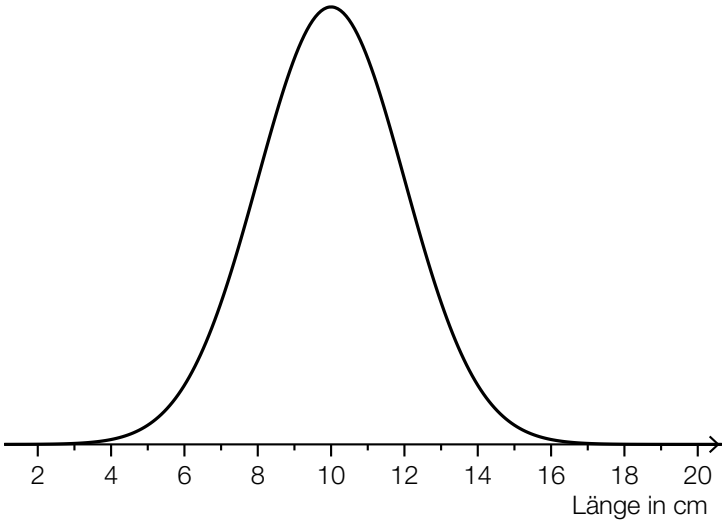
1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch Eintragen der fehlenden Wahrscheinlichkeiten. *[0/1 P.]*

Sektor	A	B	C	D	E
x_i	10	16	20	25	–31
$P(X = x_i)$					

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *[0/1 P.]*

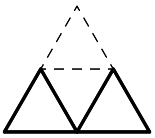
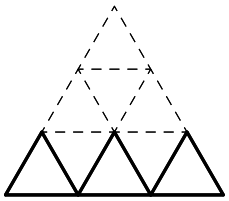
3) Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Im Rahmen einer Spielshow sollen die teilnehmenden Personen von einer Holzlatte ein 10 cm langes Stück Holz absägen. Dabei darf kein Messgerät verwendet werden.
Die Länge der abgesägten Holzstücke ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 10$ cm. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes abgesägtes Holzstück um mindestens 3 cm zu lang ist. *[0/1 P.]*

c) Im Rahmen einer Spielshow müssen die teilnehmenden Personen aus Spielkarten Kartenhäuser bauen. Dabei muss das jeweilige Kartenhaus in jeder Runde um ein Stockwerk höher gebaut werden.

1 Stockwerk	2 Stockwerke	3 Stockwerke
		
$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$

In der obigen Abbildung sind die Spielkarten im jeweils untersten Stockwerk fett dargestellt.
Die Anzahl der Spielkarten im jeweils untersten Stockwerk bildet die arithmetische Folge (a_n) mit $a_1 = 3$.

1) Geben Sie die Folgenglieder a_2 und a_3 an. *[0/1 P.]*
2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge. *[0/1 P.]*
3) Ermitteln Sie das Folgenglied a_{10}. *[0/1 P.]*

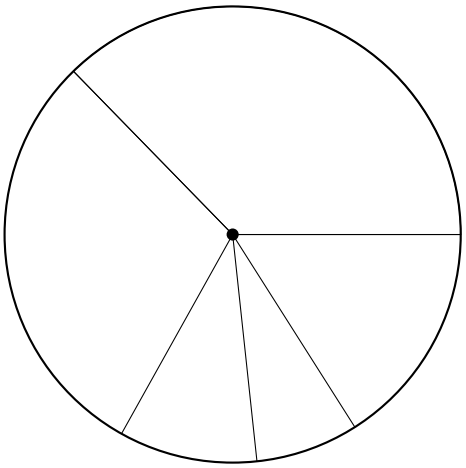
Aufgabe 6 (Teil B)

Erneuerbare Energie in Österreich

a) Im Jahr 2015 teilte sich die Energieproduktion aus erneuerbaren Energieträgern in Österreich in folgende 5 Bereiche auf:
Wasserkraft, Holzbrennstoffe, Fernwärme, Biokraftstoffe und sonstige Energieträger.

Der Anteil der Wasserkraft an der gesamten Energieproduktion betrug in diesem Jahr 37,3 %.

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Kreisdiagramm denjenigen Sektor, der der Energieproduktion aus Wasserkraft entspricht. *[0/1 P.]*



b) In der nachstehenden Tabelle sind die Werte der Energieproduktion durch Photovoltaik und Windkraft in Österreich in Terajoule (TJ) für die Jahre 2008 bis 2015 angegeben.

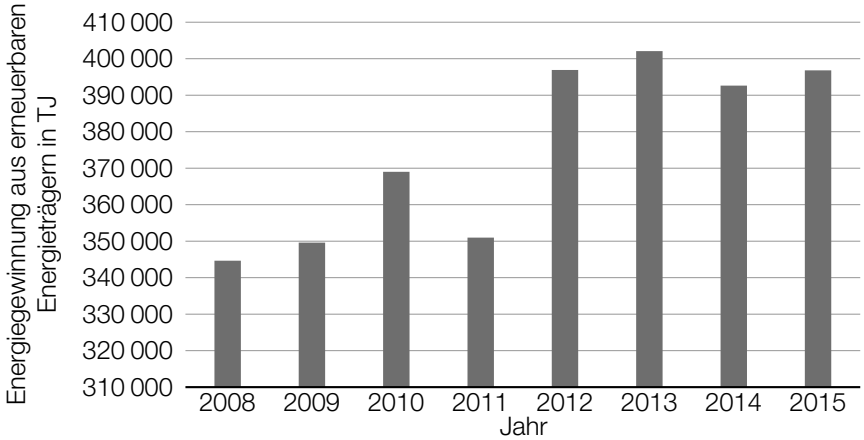
Jahr	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Energieproduktion durch Photovoltaik und Windkraft in TJ	7349	7211	7750	7597	10078	13605	16672	20799

Die Energieproduktion soll in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 2008. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist die Entwicklung der Energiegewinnung aus allen erneuerbaren Energieträgern in Österreich für den Zeitraum von 2008 bis 2015 dargestellt.



Lukas betrachtet diese Abbildung und behauptet: „Im Jahr 2013 wurde in Österreich rund doppelt so viel Energie aus erneuerbaren Energieträgern gewonnen wie im Jahr 2011. Das erkenne ich daran, dass die Säule für das Jahr 2013 rund doppelt so hoch wie jene für das Jahr 2011 ist.“

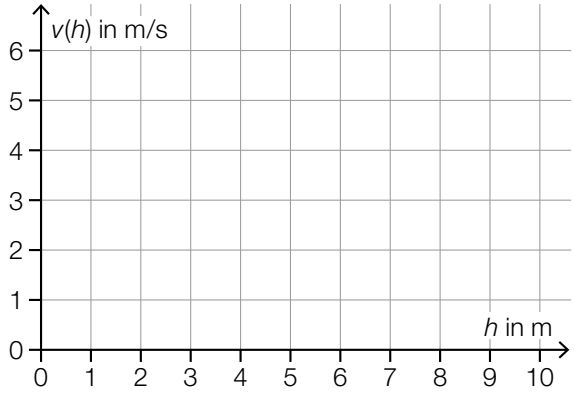
1) Erklären Sie, warum diese Argumentation falsch ist. *[0/1 P.]*

d) Die Leistung von Windkraftwerken ist unter anderem von der Windgeschwindigkeit abhängig. Die Windgeschwindigkeit kann in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden für einen bestimmten Standort näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(h) = 2{,}5 \cdot \ln(h)$ mit $h \geq 1$

h ... Höhe über dem Erdboden in m
$v(h)$ ... Windgeschwindigkeit in der Höhe h in m/s

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion v ein. *[0/1 P.]*



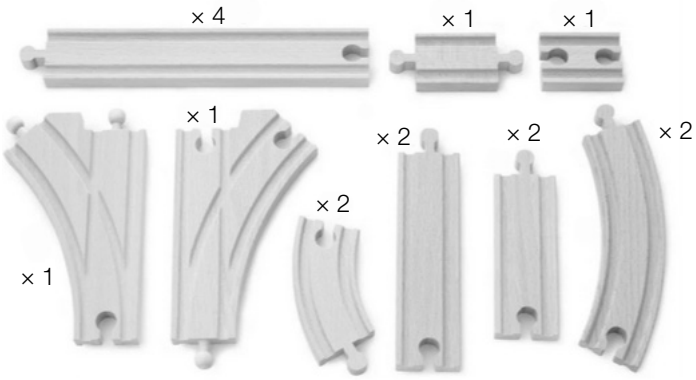
2) Berechnen Sie diejenige Höhe, in der die Windgeschwindigkeit 8 m/s beträgt. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Holzzug

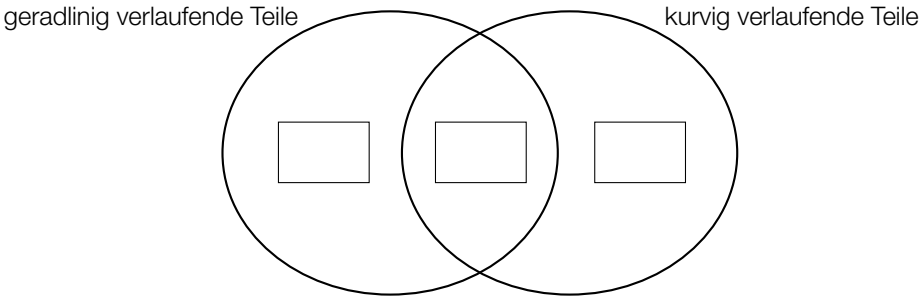
Holzzüge sind nach wie vor bei Kindern sehr beliebt.

a) In einer bestimmten Zubehörpackung für einen Holzzug sind folgende 16 Teile enthalten:



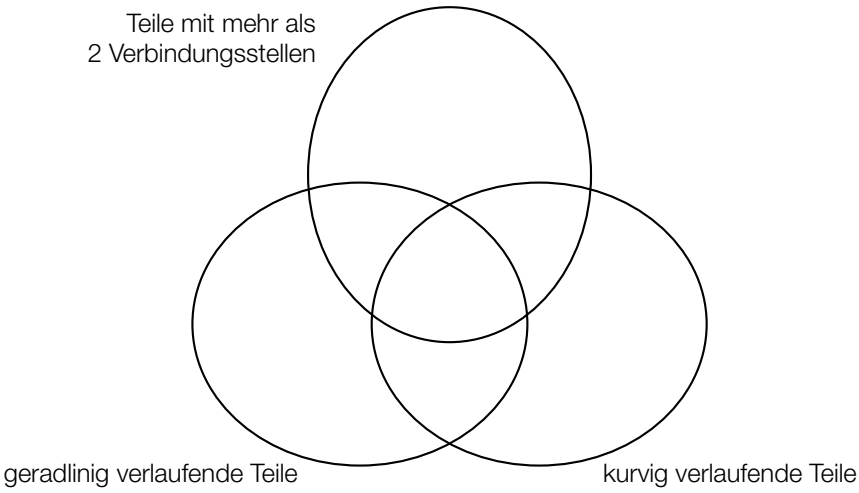
© Ravensburger AG

1) Tragen Sie im nachstehenden Venn-Diagramm die jeweiligen Anzahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

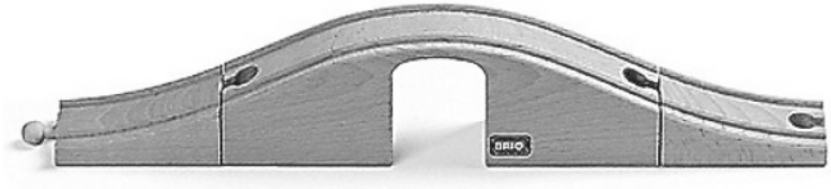


2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Teile dieser Zubehörpackung nur geradlinig verlaufen. *[0/1 P.]*

3) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm alle Bereiche, in denen Teile dieser Zubehörpackung enthalten sind. *[0/1 P.]*

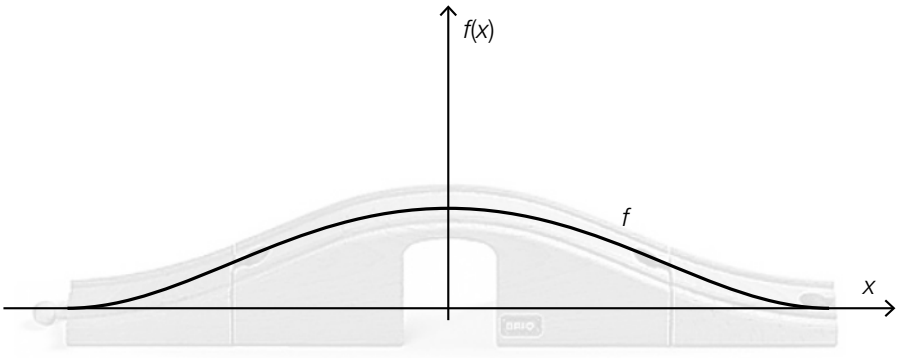


b) In der nachstehenden Abbildung ist eine Brücke für einen Holzzug dargestellt.



© Ravensburger AG

Der Verlauf der oberen Begrenzungslinie soll durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kreuzen Sie denjenigen Funktionstyp an, der auf f zutreffen kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

quadratische Funktion	☐
Polynomfunktion 3. Grades	☐
Polynomfunktion 4. Grades	☐
lineare Funktion	☐
Logarithmusfunktion	☐

2) Geben Sie die Anzahl der Stellen von f an, für die sowohl $f''(x) = 0$ als auch $f'(x) \neq 0$ gilt.

Anzahl der Stellen: _____ *[0/1 P.]*

c) Der Holzzug überwindet auf einem ansteigenden Teil mit einer horizontalen Länge von 216 mm einen Höhenunterschied von 54 mm.

1) Ermitteln Sie die mittlere Steigung entlang dieses ansteigenden Teiles in Prozent. *[0/1 P.]*

d) Ein bestimmter Hersteller bietet geradlinig verlaufende Teile nur in folgenden Längen an:

54 mm, 72 mm, 108 mm, 144 mm, 216 mm

Diese Längen (in mm) sind Glieder der arithmetischen Folge (a_n).

$a_1 = 54$ und $a_{n+1} = a_n + 18$

1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz der Folge (a_n). *[0/1 P.]*

2) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die fehlenden Werte von n ein. *[0/1 P.]*

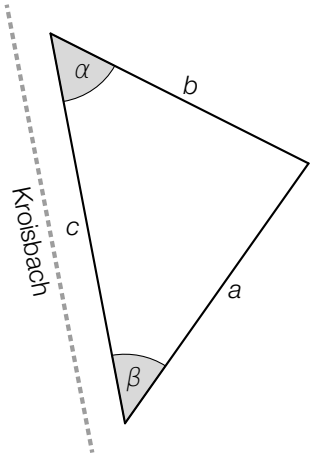
n	1				
a_n	54	72	108	144	216

Aufgabe 8 (Teil B)

Der Grazbach

Der Kroisbach und der Leonhardbach sind Bäche in Graz, die nach ihrem Zusammenfluss den Grazbach bilden.

a) Vor dem Zusammenfluss zum Grazbach fließt der Kroisbach unter einer Straße. Diese Straße begrenzt zusammen mit zwei anderen Straßen einen dreieckigen Platz mit den Seitenlängen a, b und c. (Siehe nachstehende Abbildung – Ansicht von oben.)



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf. Verwenden Sie dabei a, b und c.

$\alpha =$ _____ *[0/1 P.]*

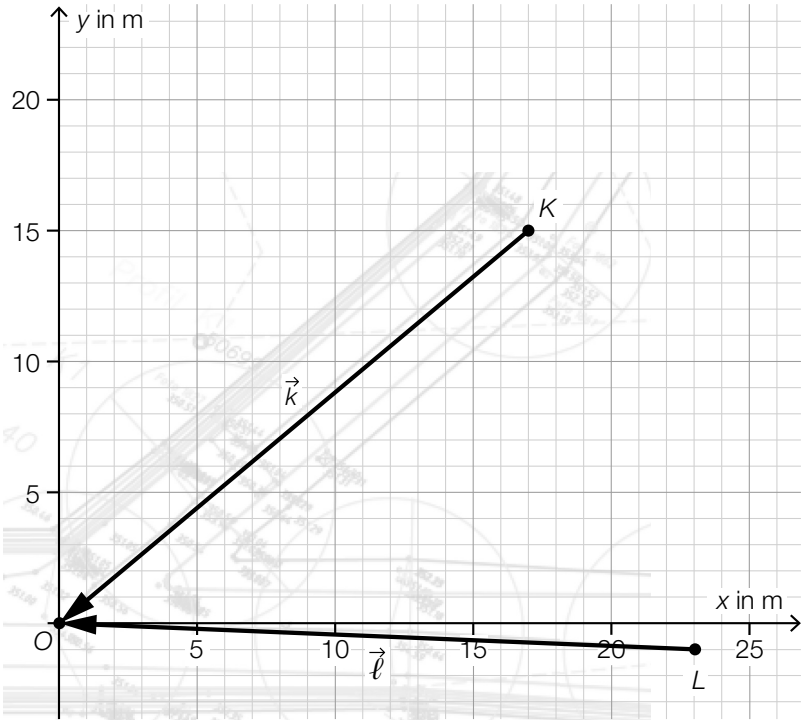
Die folgenden Abmessungen dieses dreieckigen Platzes sind bekannt:
$c = 54$ m, $b = 39{,}6$ m, $\alpha = 51{,}8°$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{54 \cdot 39{,}6 \cdot \sin(51{,}8°)}{2} \approx 840$$ *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel β. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Bereich des Zusammenflusses in einem Vermessungsplan modellhaft dargestellt. Im Koordinatenursprung O fließen die beiden Bäche zusammen.



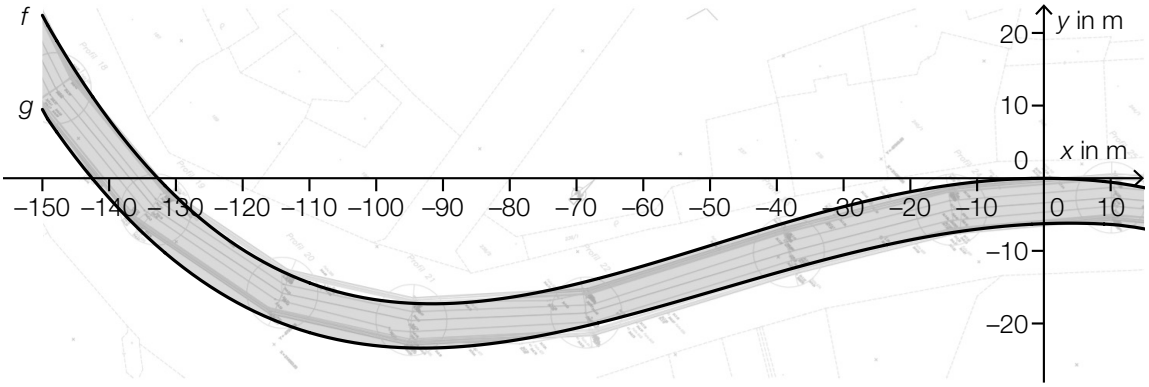
Der Kroisbach fließt vom Punkt P zum Punkt K.

Es gilt: $\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Punkt P ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie denjenigen spitzen Winkel, den die Vektoren $\vec{\ell}$ und $\vec{k}$ miteinander einschließen. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist ein Abschnitt des Kanals des Grazbachs in einem Vermessungsplan modellhaft dargestellt.



Ein Vermesser modelliert die Begrenzungslinien des Kanals im Intervall [–150; 15] mit den Graphen der Funktionen f und g.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche auf.

$A =$ _____ *[0/1 P.]*

Für die Polynomfunktion 4. Grades f gilt: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2$

Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T = (-92{,}2 \mid -17{,}6)$ und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -133{,}5$.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.
[0/1/2 P.]

Die Funktion g ist ebenfalls eine Polynomfunktion 4. Grades.

3) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die Funktion g im Intervall [–150; 15] zutrifft.
[1 aus 5] *[0/1 P.]*

g hat genau 2 Nullstellen.	☐
g ändert genau 1-mal das Monotonieverhalten.	☐
g hat nur negative Funktionswerte.	☐
g hat genau 1 lokale Extremstelle.	☐
g ändert genau 1-mal das Krümmungsverhalten.	☐

Aufgabe 6 (Teil B)

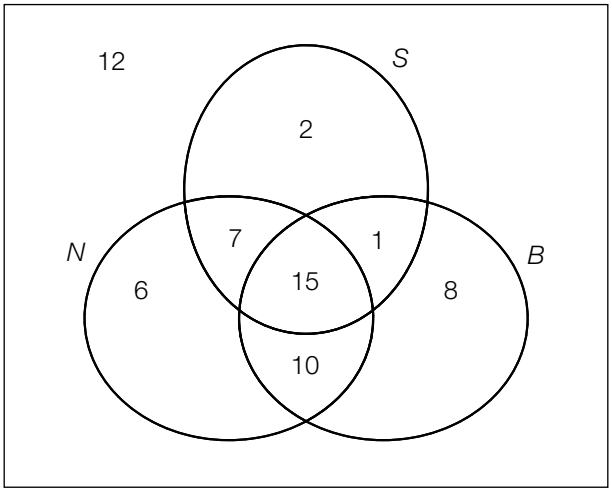
Lärm

a) Eine Gruppe von 61 Personen wurde zu Lärmstörungen im Alltag befragt.

Als Lärmquellen standen zur Auswahl:

- Lärm aus Nachbarwohnungen (N)
- Lärm von Straßenverkehr (S)
- Lärm von Baustellen (B)

Dabei waren Mehrfachnennungen bzw. auch die Angabe, sich nicht durch die angegebenen Lärmquellen gestört zu fühlen, möglich.
Die Ergebnisse sind im nachstehenden Venn-Diagramm dargestellt.



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die Menge $(N \cap S) \setminus B$. *[0/1 P.]*

David behauptet: „Aus dem Venn-Diagramm kann man ablesen, dass nur 1 Person angibt, dass sie sowohl durch Lärm von Baustellen als auch durch Lärm von Straßenverkehr gestört wird.“

2) Erklären Sie, warum diese Behauptung falsch ist. *[0/1 P.]*

Eine der befragten Personen wird zufällig ausgewählt.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person angegeben hat, dass sie nur durch Lärm aus Nachbarwohnungen gestört wird. *[0/1 P.]*

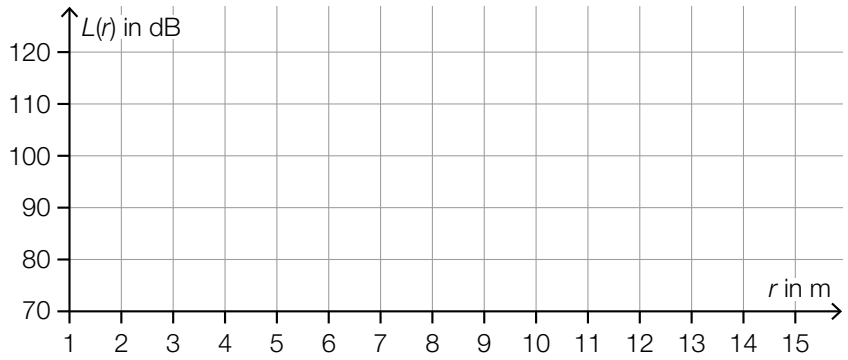
b) Laura steht 1 m von einem Lautsprecher entfernt und fühlt sich durch den hohen Schallpegel von 110 Dezibel (dB) gestört. Daher beschließt sie, sich vom Lautsprecher zu entfernen.

Die Funktion L beschreibt den Schallpegel in Abhängigkeit von der Entfernung r von diesem Lautsprecher.

$L(r) = 110 - 20 \cdot \lg(r) \quad \text{mit} \quad r \geq 1$

r ... Entfernung vom Lautsprecher in m
$L(r)$ ... Schallpegel bei der Entfernung r in dB

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion L im Intervall [1; 15] ein. *[0/1 P.]*



Laura möchte sich an einer Stelle aufhalten, an der der Lautsprecher einen Schallpegel von 75 dB erzeugt.

2) Berechnen Sie die Entfernung dieser Stelle vom Lautsprecher. *[0/1 P.]*

Jonas behauptet: „Wenn ich meine Entfernung von 10 m auf 20 m vergrößere, dann sinkt der Schallpegel auf die Hälfte."

3) Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist. *[0/1 P.]*

Elisabeth möchte die Gleichung $L = 110 - 20 \cdot \lg(r)$ nach r umformen und führt folgende Umformung durch:

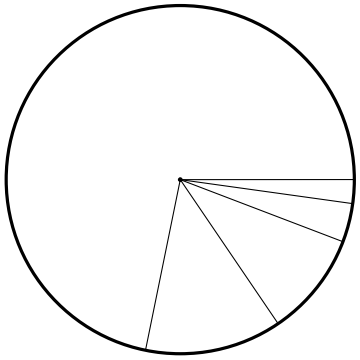
$$\frac{L - 110}{-20} = \lg(r)$$

$$e^{\frac{L-110}{-20}} = r$$

4) Beschreiben Sie den Fehler, den Elisabeth bei der Umformung gemacht hat. *[0/1 P.]*

c) Im Jahr 2007 wurde in Kärnten eine Umfrage zur Lärmbelästigung durchgeführt. 9,7 % aller Befragten gaben an, dass sie sich „mittelmäßig“ gestört fühlen.

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm denjenigen Sektor, der diesem Prozentsatz entspricht. *[0/1 P.]*



Aufgabe 7 (Teil B)

Wasser

a) Der durchschnittliche tägliche Wasserverbrauch pro Einwohner/in in Wien setzt sich folgendermaßen zusammen:

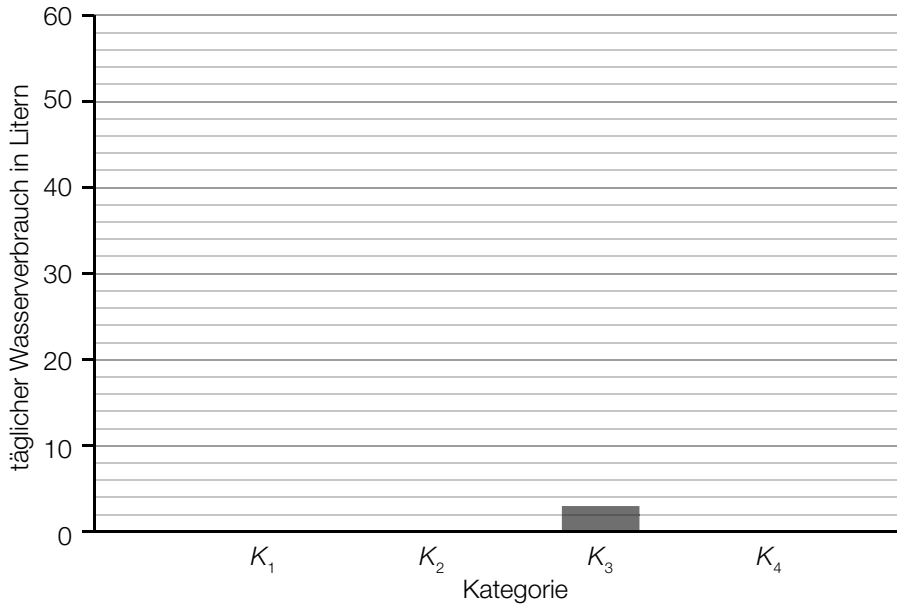
Duschen, Baden	44 L
WC-Spülung	40 L
Wäschewaschen	15 L
Körperpflege	9 L
Geschirrspülen	6 L
Kochen, Trinken	3 L
Wohnungsreinigung	8 L
Gartenbewässerung	5 L

Datenquelle: https://www.wien.gv.at/wienwasser/verbrauch.html [04.06.2019].

Der oben angegebene Wasserverbrauch wird in 4 Kategorien unterteilt:

- K_1: Duschen, Baden und Körperpflege
- K_2: WC-Spülung
- K_3: Kochen, Trinken
- K_4: Sonstiges (Wäschewaschen, Geschirrspülen, Wohnungsreinigung, Gartenbewässerung)

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Säulendiagramm. *[0/1 P.]*



b) Auf einer Website ist zu lesen:
„Aktuell liegt der weltweite jährliche Süßwasserbedarf bei geschätzt 4 370 km^3, wobei die Grenze der nachhaltigen Nutzung mit 4 000 km^3 angegeben wird."

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent man den aktuellen Süßwasserbedarf reduzieren müsste, um die Grenze der nachhaltigen Nutzung zu erreichen. *[0/1 P.]*

Der sogenannte *Earth Overshoot Day* („Welterschöpfungstag") ist ein bestimmter Tag des Jahres, an dem die menschliche Nachfrage an natürlichen Ressourcen (wie zum Beispiel auch Süßwasser) die Kapazität der Erde in diesem Jahr übersteigt. Ab dem darauffolgenden Tag befindet sich die Menschheit in einem Defizit.

Jahr	*Earth Overshoot Day*	Anzahl der Tage im Defizit
1990	10. Oktober	82
1995	3. Oktober	89
2000	22. September	100
2005	24. August	129
2010	6. August	147
2015	3. August	150
2016	3. August	150
2017	30. Juli	154

Datenquelle: https://www.overshootday.org/newsroom/past-earth-overshoot-days/ [24.11.2021].

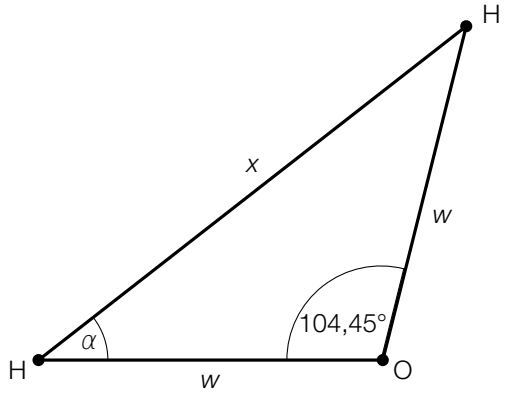
Die Anzahl der Tage im Defizit soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion auf. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990. *[0/1 P.]*

3) Argumentieren Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, dass die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung des *Earth Overshoot Day* zu beschreiben.
[0/1 P.]

4) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells, nach welcher Zeit t sich die Menschheit 364 Tage im Defizit befindet. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist ein Wassermolekül (H_2O) bestehend aus zwei Wasserstoffatomen (H) und einem Sauerstoffatom (O) als gleichschenkeliges Dreieck dargestellt.



Es gilt: w = 0,09584 Nanometer (nm).

1) Tragen Sie die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

   $0{,}09584\ \text{nm} = 9{,}584 \cdot 10^{\square}\ \text{m}$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Seitenlänge x. *[0/1 P.]*

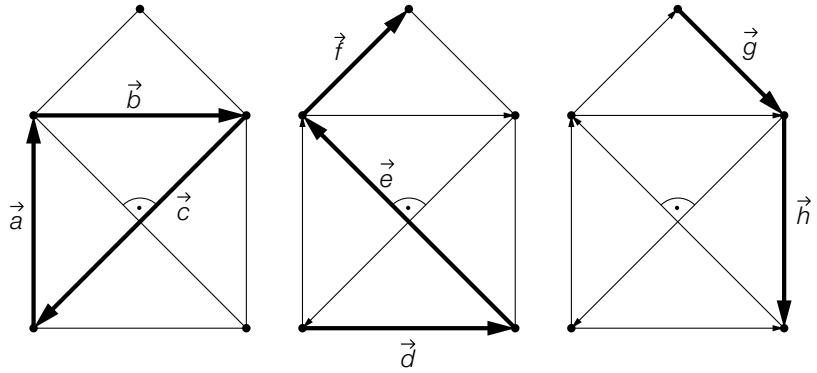
3) Kreuzen Sie denjenigen Zusammenhang an, der im obigen Dreieck <u>nicht</u> gilt. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$2 \cdot \alpha = 180° - 104{,}45°$	☐
$\frac{w}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{\sin(104{,}45°)}$	☐
$w^2 = x^2 + w^2 - 2 \cdot x \cdot w \cdot \cos(\alpha)$	☐
$\cos(\alpha) = \frac{x}{2 \cdot w}$	☐
$\sin(\alpha) = \frac{w}{x}$	☐

Aufgabe 8 (Teil B)

Kinderrätsel

a) *Das Haus vom Nikolaus* ist ein Zeichenrätsel für Kinder. Ziel ist es, ein „Haus“, das aus einem Quadrat, seinen Diagonalen und einem aufgesetzten Dreieck besteht, ohne Absetzen nachzuzeichnen.
In den nachstehenden Abbildungen ist eine Lösung durch das Zeichnen der Vektoren von $\vec{a}$ (beginnend links unten) bis $\vec{h}$ (endet rechts unten) dargestellt.



1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{f} + \vec{g} = \vec{b}$	☐
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h} = \vec{d}$	☐
$\vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{e} + \vec{b} + \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐

2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausdruck zur Berechnung der Länge von $\vec{c}$ durch Eintragen der richtigen Zahl.

$|\vec{c}| =$ _____ $\cdot |\vec{a}|$ *[0/1 P.]*

3) Begründen Sie, warum die nachstehende Gleichung gilt.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{e} \cdot \vec{c}$ *[0/1 P.]*

In einem bestimmten Koordinatensystem gilt: $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{e} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

b) *Zahlenfolgen-Rätsel* sind beliebte Rätselaufgaben. Dabei soll man eine gegebene Zahlenfolge fortsetzen.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zahlenfolge so, dass die Zahlen eine geometrische Folge bilden.

27; 18; ☐ ; ☐ *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Zahlenfolge 27; 18 als arithmetische Folge fortsetzen kann. *[0/1 P.]*

c) In einem Rätselheft ist folgende Angabe zu finden:

> Chiara und Beatrice haben gemeinsam einen Geldbetrag von k Euro.
> Chiara hat um 1 Euro mehr als Beatrice.

1) Erstellen Sie mithilfe von k ein Gleichungssystem zur Berechnung von x und y.

x ... Geldbetrag von Chiara in Euro
y ... Geldbetrag von Beatrice in Euro *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Körpermaße

a) Die Oberarmlänge von Burschen einer bestimmten Altersgruppe kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Der Erwartungswert μ beträgt 34,7 cm, die Standardabweichung σ beträgt 0,4 cm.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Oberarmlänge eines zufällig ausgewählten Burschen dieser Altersgruppe mindestens 34,4 cm beträgt. *[0/1 P.]*

b) Von 9 zufällig ausgewählten Mädchen einer anderen Altersgruppe wurden die Oberarmlänge und die Körpergröße gemessen:

Körpergröße in cm	165	164	166	159	163	170	158	168	172
Oberarmlänge in cm	34,5	34,7	34,6	34,0	34,5	35,0	33,8	34,9	34,9

Die Oberarmlänge soll in Abhängigkeit von der Körpergröße näherungsweise durch die lineare Funktion g beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion g auf. *[0/1 P.]*

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Funktion g ein geeignetes Modell zur Beschreibung dieser Abhängigkeit ist. *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Funktion g im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

c) Der Median des Körperfettanteils von Burschen ist altersabhängig (siehe nachstehende Tabelle).

Alter in Jahren	10	12	14	16
Median des Körperfettanteils in Prozent	18,9	17,8	14,1	15,7

Der Median des Körperfettanteils kann in Abhängigkeit vom Alter t durch die Polynomfunktion 3. Grades f mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ modelliert werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[0/1 P.]*

Eine Polynomfunktion 3. Grades h mit $h(x) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + d_1$ hat 2 lokale Extremstellen.

3) Geben Sie an, welches Vorzeichen die Diskriminante der Gleichung $h'(x) = 0$ haben muss. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Desinfektion

Zur Abtötung von Krankheitserregern werden verschiedene Methoden eingesetzt. Diese werden unter dem Oberbegriff *Desinfektion* zusammengefasst.

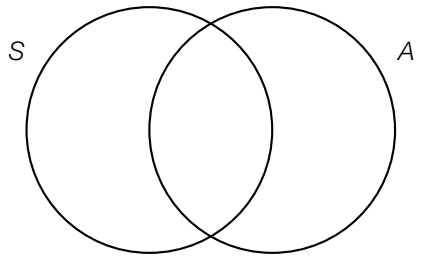
a) Eine gängige Methode, bestimmte Krankheitserreger abzutöten, ist der Einsatz von heißem Wasser. Die benötigte Einwirkzeit hängt von der Temperatur des Wassers ab.

Temperatur in °C	70	80	90
benötigte Einwirkzeit in Sekunden	30 000	3 000	300

In einem bestimmten Temperaturbereich kann die benötigte Einwirkzeit $f(x)$ in Abhängigkeit von der Temperatur x näherungsweise durch die Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ beschrieben werden. f soll dabei für die Temperaturen 70 °C und 80 °C die obigen Werte annehmen.

1) Stellen Sie eine Gleichung dieser Exponentialfunktion f auf. *[0/1 P.]*
2) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Funktionswert dieser Exponentialfunktion f bei 90 °C dem in der obigen Tabelle angegebenen Wert entspricht. *[0/1 P.]*
3) Berechnen Sie mithilfe der Exponentialfunktion f diejenige Temperatur, bei der die benötigte Einwirkzeit 10 Minuten beträgt. *[0/1 P.]*

b) Gängige chemische Desinfektionsmittel sind Säuren und Alkohole.
Im nachstehenden Venn-Diagramm ist dargestellt, welche Krankheitserreger jeweils abgetötet werden können.



S ... Menge der Krankheitserreger, die mit Säuren abgetötet werden können
A ... Menge der Krankheitserreger, die mit Alkoholen abgetötet werden können

1) Kennzeichnen Sie im obigen Mengendiagramm diejenige Menge, die alle Krankheitserreger enthält, die mit Alkoholen, jedoch nicht mit Säuren abgetötet werden können. *[0/1 P.]*
2) Interpretieren Sie die Menge $S \cap A$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

c) Eine Oberfläche wird mehrfach mit einem bestimmten Desinfektionsmittel gereinigt.
Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viel Prozent der ursprünglich vorhandenen Bakterien nach dem jeweiligen Reinigungsdurchgang noch vorhanden sind.

Reinigungsdurchgang	1	2	3	4
Prozentsatz der noch vorhandenen Bakterien	5 %	0,25 %	0,0125 %	0,000625 %

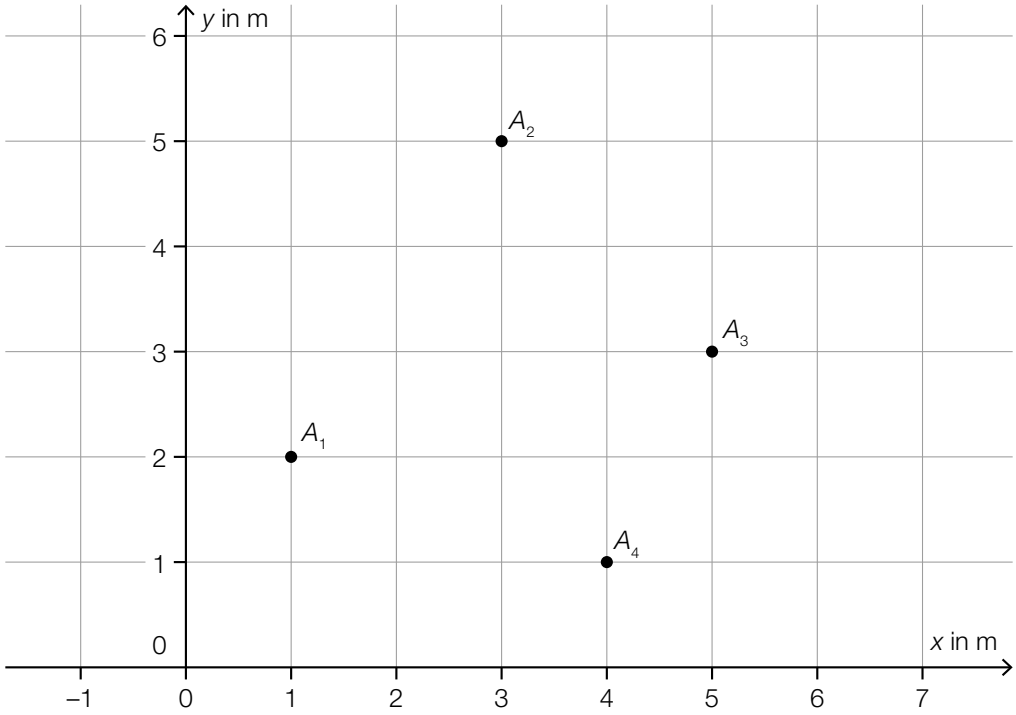
1) Zeigen Sie, dass die Prozentsätze der noch vorhandenen Bakterien eine geometrische Folge bilden. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Zebraschnecken

Um das Wanderverhalten von Zebraschnecken zu untersuchen, wird eine Versuchsfläche, auf der solche Schnecken leben, beobachtet.

a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Positionen der Zebraschnecke A an vier aufeinanderfolgenden Tagen in einem Koordinatensystem (Einheiten in Metern).
Die Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 sind dabei die Positionen der Zebraschnecke A zu Beginn des 1., 2., 3. bzw. 4. Tages.



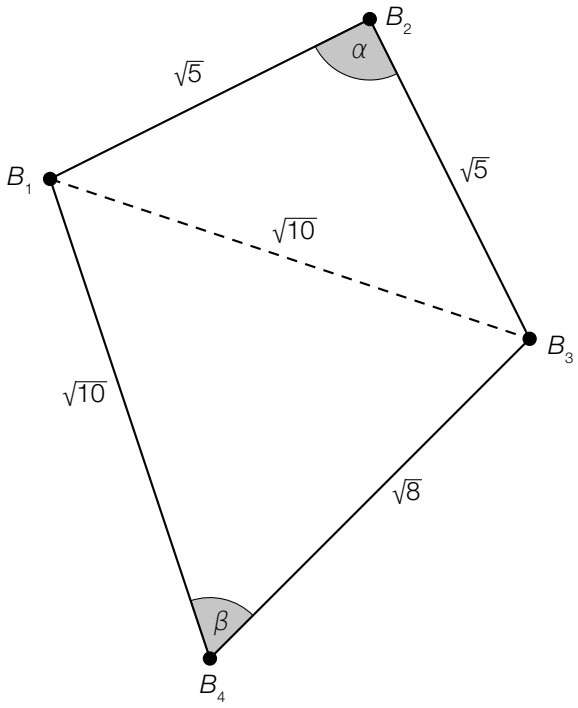
1) Geben Sie den Vektor vom Punkt A_2 zum Punkt A_3 an. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Entfernung, die die Zebraschnecke zurückgelegt hat, wenn sie auf dem kürzesten Weg von A_2 nach A_3 gekrochen ist. *[0/1 P.]*

Zu Beginn des 5. Tages befindet sich die Zebraschnecke im Punkt A_5.
Es gilt: $\overrightarrow{A_4A_5} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Punkt A_5 ein. *[0/1 P.]*

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Position der Zebraschnecke B an vier aufeinanderfolgenden Tagen. Die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 sind dabei die Positionen der Zebraschnecke B zu Beginn des 1., 2., 3. bzw. 4. Tages.



1) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Winkel α ein rechter Winkel ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Winkel β. *[0/1 P.]*

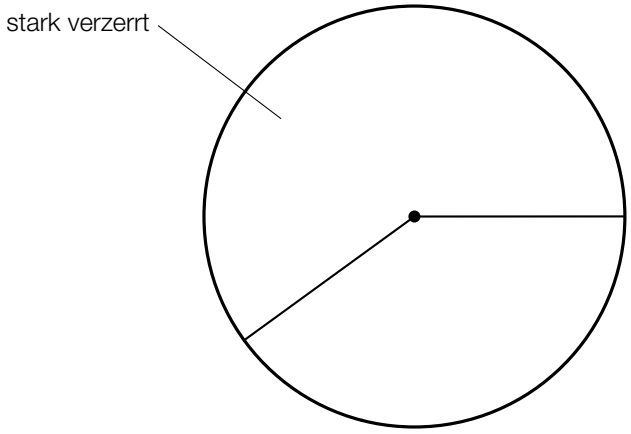
Aufgabe 9 (Teil B)

Gesundheitsberichte

Wissenschaftler/innen zeigten in einer Studie*, wie wenig faktenbasiert österreichische Medien zu Gesundheitsthemen berichten.

a) Ein Ergebnis dieser Studie war: 60 % der untersuchten Berichte zu Gesundheitsthemen enthielten stark verzerrte Inhalte. Bei rund 11 % waren die Berichte angemessen. Der restliche Anteil der untersuchten Berichte enthielt leicht verzerrte Inhalte.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*



Insgesamt wurden 990 Berichte untersucht.

2) Berechnen Sie die Anzahl der untersuchten Berichte, die stark verzerrte Inhalte enthielten. *[0/1 P.]*

b) Ein weiteres Ergebnis dieser Studie war: 97,6 % aller Berichte zu den Themen *Kosmetische Behandlungen* und *Gewichtsreduktion* geben den aktuellen Wissensstand stark verzerrt wieder.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 zufällig ausgewählten Berichten zu diesen Themen mindestens 8 Berichte befinden, die den aktuellen Wissensstand stark verzerrt wiedergeben. *[0/1 P.]*

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

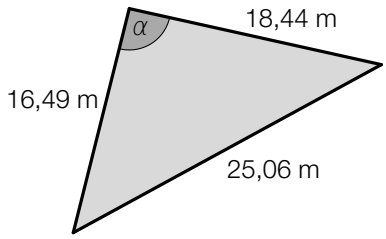
$P(E) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}976^7 \cdot 0{,}024^3$ *[0/1 P.]*

* Kerschner, Bernd et al.: Wie evidenzbasiert berichten Print- und Online-Medien in Österreich? Eine quantitative Analyse. In: *Zeitschrift für Evidenz, Fortbildung und Qualität im Gesundheitswesen* 109 (2015), S. 341–349.

Aufgabe 7 (Teil B)

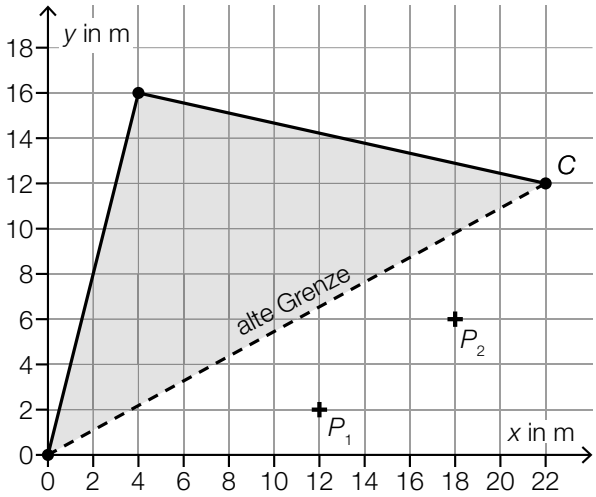
Grundstücke

a) In der nebenstehenden Abbildung ist ein dreieckiges Grundstück dargestellt.



1) Begründen Sie mithilfe der gegebenen Seitenlängen, warum der Winkel α der größte Winkel des Dreiecks ist. *[0/1 P.]*
2) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras, dass α kein rechter Winkel ist. *[0/1 P.]*
3) Berechnen Sie den Winkel α. *[0/1 P.]*
4) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Grundstücks. *[0/1 P.]*

b) Ein anderes dreieckiges Grundstück wird erweitert.
Die neue Grenze soll nun nicht mehr direkt vom Koordinatenursprung zum Punkt C verlaufen, sondern über die beiden markierten Punkte P_1 und P_2 (siehe nachstehende Abbildung).



Der Verlauf dieser neuen Grenze soll durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f. *[0/1 P.]*
2) Berechnen Sie die Koeffizienten von f. *[0/1 P.]*
3) Berechnen Sie, um wie viele Quadratmeter der Flächeninhalt des Grundstücks durch die Erweiterung zunimmt. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Kino

a) Personen, die ein Kino besuchen, können Geld für 3 verschiedene Bereiche ausgeben:

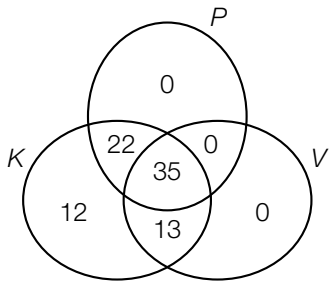
K … Menge der Personen, die für das Kinoticket Geld ausgeben
P … Menge der Personen, die für das Parkticket Geld ausgeben
V … Menge der Personen, die für die Verpflegung Geld ausgeben

1) Ordnen Sie den beiden Mengen jeweils die zutreffende Beschreibung aus A bis D zu.
[0/1 P.]

$K \setminus (P \cup V)$	
$K \cap P$	

A	Menge der Personen, die nur für das Kinoticket Geld ausgeben
B	Menge der Personen, die für das Kinoticket Geld ausgeben
C	Menge der Personen, die sowohl für das Kinoticket als auch für das Parkticket Geld ausgeben
D	Menge der Personen, die entweder für das Kinoticket oder für das Parkticket oder für beides Geld ausgeben

Die Ergebnisse einer Befragung sind im nachstehenden Venn-Diagramm dargestellt.



2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahl 12 im obigen Venn-Diagramm im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie, wie viel Prozent der befragten Personen in der Menge $K \cap P \cap V$ enthalten sind. *[0/1 P.]*

b) Die nachstehende Tabelle gibt die jährlichen Nettoeinnahmen aller Kinos in Österreich für einige Jahre an.

Jahr	2005	2006	2011	2012	2015
jährliche Nettoeinnahmen in Millionen Euro	94,8	104,3	115,7	118,5	127,2

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/kultur/kinos_und_filme/045075.html [04.08.2021].

Die jährlichen Nettoeinnahmen in Millionen Euro sollen in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2005. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

3) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von f ein. *[0/1 P.]*

c) Ein Kino zeigt einen bestimmten Film gleichzeitig in 3 Kinosälen.

Im Kinosaal X wird der Film in der Standardversion gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 14,80.
Im Kinosaal Y wird der Film in 3D gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 17.
Im Kinosaal Z wird der Film im „Director's Cut" gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 19,30.

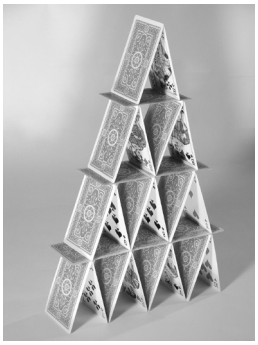
Insgesamt wurden 120 Tickets verkauft und € 2.067 eingenommen.
Für Kinosaal Z wurden 25 % mehr Tickets als für Kinosaal X verkauft.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z. *[0/1 P.]*

Aufgabe 9 (Teil B)

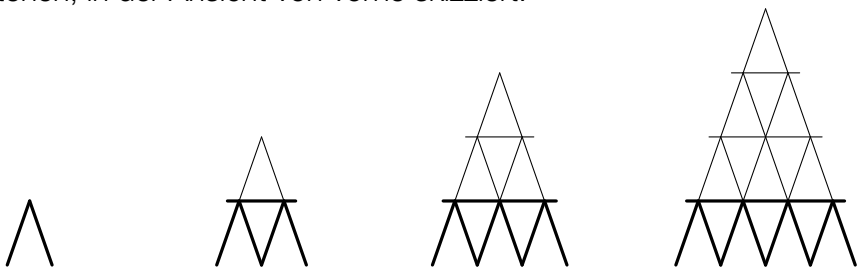
Kartenhaus



Aus Spielkarten kann man ein Kartenhaus bauen
(siehe nebenstehendes Foto).

Bildquelle: https://pixabay.com/de/kartenhaus-zerbrechlich-geduld-763246/ [02.10.2019].

In der nachstehenden Abbildung sind Kartenhäuser, die aus einer unterschiedlichen Anzahl von Stockwerken bestehen, in der Ansicht von vorne skizziert.



1-stöckiges Haus 2-stöckiges Haus 3-stöckiges Haus 4-stöckiges Haus

a) Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viele Karten für ein n-stöckiges Kartenhaus insgesamt benötigt werden und wie viele davon für das unterste Stockwerk benötigt werden.

Anzahl der Stockwerke n	insgesamt benötigte Karten	Karten für das unterste Stockwerk
1	2	2
2	7	5
3	15	8
4	26	11
5		

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Zahlen in die grau markierten Zellen ein. *[0/1 P.]*

Die Anzahl der Karten für das unterste Stockwerk kann durch die arithmetische Folge z_n beschrieben werden.

2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die arithmetische Folge z_n. *[0/1 P.]*

Maria hat ein 24-stöckiges Kartenhaus errichtet und möchte es nun zu einem 25-stöckigen Kartenhaus erweitern.

3) Ermitteln Sie die Anzahl der zusätzlichen Karten, die Maria dafür benötigt. *[0/1 P.]*

b) Die Gesamtanzahl s_n der Karten für ein n-stöckiges Kartenhaus kann mit der nachstehenden Formel ermittelt werden.

$$s_n = 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - n$$

1) Berechnen Sie die Gesamtanzahl der Karten, die für ein 50-stöckiges Kartenhaus benötigt werden. *[0/1 P.]*

Alexander hat 3 vollständige Kartensets zu je 32 Karten zur Verfügung und möchte ein Kartenhaus mit möglichst vielen Stockwerken bauen.

2) Berechnen Sie die Anzahl der Stockwerke, die Alexanders Kartenhaus höchstens haben kann. *[0/1 P.]*

c) Bei einem Glücksspiel wird ein Kartenspiel mit 32 Karten verwendet, das genau 4 Asse enthält. Bryan zieht zufällig und ohne hinzusehen 1 Karte. Ist die gezogene Karte ein Ass, so gewinnt er € 20. Ist die gezogene Karte kein Ass, so verliert er € 5.

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn bei diesem Spiel in € an.

1) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. *[0/1 P.]*
2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Kinderlieder

Eine Pädagogin fragt die 26 Kinder ihrer Gruppe, ob sie das Kinderlied *Aramsamsam* und ob sie das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen.
7 Kinder kennen beide Kinderlieder.
Insgesamt 13 Kinder kennen das Kinderlied *Aramsamsam*.
3 Kinder kennen keines der beiden Kinderlieder.

a) Die Pädagogin wählt 2 verschiedene Kinder aus den 26 Kindern ihrer Gruppe zufällig aus.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder sowohl das Kinderlied *Aramsamsam* als auch das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen. *[0/1 P.]*

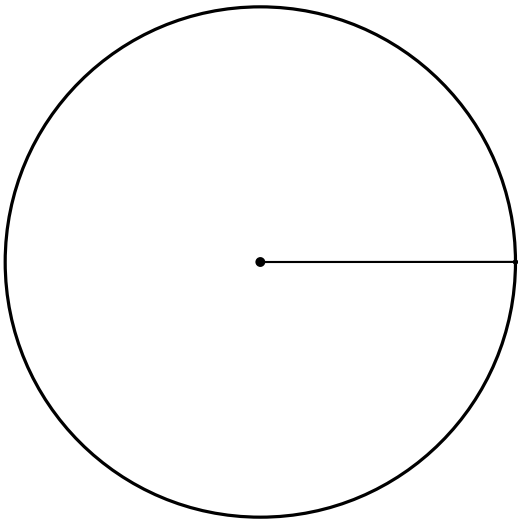
2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.
$P(E) = \frac{3}{26} \cdot \frac{2}{25}$ *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Tabelle sollen für diesen Sachverhalt die zugehörigen Prozentsätze für die Gruppe von 26 Kindern eingetragen werden.

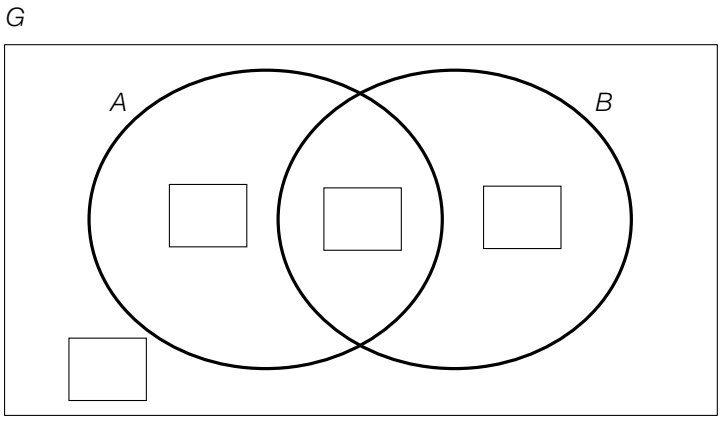
kennen genau eines der beiden Kinderlieder	%
kennen beide Kinderlieder	%
kennen keines der beiden Kinderlieder	11,54 %

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Zahlen ein. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm so, dass es den durch die Tabelle beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*



c) 1) Vervollständigen Sie das nachstehende Venn-Diagramm durch Eintragen aller Anzahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen. *[0/1 P.]*



G ... Menge aller Kinder der Gruppe
A ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Aramsamsam* kennen
B ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen

2) Ermitteln Sie die Anzahl der Elemente der Menge $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *[0/1 P.]*

Mit den Kindern, denen beide Kinderlieder bekannt sind, singt die Pädagogin das bis dahin allen Kindern der Gruppe unbekannte Kinderlied *Twinkle, twinkle, little star*.

T ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Twinkle, twinkle, little star* mit der Pädagogin singen

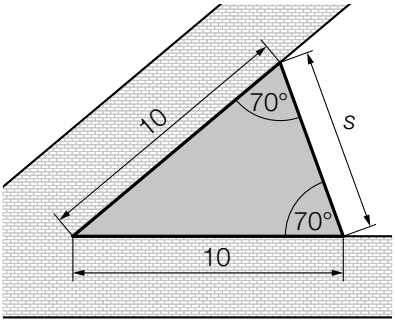
3) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$T \subseteq (A \cup B)$	☐
$T \subseteq (A \cap B)$	☐
$T \subseteq (G \setminus B)$	☐
$T \nsubseteq (B \setminus A)$	☐
$T \nsubseteq (A \setminus B)$	☐

Aufgabe 7 (Teil B)

Schlosspark

a) In einem Schlosspark wird ein dreieckiges Blumenbeet angelegt (siehe nebenstehende Abbildung – Maße in m).



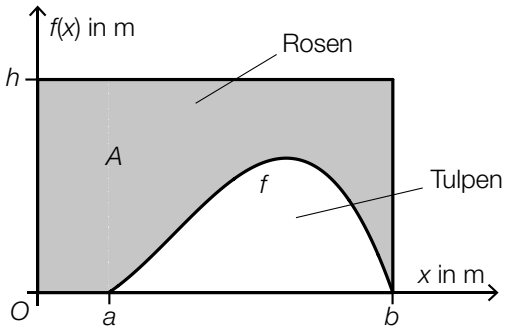
1) Ergänzen Sie den nachstehenden Ausdruck durch Eintragen der richtigen Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen.

$s = \sqrt{\square + \square - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos(\square)}$ *[0/1 P.]*

Das Blumenbeet soll mit einem Vlies gegen Unkraut abgedeckt werden. Das Abdecken des Blumenbeets kostet pro Quadratmeter € 1,42.

2) Berechnen Sie die Kosten für das Abdecken des Blumenbeets. *[0/1 P.]*

b) Ein rechteckiges Blumenbeet mit den Seitenlängen b und h ist in einen Bereich für Rosen und einen Bereich für Tulpen unterteilt. Die Begrenzungslinie zwischen diesen Bereichen kann modellhaft durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$A =$ _____ *[0/1 P.]*

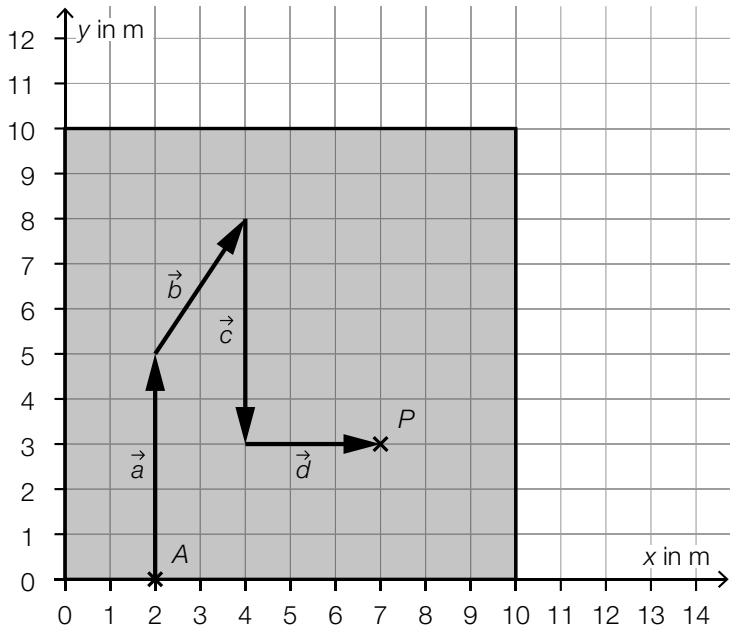
f ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.
Folgende Punkte liegen auf dem Graphen von f: (3|0,8), (5|2,7), (7|3,7), (9|2,3).

2) Berechnen Sie mithilfe dieser Punkte die Koeffizienten a, b, c und d. *[0/1 P.]*

c) Im Schlosspark gibt es ein Labyrinth aus Hecken. Der Weg durch das Labyrinth wird durch Aneinanderreihen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{h}$ (in alphabetischer Reihenfolge) beschrieben. Dabei beginnt jeder Vektor an der Spitze des vorherigen Vektors.

Es gilt: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Maße in m)

In der nachstehenden Abbildung ist die quadratische Grundfläche des Labyrinths dargestellt. Der Startpunkt A des Weges durch das Labyrinth, die ersten vier Vektoren und der Punkt P sind bereits eingezeichnet.



1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie die Länge des Weges durch das Labyrinth vom Startpunkt A zum Punkt P. *[0/1 P.]*

3) Vervollständigen Sie ausgehend vom Punkt P den Weg durch das Labyrinth durch Einzeichnen der Vektoren $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ und $\vec{h}$. *[0/1 P.]*

4) Kreuzen Sie die auf die gegebenen Vektoren <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind Gegenvektoren.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{h}$ sind parallel.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ stehen normal aufeinander.	☐

d) Im Schlosspark wird Schilf gepflanzt. In den ersten Wochen nach der Pflanzung wird die Höhe einer bestimmten Pflanze notiert.

Zeit t nach der Pflanzung in Wochen	1	2	3	4	5	6
Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm	30	34	39	44	48	52

Die Höhe dieser Pflanze soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion h beschrieben werden.

t ... Zeit nach der Pflanzung in Wochen
$h(t)$ ... Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion h.
[0/1 P.]

2) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Höhe der Pflanze 20 Wochen nach der Pflanzung.
[0/1 P.]

Aufgabe 8 (Teil B)

Ressourcen

Im Zeitraum von 1970 bis 2010 hat der jährliche globale Rohstoffverbrauch von 22 Milliarden Tonnen auf 70 Milliarden Tonnen zugenommen.*
Im selben Zeitraum hat sich die Weltbevölkerung auf 7 Milliarden verdoppelt.

a) 1) Berechnen Sie auf Basis dieser Angaben den durchschnittlichen jährlichen Rohstoffverbrauch pro Person im Jahr 1970. *[0/1 P.]*

Die zeitliche Entwicklung des globalen Rohstoffverbrauchs kann durch eine arithmetische Folge oder durch eine geometrische Folge modelliert werden.

Im Modell *A* wird das jährliche prozentuelle Wachstum bezogen auf das jeweilige Vorjahr als konstant angenommen.

2) Erstellen Sie für das Modell *A* ein explizites Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d. h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010. *[0/1 P.]*

Im Modell *B* wird das jährliche absolute Wachstum als konstant angenommen.

3) Erstellen Sie für das Modell *B* ein rekursives Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d. h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010. *[0/1 P.]*

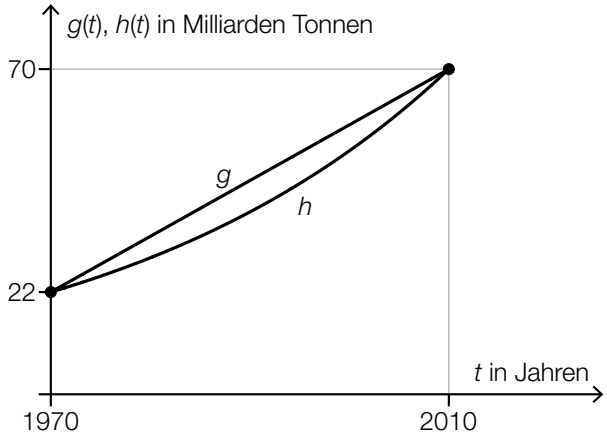
Für das Jahr 2050 wird ein jährlicher globaler Rohstoffbedarf von 180 Milliarden Tonnen angenommen.

4) Tragen Sie die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

180 Milliarden Tonnen = $1{,}8 \cdot 10^{\square}$ kg *[0/1 P.]*

* Vgl. http://derstandard.at/2000041471018/Weltweiter-Rohstoffverbrauch-seit-1970-mehr-als-verdreifacht [26.11.2020].

b) Die zeitliche Entwicklung des jährlichen globalen Rohstoffverbrauchs kann durch die streng monoton steigende lineare Funktion g oder durch die streng monoton steigende Exponentialfunktion h modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Für _____①_____ von g und h gilt: _____②_____.

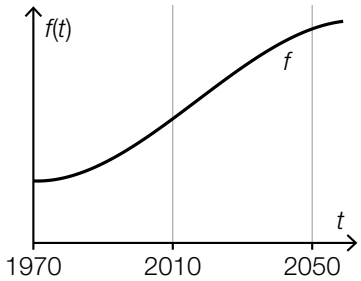
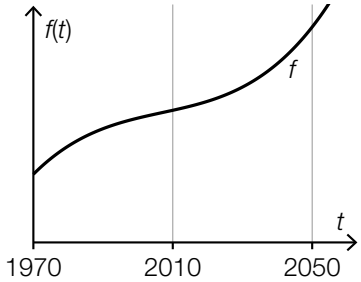
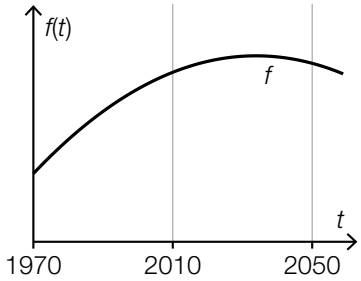
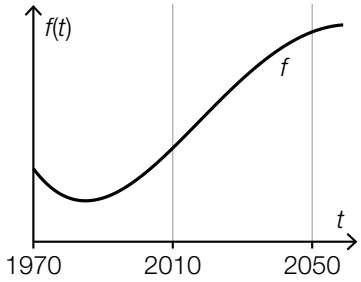
①	
genau 1 Stelle	☐
genau 2 Stellen	☐
mehr als 2 Stellen	☐

②	
$g(t) = h(t) = 0$	☐
$g'(t) = h'(t)$	☐
$g''(t) = h''(t)$	☐

c) Die zeitliche Entwicklung des jährlichen globalen Rohstoffverbrauchs kann durch verschiedene Polynomfunktionen modelliert werden.

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den entsprechenden Funktionsgraphen aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Für alle t mit $2010 < t < 2050$ gilt: $f''(t) > 0$	
Für genau ein t mit $1970 < t < 2050$ gilt: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$	

A	
B	
C	
D	

Aufgabe 6 (Teil B)

Streaming

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen. Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.
Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. *[1 Punkt]*
2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$. *[1 Punkt]*
3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt. *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Kunden für einen bestimmten Zeitraum angegeben.

Zeit t in Monaten	18	20	24	26	28
Anzahl der Kunden	23 800	32 200	54 600	68 000	81 900

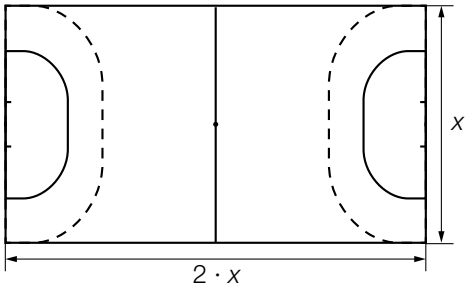
Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Handball

a) Von einem rechteckigen Handball-Spielfeld werden der Boden und die Bande renoviert. Die Bande ist eine Wand, die das Spielfeld entlang der Begrenzungslinie umgibt.



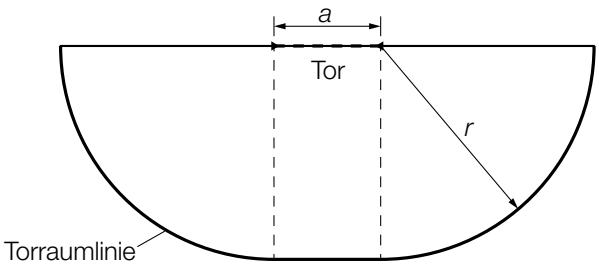
Die Kosten der Renovierung für 1 m Bande betragen € 5, die Kosten der Renovierung für 1 m² Boden betragen € 7,50. Sämtliche Werkzeuge und Arbeitsmittel kosten einen fixen Betrag von € 5.000. Die gesamten Kosten der Renovierung für das oben dargestellte Spielfeld werden mit K bezeichnet.

1) Erstellen Sie mithilfe von x eine Formel zur Berechnung von K.

$K =$ _____ *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die gesamten Kosten der Renovierung für ein Spielfeld mit der Breite $x = 20$ m. *[1 Punkt]*

b) Der *Torraum* wird durch die Torraumlinie begrenzt (siehe nachstehende Skizze).

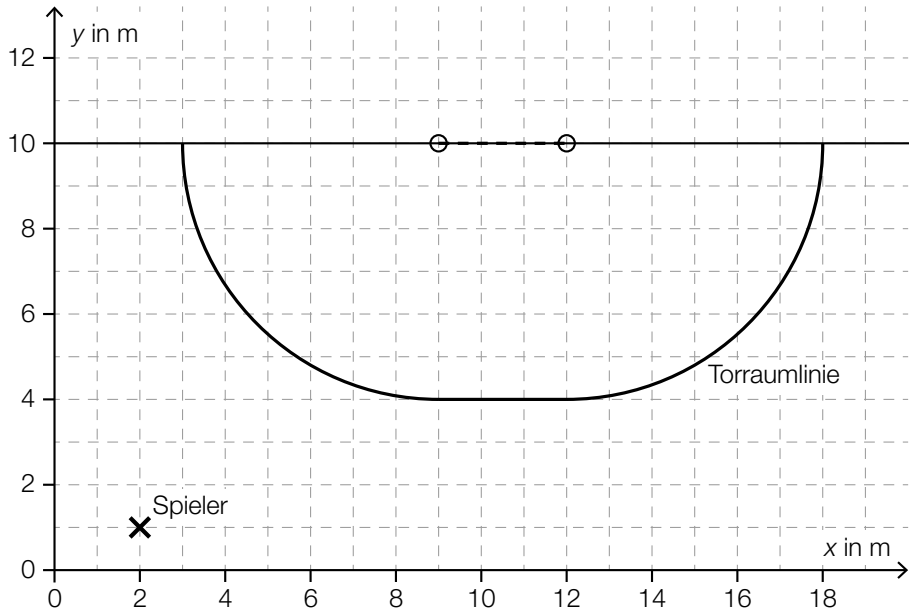


Die Fläche des Torraums setzt sich aus einem Rechteck und zwei Viertelkreisen zusammen.

1) Erstellen Sie aus a und r eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Torraums.

$A =$ _____ *[1 Punkt]*

c) In der unten stehenden Abbildung ist die Position eines Spielers mit ✕ markiert. Ausgehend von dieser Position soll ein Spielzug eingezeichnet werden, der sich aus dem Vektor $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und daran anschließend dem Vektor $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zusammensetzt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diesen Spielzug mithilfe von Pfeilen ein. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Würfelspaß

Würfelspaß ist ein Spiel, das mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt wird, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten. Die Spieler/innen müssen Aufträge erfüllen.

a) Auftrag „Größer“:
Ein Würfel wird 2-mal hintereinander geworfen. Der Auftrag „Größer“ ist erfüllt, wenn die Augenzahl des 2. Wurfes größer als die Augenzahl des 1. Wurfes ist.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen. *[1 Punkt]*

Auftrag „Sieben“:
Es werden 2 Würfel gleichzeitig geworfen. Der Auftrag „Sieben“ ist erfüllt, wenn die Augensumme 7 ergibt.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Sieben“ zu erfüllen, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen. *[1 Punkt]*

b) Auftrag „Nur nicht 2“:
Es werden 5 Würfel gleichzeitig geworfen. Zeigt dabei kein einziger Würfel die Augenzahl 2, so erhält man 10 Punkte. Für jeden Würfel, der die Augenzahl 2 zeigt, werden 2 Punkte von diesen maximal erreichbaren 10 Punkten abgezogen.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Würfel, die dabei die Augenzahl 2 zeigen.

In der nachstehenden Tabelle sollen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und die Anzahl der jeweils erreichten Punkte dargestellt werden.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$ (gerundete Werte)	0,4019	0,4019		0,0322	0,0032	0,0001
erreichte Punkte				4		

1) Vervollständigen Sie in der obigen Tabelle die Zeile „erreichte Punkte“. *[1 Punkt]*

2) Ergänzen Sie in der obigen Tabelle die fehlende Wahrscheinlichkeit. *[1 Punkt]*

3) Bestimmen Sie den Erwartungswert für diejenige Zufallsvariable, die die Anzahl der erreichten Punkte beschreibt. *[1 Punkt]*

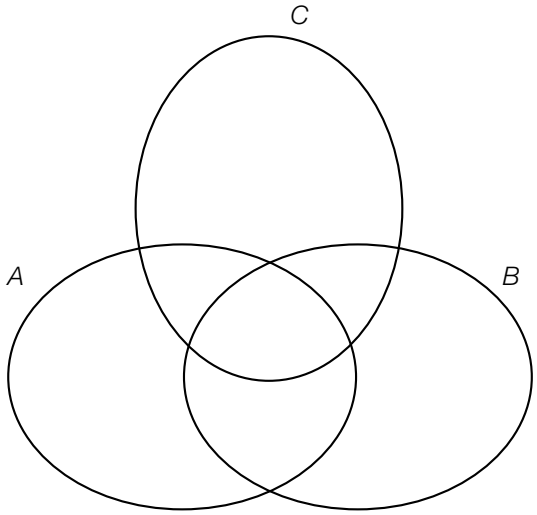
c) Die Aufträge bei *Würfelspaß* unterscheiden sich hinsichtlich der Anzahl der Mitspieler/innen, der Anzahl der verwendeten Würfel und der Anzahl der erlaubten Würfe.

A ... Menge der Aufträge, bei denen alle Spieler/innen mitspielen
B ... Menge der Aufträge, bei denen mehrere Würfel verwendet werden
C ... Menge der Aufträge, bei denen mehrere Würfe erlaubt sind

Die nachstehende Tabelle gibt die Einteilung für 6 Aufträge wieder.

	ist Element der Menge *A*	ist Element der Menge *B*	ist Element der Menge *C*
„Größer“	nein	nein	ja
„Sieben“	nein	ja	nein
„Nur nicht 2“	nein	ja	nein
„Solo“	nein	ja	ja
„Alle Achtung“	ja	nein	nein
„8 gewinnt“	ja	nein	ja

1) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm denjenigen Bereich, in dem der Auftrag „Nur nicht 2“ liegt. *[1 Punkt]*



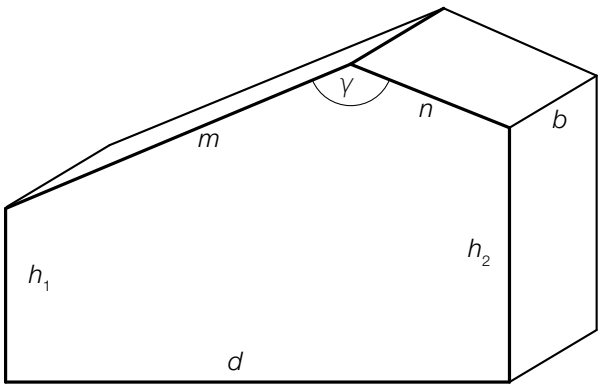
2) Geben Sie alle Aufträge an, die in der Menge $C \setminus (A \cup B)$ enthalten sind. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Asymmetrisches Satteldach

Ein Haus wird geplant. Im Erstentwurf ist ein asymmetrisches Satteldach geplant, das aus zwei rechteckigen Dachflächen besteht.

a) Das Haus soll eine rechteckige Grundfläche und lotrechte Wände haben. Es ist in der nachstehenden Skizze modellhaft dargestellt.

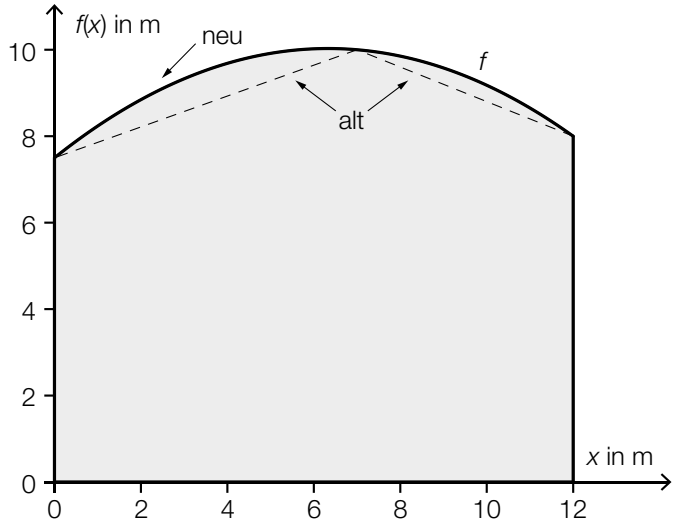


1) Zeichnen Sie in der obigen Skizze denjenigen Winkel α ein, für den gilt:
$\frac{\sin(\alpha)}{n} = \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}}$ *[1 Punkt]*

2) Begründen Sie, warum der Winkel α ein spitzer Winkel sein muss, wenn gilt: $\gamma \approx 139°$. *[1 Punkt]*

3) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V des oben dargestellten Hauses. Verwenden Sie dabei die eingezeichneten Seitenlängen und den Winkel γ. *[2 Punkte]*

b) Es wird ein neuer Entwurf mit einer anderen Dachform erstellt. In der unten stehenden Abbildung ist die Querschnittsfläche des Hauses modellhaft dargestellt.
Die obere Begrenzungslinie verläuft dabei durch die Punkte $A = (0|7{,}5)$, $B = (7|10)$ und $C = (12|8)$. Dieser Verlauf soll durch den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.



1) Erstellen Sie mithilfe der Koordinaten von A, B und C ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie den Inhalt Q_{neu} der grau markierten Querschnittsfläche des Hauses. *[1 Punkt]*

Der Inhalt der Querschnittsfläche des Hauses im alten Entwurf mit Satteldach (Erstentwurf) wird mit Q_{alt} bezeichnet.

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{Q_{neu} - Q_{alt}}{Q_{alt}} \approx 0{,}046$$

4) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Schlafdauer

Es wurden verschiedene Untersuchungen zur durchschnittlichen täglichen Schlafdauer unterschiedlicher Personengruppen durchgeführt.

a) Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen. *[1 Punkt]*

Bei 9 Personen wurden die Schlafdauer und die Fernsehzeit erhoben:

Schlafdauer in Stunden	6	7	7	8	8	9	9	10	10
Fernsehzeit in Stunden	4	4	2	3	3	2	2	1	2

Die Fernsehzeit soll in Abhängigkeit von der Schlafdauer beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. *[1 Punkt]*

3) Interpretieren Sie das Vorzeichen der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

4) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Fernsehzeit bei einer Schlafdauer von 7,5 h. *[1 Punkt]*

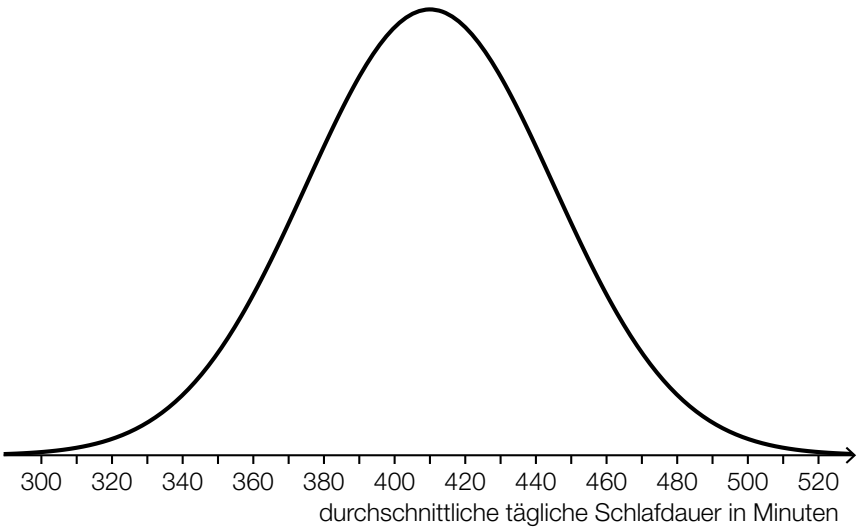
b) Die durchschnittliche tägliche Schlafdauer X von älteren Personen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 364$ min und der Standardabweichung $\sigma = 50$ min.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte ältere Person eine durchschnittliche tägliche Schlafdauer zwischen 300 min und 480 min hat. *[1 Punkt]*

2) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{}\right)$ *[1 Punkt]*

c) Für die Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren ist die durchschnittliche tägliche Schlafdauer annähernd normalverteilt. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = _____ min *[1 Punkt]*

Für eine andere Altersgruppe beträgt der Erwartungswert 399 min. Die Standardabweichung ist die gleiche wie in der Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren.

2) Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Dichtefunktion für diese Altersgruppe vom oben abgebildeten Graphen unterscheidet. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Münzen

a) Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf“ und „Zahl“ jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

Agnes, Bettina und Celina spielen ein Spiel mit einer fairen Münze.
Agnes wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Agnes und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, dann ist Bettina an der Reihe.
Bettina wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Bettina und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, ist Celina an der Reihe.
Celina wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Celina und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, ist Runde 1 beendet und Agnes beginnt Runde 2.
Dieses Spiel wird auf die gleiche Art fortgesetzt.

In der unten stehenden Tabelle sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die ersten 3 Runden teilweise eingetragen.

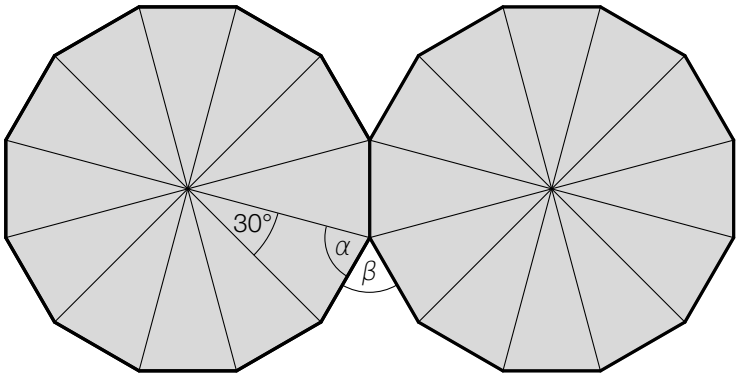
1) Vervollständigen Sie diese Tabelle durch Eintragen der fehlenden Gewinnwahrscheinlichkeiten. *[1 Punkt]*

	Agnes gewinnt das Spiel in dieser Runde	Bettina gewinnt das Spiel in dieser Runde	Celina gewinnt das Spiel in dieser Runde
Runde 1			$\frac{1}{8}$
Runde 2		$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
Runde 3	$\frac{1}{128}$		$\frac{1}{512}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Celina in Runde n gewinnt, lässt sich durch eine geometrische Folge modellieren.

2) Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz dieser Folge auf. *[1 Punkt]*

b) Die australische 50-Cent-Münze besteht – von oben betrachtet – aus 12 gleich großen gleichschenkeligen Dreiecken.
Legt man 2 solche Münzen aneinander, ergibt sich folgende geometrische Situation:



1) Ermitteln Sie die Winkel α und β. *[1 Punkt]*

c) In einer Geldbörse sind 5 Ein-Euro-Münzen und 7 Zwei-Euro-Münzen. Dorian zieht nacheinander und ohne Zurücklegen 2 zufällig ausgewählte Münzen.

Die Zufallsvariable X gibt diejenigen Geldbeträge an, die Dorian erhalten kann.
$P(X = x_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, genau den Geldbetrag x_i zu erhalten.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für das oben beschriebene Zufallsexperiment. *[1 Punkt]*

x_i			
$P(X = x_i)$			

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *[1 Punkt]*

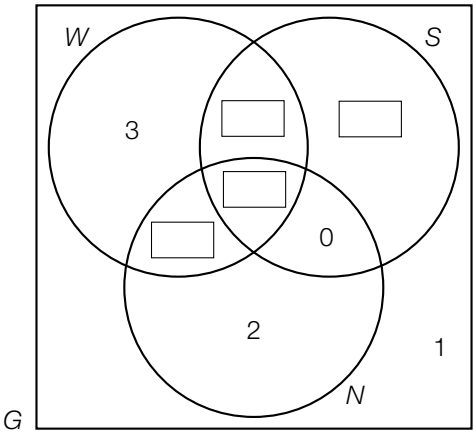
Aufgabe 8 (Teil B)

Fitnessgymnastik

a) An einem Fitnessgymnastik-Kurs nehmen weibliche und männliche Personen unterschiedlichen Alters teil.

W ... Menge der weiblichen Personen
S ... Menge der Seniorinnen und Senioren
N ... Menge der neu eingeschriebenen Personen
G ... Menge aller teilnehmenden Personen

Insgesamt nehmen am Kurs 20 Personen teil.
Es gibt keine neu eingeschriebenen Seniorinnen oder Senioren.
Unter den insgesamt 15 weiblichen Personen sind 9 Seniorinnen. 3 weibliche Personen sind neu eingeschrieben.
Unter den insgesamt 5 männlichen Personen sind 2 Senioren. 2 männliche Personen sind neu eingeschrieben.



Im obigen Venn-Diagramm ist bereits die Zahl 1 eingetragen.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Zahl im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

2) Vervollständigen Sie das obige Venn-Diagramm durch Eintragen der richtigen Anzahlen. *[1 Punkt]*

3) Kennzeichnen Sie im obigen Venn-Diagramm die Menge $(W \cup S) \setminus N$. *[1 Punkt]*

4) Kreuzen Sie den zutreffenden Zusammenhang an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

w ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter den weiblichen Personen
m ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter den männlichen Personen
k ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter allen teilnehmenden Personen

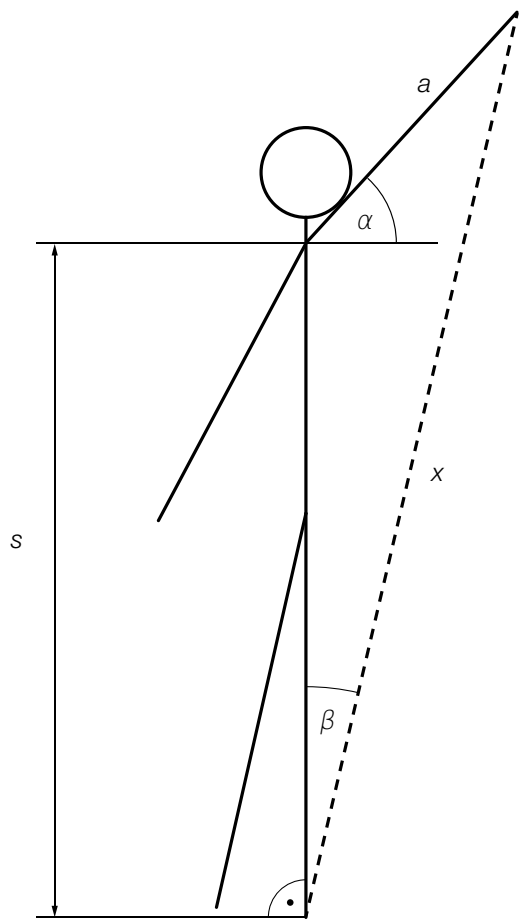
$w = 1{,}5 \cdot k$	☐
$m = 2 \cdot k$	☐
$k = 2 \cdot w$	☐
$k = 1{,}5 \cdot m$	☐
$m = 2 \cdot w$	☐

b) In einem Kurs werden dehnbare Fitnessbänder benützt. Bei einer Übung wird ein Ende des Fitnessbands mit einem Fuß fixiert. Das andere Ende wird mit dem gestreckten Arm nach oben gezogen. (Siehe unten stehende vereinfachte Abbildung.)

1) Zeichnen Sie in dieser Abbildung denjenigen Winkel φ ein, für den gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{x \cdot \sin(\beta)}{a}$$

[1 Punkt]



a ... Armlänge
s ... Schulterhöhe
x ... Länge des gedehnten Fitnessbands

2) Erstellen Sie mithilfe von *a*, *s* und α eine Formel zur Berechnung von *x*.

$x =$ _____ *[1 Punkt]*

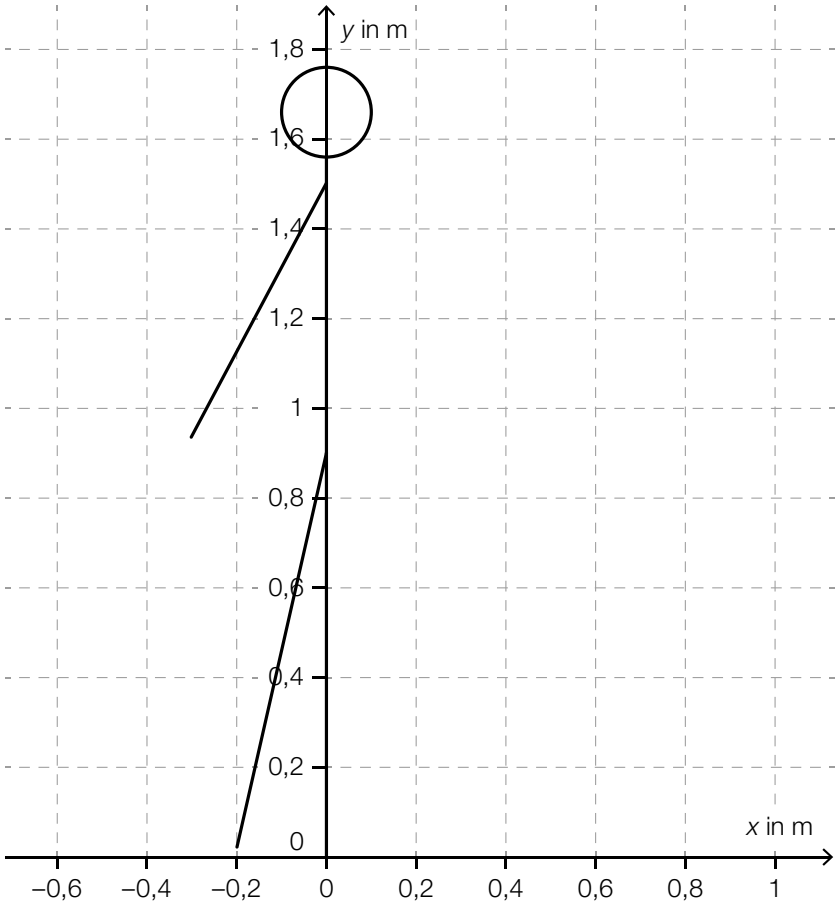
Für eine bestimmte Person gilt: $a = 0{,}7$ m, $s = 1{,}5$ m, $\alpha = 48°$

3) Berechnen Sie *x* für diese Person. *[1 Punkt]*

c) Bei einer Übung wird ein Ende eines dehnbaren Fitnessbands mit dem Fuß fixiert (Koordinatenursprung in der unten stehenden Abbildung). Das andere Ende wird mit dem in der Abbildung nicht dargestellten Arm gehalten.

Zu Beginn der Übung ist das Fitnessband ungedehnt und kann durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden (Maße in Metern).

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor $\vec{b}$ als Pfeil ausgehend vom Koordinatenursprung ein. *[1 Punkt]*



2) Berechnen Sie den Winkel, den der Vektor $\vec{b}$ mit der y-Achse einschließt. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Länge des ungedehnten Fitnessbands. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Zentimeter. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Weihnachtsmarkt

a) Auf einem Weihnachtsmarkt werden Lebkuchensterne, Marmelade und Socken verkauft. Während des ersten Tages wurden 25 Personen bedient. Jede dieser Personen kaufte mindestens ein Produkt.

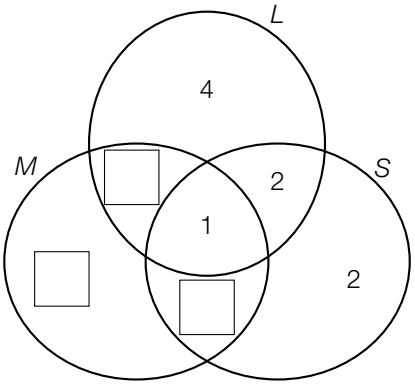
L ... Menge der Personen, die Lebkuchensterne kauften
M ... Menge der Personen, die Marmelade kauften
S ... Menge der Personen, die Socken kauften

6 Personen kauften sowohl Marmelade als auch Lebkuchensterne, aber keine Socken.
8 Personen kauften Socken.

1) Vervollständigen Sie das nebenstehende Venn-Diagramm durch Eintragen der fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen. *[1 Punkt]*

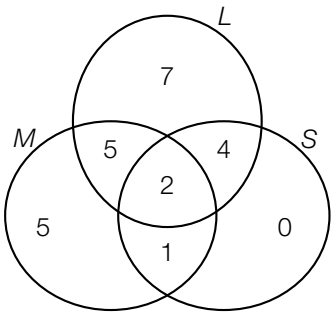
2) Markieren Sie im nebenstehenden Venn-Diagramm die Menge $(L \cap S) \setminus M$. *[1 Punkt]*

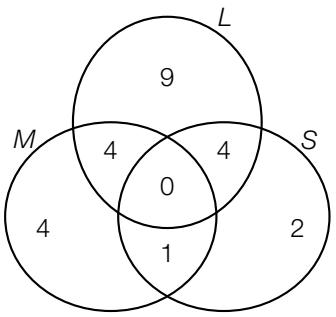
3) Beschreiben Sie die Menge $(L \cap S) \setminus M$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*



Auch für die folgenden Tage wurden Venn-Diagramme erstellt.

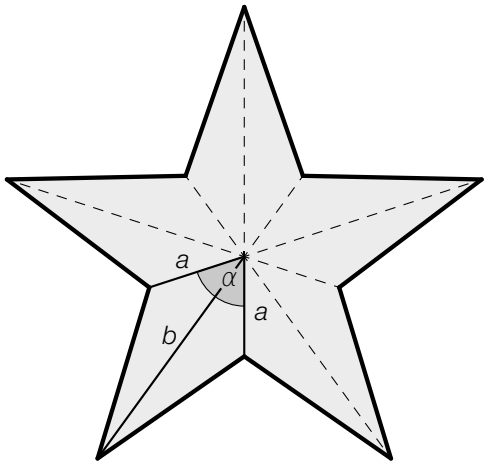
4) Ordnen Sie den beiden Venn-Diagrammen jeweils die passende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*





A	Es gab mehr Personen, die genau 2 verschiedene Produkte kauften, als Personen, die nur Lebkuchensterne kauften.
B	Es gab gleich viele Personen, die sowohl Socken als auch Lebkuchensterne kauften, wie Personen, die nur Marmelade kauften.
C	Es gab mehr Personen, die alle 3 Produkte kauften, als Personen, die nur Marmelade kauften.
D	Es gab weniger Personen, die sowohl Lebkuchensterne als auch Socken kauften, als Personen, die sowohl Marmelade als auch Socken kauften.

b) In der nachstehenden Abbildung ist eine Ausstechform für Lebkuchensterne dargestellt. Es handelt sich dabei um einen regelmäßigen 5-zackigen Stern.



Zur Berechnung der Länge einer Strecke x wird folgender Ausdruck aufgestellt:

$x = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\alpha)}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Strecke x ein. *[1 Punkt]*

Für eine bestimmte Ausstechform gilt:

$a = 2$ cm
$b = 5$ cm
$\alpha = 72°$

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines mit dieser Ausstechform ausgestochenen Lebkuchensterns. *[1 Punkt]*

c) Aus einem Teig werden mit einer Ausstechform Lebkuchenherzen ausgestochen. Der Flächeninhalt eines solchen Lebkuchenherzens beträgt A (in cm^2), die Dicke beträgt d (in cm). N Lebkuchenherzen haben insgesamt ein Volumen V (in cm^3).

1) Erstellen Sie aus A, V und d eine Formel zur Berechnung von N.

$N =$ _____ *[1 Punkt]*

d) Jemand beobachtete auf dem Weihnachtsmarkt das Kaufverhalten und bestimmte die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Anzahl *n* der Marmeladegläser	Wahrscheinlichkeit für den Kauf von *n* Marmeladegläsern pro Person
0	0,24
1	0,38
2	0,16
3	0,12
4	
≥ 5	0

1) Vervollständigen Sie die obige Tabelle durch Eintragen des fehlenden Wertes. *[1 Punkt]*

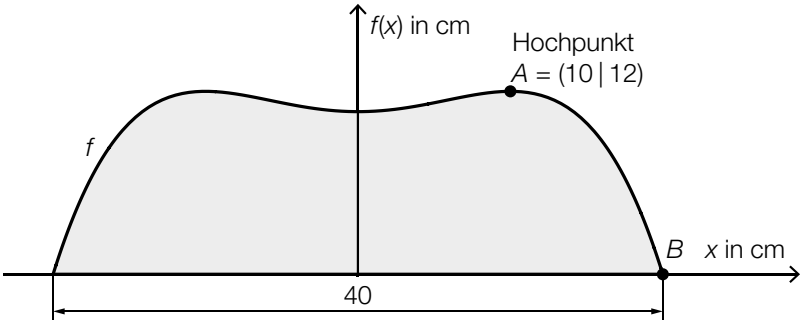
2) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der gekauften Marmeladegläser pro Person. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Stand-up-Paddling

Stand-up-Paddling ist eine Wassersportart, bei der eine Person aufrecht auf einem Board steht und paddelt.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Umriss des hinteren Teils eines Boards von oben betrachtet dargestellt. Die Begrenzungslinie kann näherungsweise durch eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ beschrieben werden.

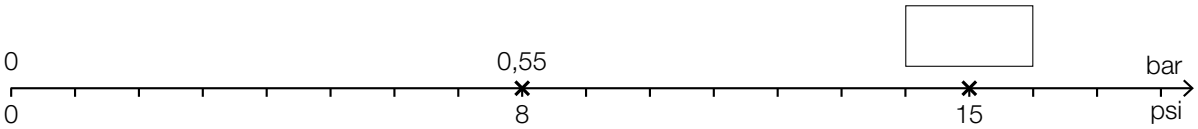


x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A und B ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. *[2 Punkte]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *[1 Punkt]*

b) Auf einer Luftpumpe für ein aufblasbares Board sind die folgenden zwei Einheiten für den Druck angegeben: pound-force per square inch (psi) und Bar (bar). Die nachstehende Skala zeigt den Zusammenhang zwischen den beiden Einheiten, wobei die Maßzahlen direkt proportional zueinander sind.

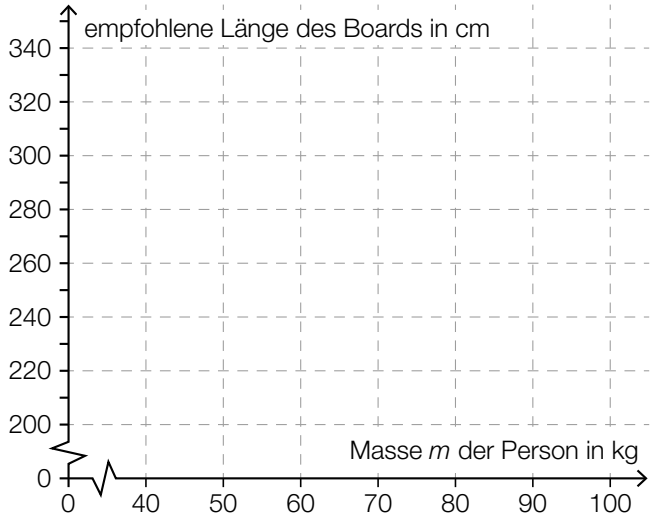


1) Vervollständigen Sie die obige Skala durch Eintragen des fehlenden Wertes. *[1 Punkt]*

c) Je nach Masse m der Person wird ein aufblasbares Board in einer der drei Größen S, M und L empfohlen.

	empfohlene Länge des Boards in cm	Masse m der Person in kg
Größe S	270	$m \leq 60$
Größe M	300	$60 < m < 80$
Größe L	320	$m \geq 80$

1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Zusammenhang zwischen der Masse m der Person und der empfohlenen Länge des Boards. *[1 Punkt]*



Boards in diesen drei Größen werden in einem Sportgeschäft verkauft. Die Preise und Verkaufszahlen in den Monaten Juli und August sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen.

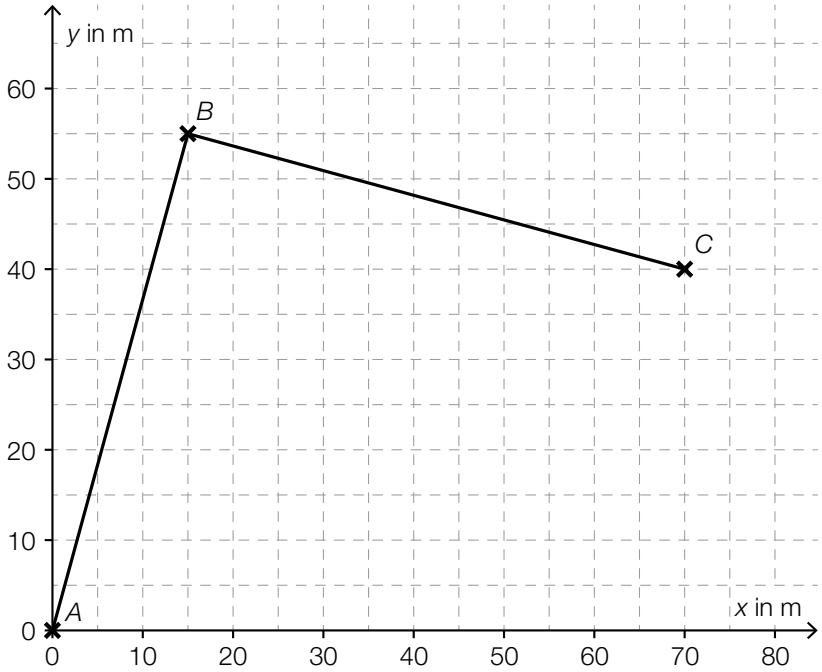
	Preis pro Board in €	Verkaufszahlen im Juli	Verkaufszahlen im August
Größe S	a	8	10
Größe M	b	20	13
Größe L	c	14	25

2) Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils die zutreffende Interpretation aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

$a \cdot 18 + b \cdot 33 + c \cdot 39$	
$\frac{a \cdot 10 + b \cdot 13 + c \cdot 25}{48}$	

A	Der Ausdruck entspricht dem Anteil der Boards, die im August verkauft wurden, an der Gesamtzahl der verkauften Boards in den beiden Monaten.
B	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards in den beiden Monaten.
C	Der Ausdruck entspricht den durchschnittlichen Einnahmen pro Board im August.
D	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards im August.

d) In einem Hafen wurde eine Stand-up-Paddling-Trainingsstrecke mit Bojen markiert. Dabei muss man vom Start im Punkt A zum Punkt B und dann zum Punkt C paddeln (siehe nachstehende Abbildung).



1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung geometrisch.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Sozialausgaben

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020. *[1 Punkt]*

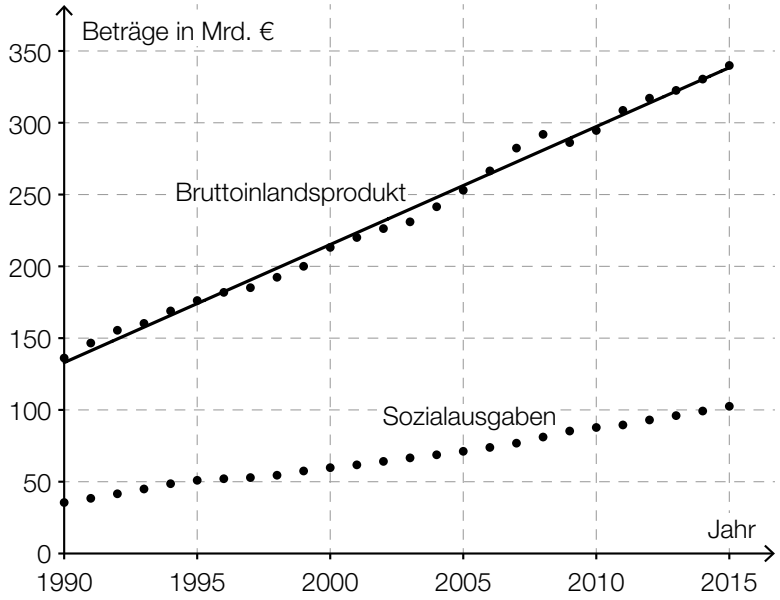
b) Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015. *[1 Punkt]*

c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt.
Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.

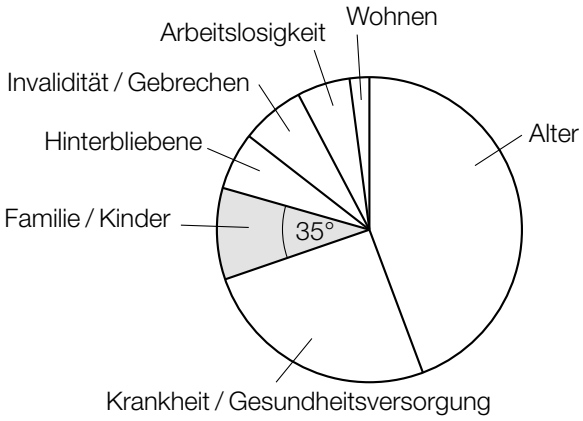


1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt. *[1 Punkt]*

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015. *[1 Punkt]*

d) Die Verteilung der Sozialausgaben von insgesamt 102,5 Milliarden Euro für das Jahr 2015 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Bereich „Familie / Kinder“ ist markiert.



1) Ermitteln Sie den Betrag, der im Jahr 2015 für den Bereich „Familie / Kinder“ ausgegeben worden ist. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Roborowski-Zwerghamster

a) Die durchschnittliche Körpermasse von Zwerghamstern wird bei der Geburt mit 1,2 g angegeben, nach 1 Woche mit 4,3 g, nach 2 Wochen mit 8,7 g, nach 3 Wochen mit 12,5 g und nach 4 Wochen mit 14,2 g.

Die zeitliche Entwicklung der durchschnittlichen Körpermasse von Zwerghamstern soll für die ersten 4 Lebenswochen näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grades f beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe von Regression eine Gleichung dieser Polynomfunktion 3. Grades f. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Geburt. *[1 Punkt]*

Zur Zeit t_1 gilt: $f''(t_1) = 0$ und $f'(t_1) > 0$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Stelle t_1 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3,5 Wochen nach der Geburt hat ein Zwerghamster 62 % der durchschnittlichen Körpermasse eines ausgewachsenen Zwerghamsters.

3) Bestimmen Sie mithilfe der Funktion f, welche durchschnittliche Körpermasse ein ausgewachsener Zwerghamster gemäß diesem Modell hat. *[1 Punkt]*

b) Die täglich aufgenommene Nahrungsmenge eines ausgewachsenen Zwerghamsters hängt von seiner Körpermasse ab.

Die folgende Formel gibt näherungsweise den Zusammenhang zwischen der täglich aufgenommenen Nahrungsmenge N und der Körpermasse M an:

$N = 1{,}422 \cdot \ln(M) - 1{,}78$

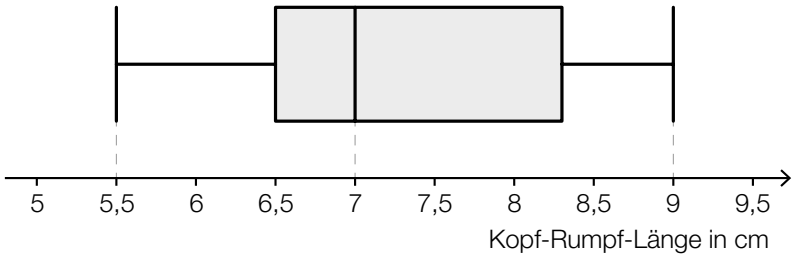
N … täglich aufgenommene Nahrungsmenge in g
M … Körpermasse in g

1) Berechnen Sie die täglich aufgenommene Nahrungsmenge bei einer Körpermasse von 30 g. *[1 Punkt]*

2) Formen Sie die Formel nach M um.

$M =$ _____ *[1 Punkt]*

c) Im nachstehenden Boxplot sind die Kopf-Rumpf-Längen einer Zwerghamsterpopulation dargestellt.



1) Ermitteln Sie die Spannweite. *[1 Punkt]*

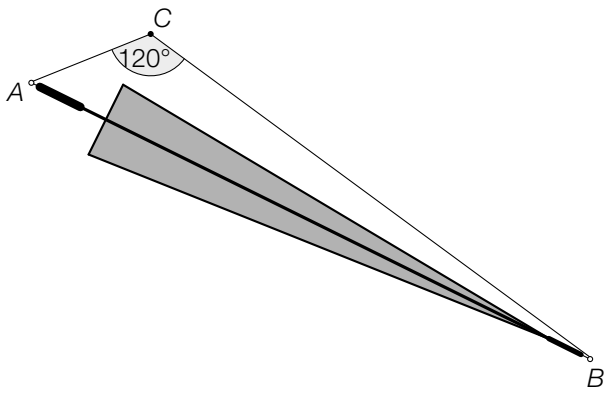
Jemand behauptet: „Es gibt in dieser Zwerghamsterpopulation mindestens 1 Zwerghamster mit einer Kopf-Rumpf-Länge von 7 cm.“

2) Argumentieren Sie, dass diese Behauptung nicht zwingend richtig sein muss. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Regenschirm

a) An den Enden eines Regenschirms ist eine 110 cm lange Schnur befestigt. Der Schirm ist so an einen Haken *C* gehängt, dass die beiden Schnurabschnitte einen Winkel von 120° einschließen. Der Punkt *A* ist 25 cm weit vom Haken *C* entfernt. (Siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze.)

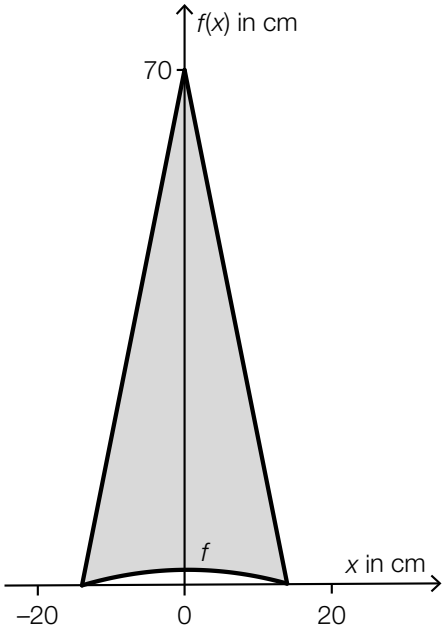


1) Berechnen Sie die Länge $\overline{AB}$ des Regenschirms. *[1 Punkt]*

Derselbe Regenschirm wird nun so aufgehängt, dass die beiden Schnurabschnitte einen rechten Winkel einschließen. Dadurch ändert sich die Länge der Schnurabschnitte.

2) Berechnen Sie, welche Entfernungen der Punkt *A* in diesem Fall vom Haken *C* haben kann. *[2 Punkte]*

b) Die Bespannung des Regenschirms besteht aus Flächenteilen, die jeweils durch 2 Geraden und den Graphen der Funktion f begrenzt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = -\frac{1}{98} \cdot x^2 + 2$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

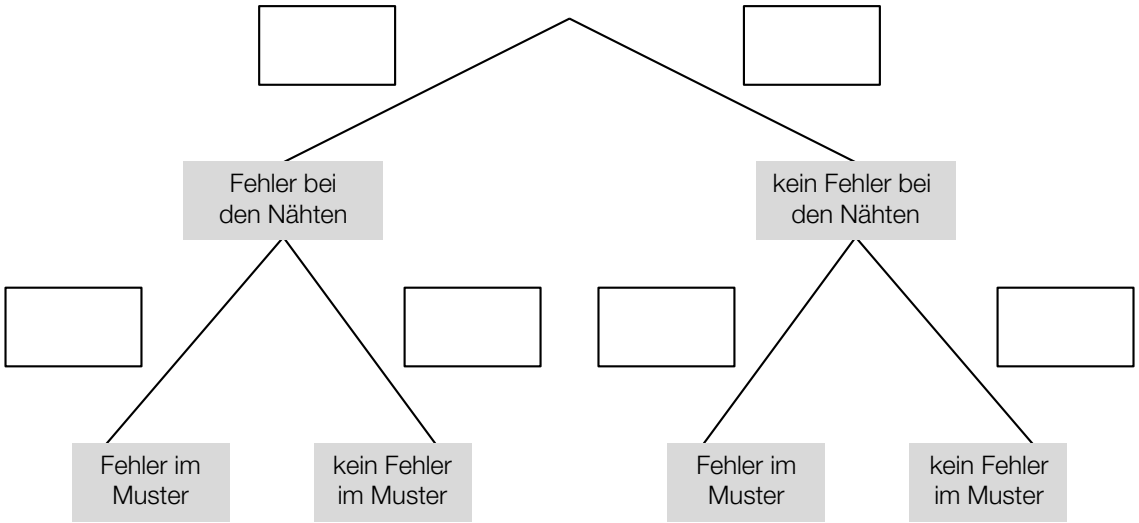
1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des grau markierten Flächenteils. *[2 Punkte]*

c) Für einen Kunsthandwerksmarkt werden Regenschirme angefertigt.

Bei der Herstellung der Regenschirme treten unabhängig voneinander 2 Arten von Fehlern auf. Man weiß aus Erfahrung:

- Bei durchschnittlich 1 von 5 Regenschirmen treten Fehler bei den Nähten auf.
- Bei durchschnittlich 30 % der Regenschirme treten Fehler im Muster auf.

1) Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten im nachstehenden Baumdiagramm. *[1 Punkt]*



Regenschirme, die beide Fehler aufweisen („III. Wahl“), werden um € 2 pro Stück verkauft.
Regenschirme, die nur einen von beiden Fehlern aufweisen („II. Wahl“), werden um € 15 pro Stück verkauft.
Regenschirme, die keinen Fehler aufweisen („I. Wahl“), werden um € 30 pro Stück verkauft.

2) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle. *[1 Punkt]*

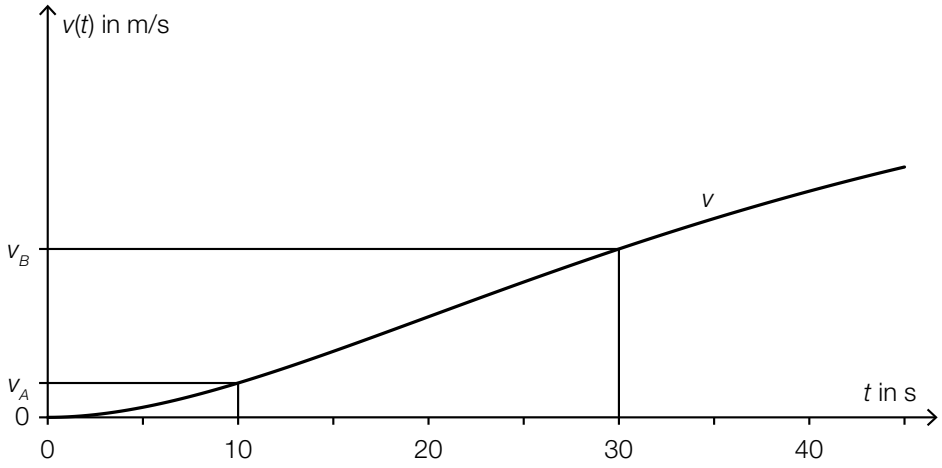
	I. Wahl	II. Wahl	III. Wahl
Einnahmen pro Regenschirm in Euro	30	15	2
Wahrscheinlichkeit			

3) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Einnahmen pro verkauftem Regenschirm. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Straßenbahn

a) Eine Straßenbahn fährt von einer Haltestelle los. Ihr Geschwindigkeitsverlauf für die ersten 45 Sekunden ist im nachstehenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

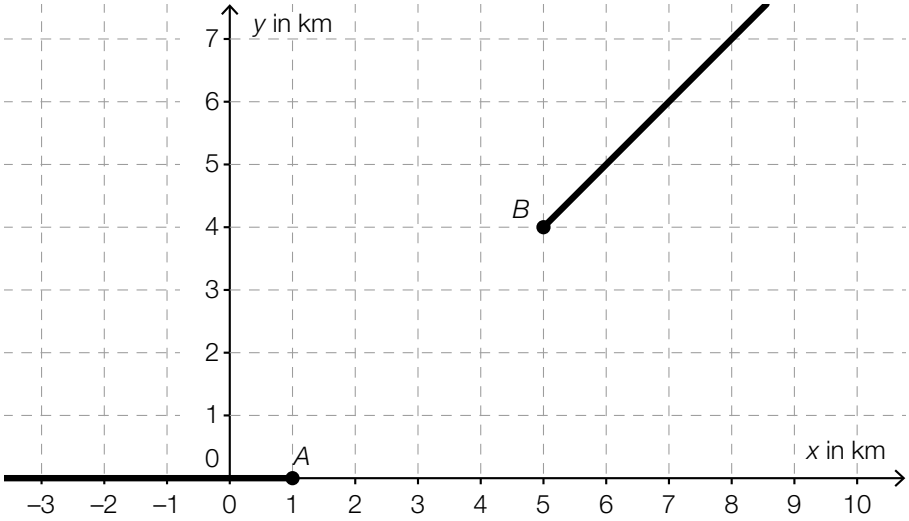
Die Geschwindigkeit der Straßenbahn nimmt im Zeitintervall [10; 30] linear zu.

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit der Straßenbahn 15 Sekunden nach Beginn der Fahrt aus v_A und v_B.

$v(15) =$ _____ *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 geradlinige Gleise, die im Punkt A bzw. im Punkt B enden, modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. „Knickfrei“ bedeutet, dass die entsprechenden Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Diese Gleisverbindung soll durch eine Polynomfunktion g mit $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ modelliert werden (x, $g(x)$ in km).

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion g.

[2 Punkte]

Aufgabe 10 (Teil B)

Kfz-Bestand

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist. *[1 Punkt]*

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$$

$$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Jemand berechnet weiters:

$$2 = 1{,}0169...^{t}$$

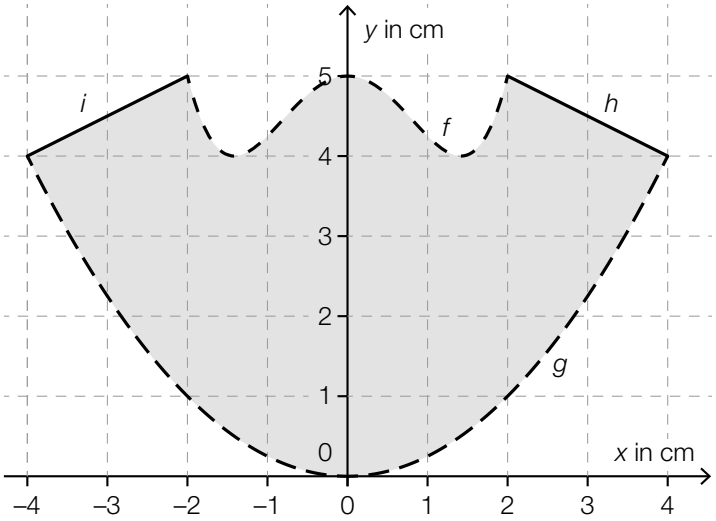
$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Skulptur

Eine Skulptur wird von oben betrachtet. Die Deckfläche ist waagrecht und eben. Sie ist in der nachstehenden Abbildung in einem Koordinatensystem dargestellt. Dabei ist die Deckfläche symmetrisch zur y-Achse und wird durch die Graphen der Funktionen f, g, h und i begrenzt.



a) 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A der grau markierten Deckfläche.

$A =$ _____ *[1 Punkt]*

b) Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

Es gilt: $f'(1) = -1$

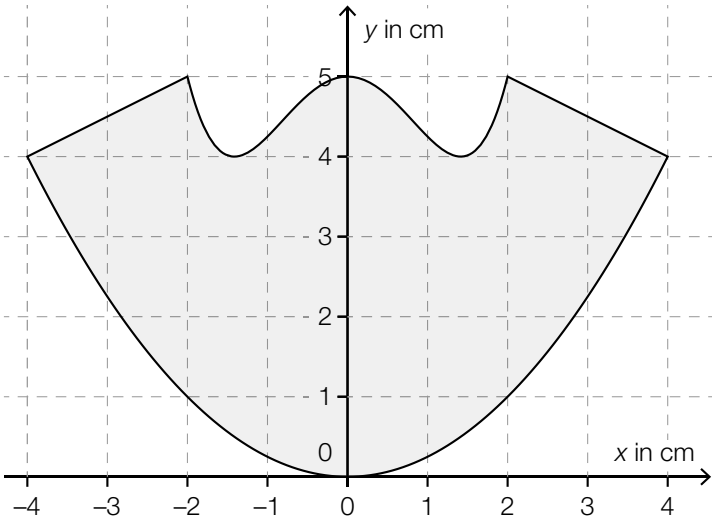
1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *[1 Punkt]*

c) Auf die Deckfläche der Skulptur soll ein Viereck nach bestimmten Vorgaben gemalt werden.

Ausgehend vom Punkt (0|3) wird der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Pfeil aufgezeichnet.
Vom Endpunkt dieses Pfeils ausgehend wird nun der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Pfeil aufgezeichnet.

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie oben beschrieben als Pfeile ein. *[1 Punkt]*



Der Vektor $\vec{c}$ entsteht durch Spiegelung des Vektors $\vec{a}$ an der y-Achse.

2) Ergänzen Sie die Koordinaten dieses Vektors:

$\vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[1 Punkt]*

Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie oben beschrieben als Pfeile eingezeichnet und spiegelt man diese Pfeile an der y-Achse, so entsteht das Viereck.

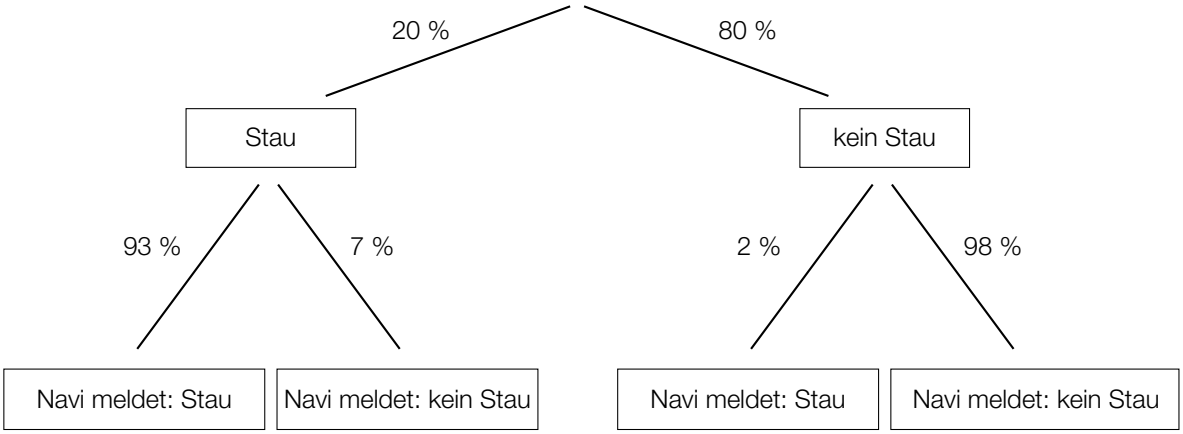
3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Navigationsgeräte

Moderne Navigationsgeräte (Navis) haben eine Reihe von Zusatzfunktionen.

a) Für einen bestimmten Straßenabschnitt ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stau auftritt, konstant.
Die Meldung „Stau“ oder „kein Stau“ am Navi ist jedoch nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit richtig. Dieser Sachverhalt ist im nachstehenden Baumdiagramm dargestellt.



1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Fahrt auf diesem Straßenabschnitt ein Stau auftritt und dieser vom Navi gemeldet wird. *[1 Punkt]*

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird: $P(E) = 0{,}2 \cdot 0{,}93 + 0{,}8 \cdot 0{,}02$ *[1 Punkt]*

b) Entlang einer 45 km langen Teststrecke auf einer Autobahn sind insgesamt 8 Radarboxen in gleichen Abständen zur Überwachung der Geschwindigkeit aufgestellt. Eine dieser Radarboxen steht am Anfang und eine am Ende der Strecke.

Die Abstände der Radarboxen vom Streckenanfang lassen sich durch eine Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ modellieren.

1) Geben Sie an, welche Art von Folge hierfür in Frage kommt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[1 Punkt]*

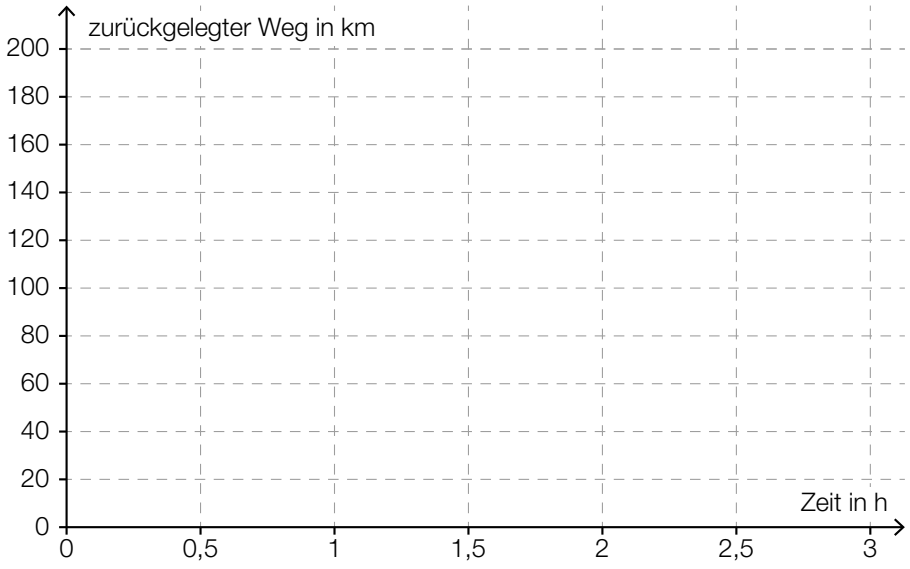
2) Stellen Sie für diese Folge ein explizites Bildungsgesetz auf. *[1 Punkt]*

Die 8 Radarboxen werden unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 vom Navi erkannt.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Radarboxen auf dieser Strecke nicht erkannt werden. *[1 Punkt]*

c) Entlang einer 200 km langen Strecke fährt jemand die erste Hälfte des Weges mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h und die zweite Hälfte des Weges mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h.
Die Geschwindigkeiten auf den beiden Weghälften werden dabei modellhaft als jeweils konstant angenommen.

1) Stellen Sie diese Fahrt im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm dar. *[1 Punkt]*



Jemand behauptet, dass die mittlere Geschwindigkeit für die gesamte Fahrt 75 km/h beträgt.

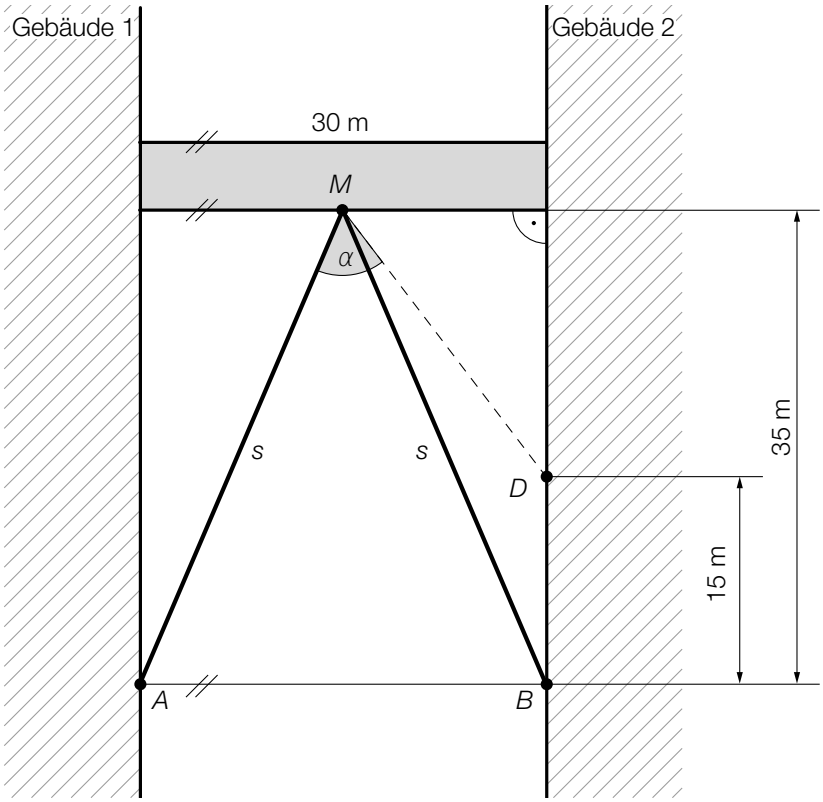
2) Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Brücken zwischen Gebäuden

Gebäude können durch Brücken verbunden werden.

a) Eine 30 m lange Brücke wird im Punkt *M* auf zwei Stützen der Länge *s* gelagert (siehe nachstehende Abbildung).

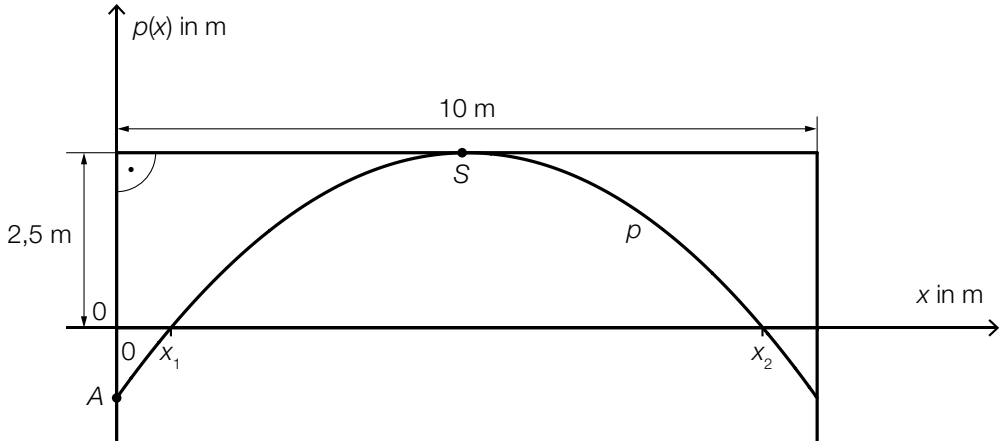


1) Berechnen Sie die Länge *s* einer Stütze. *[1 Punkt]*

Die Stütze *MB* soll durch eine neue Stütze *MD* ersetzt werden.

2) Berechnen Sie den Winkel α. *[2 Punkte]*

b) Eine Brücke soll zwei Gebäude verbinden. Die Brücke mit 10 m Länge wird auf einem parabelförmigen Bogen gelagert, der als Graph einer Funktion p mit $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ modelliert werden kann. Der Bogen wird im Punkt $A = (0|-1)$ an der linken Gebäudemauer befestigt, der Scheitel ist im Punkt $S = (5|2{,}5)$ (siehe nachstehende Abbildung).



1) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion p. *[1 Punkt]*

2) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden kann:
$10 \cdot 2{,}5 - \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$ *[1 Punkt]*

Im Punkt A wird die Tangente an den Graphen der Funktion p gelegt. Diese Tangente schließt mit der senkrechten Achse den spitzen Winkel β ein.

3) Kreuzen Sie die zutreffende Formel zur Berechnung des Winkels β an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$\beta = 90° - \arctan(p'(0))$	☐
$\beta = \arctan\left(\frac{5}{3{,}5}\right)$	☐
$\beta = p'(0)$	☐
$\beta = \tan\left(\frac{5}{p(0)}\right)$	☐
$\beta = \tan(p'(0))$	☐

Aufgabe 9 (Teil B)

Internet

a) In der nachstehenden Tabelle sind Daten zur weltweiten Nutzung des Internets angegeben.

Zeit t seit dem Ende des Jahres 1995 in Jahren	1	2	3	4	5
Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen	16	36	70	147	248

Datenquelle: https://www.internetworldstats.com/emarketing.htm [27.08.2019].

Die Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser Exponentialfunktion f in der Form $f(t) = a \cdot b^t$. *[1 Punkt]*

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

b) Im Jahr 2012 betrug die weltweit über das Internet übertragene Datenmenge 333,6 Millionen Terabyte.

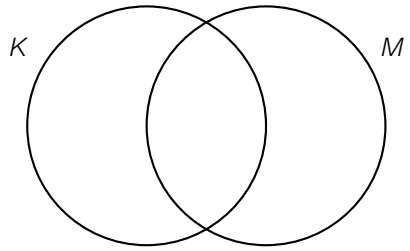
1) Tragen Sie die fehlende Zahl in Gleitkommadarstellung der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ in der nachstehenden Umwandlung ein.

333,6 Millionen Terabyte = _____ Byte *[1 Punkt]*

c) Eine Verbindung mit dem Internet erfolgt über ein sogenanntes *Modem*. Dieses kann eine Verbindung mit dem Internet kabelgebunden oder über ein Mobilfunknetz herstellen.

Ein bestimmtes Modem kann eine Verbindung mit dem Internet nur kabelgebunden und nicht über ein Mobilfunknetz herstellen.

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Mengendiagramm denjenigen Bereich, in dem dieses Modem enthalten ist. *[1 Punkt]*



K ... Menge aller Modems, die eine Verbindung mit dem Internet kabelgebunden herstellen können

M ... Menge aller Modems, die eine Verbindung mit dem Internet über ein Mobilfunknetz herstellen können

Aufgabe 6 (Teil B)

Lauftraining

Anna, Beate und Clara bereiten sich auf einen Laufwettbewerb vor. Dabei verfolgen sie unterschiedliche Trainingspläne.

a) Anna und Beate überlegen sich folgende Trainingspläne:

		Trainingstag			
		1	2	3	4
Länge der Trainingsstrecke in km	Anna	1,5	1,65	1,815	
	Beate	1,5	2	2,5	

1) Zeigen Sie, dass die Längen der Trainingsstrecken von Anna an den ersten 3 Tagen eine geometrische Folge bilden. *[1 Punkt]*

2) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf. *[1 Punkt]*

Die Längen der Trainingsstrecken von Beate an den ersten 3 Tagen bilden eine arithmetische Folge.

3) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf. *[1 Punkt]*

4) Ergänzen Sie unter Verwendung der jeweiligen Bildungsgesetze die fehlenden Werte in der letzten Spalte der obigen Tabelle. *[1 Punkt]*

b) Clara berechnet die Längen ihrer Trainingsstrecken folgendermaßen:

$c_n = 2{,}75 + 0{,}125 \cdot n$

n … Trainingstag
c_n … Länge der Trainingsstrecke am n-ten Tag in km

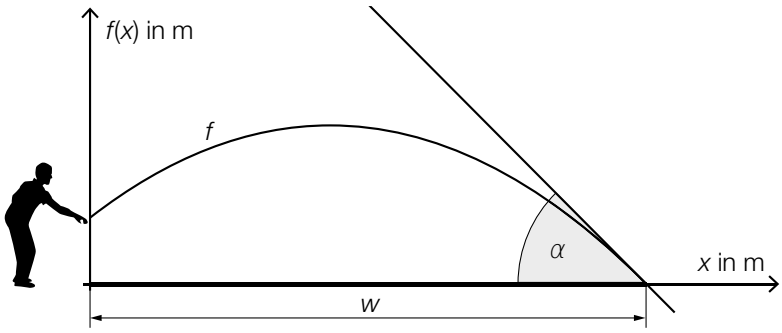
1) Berechnen Sie, am wievielten Trainingstag Claras Trainingsstrecke eine Länge von 8 km hat. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Boule

Boule ist eine Sportart, bei der Kugeln geworfen werden. Ziel ist es, mit den eigenen Kugeln möglichst nah an eine Zielkugel zu gelangen.

a) Peter wirft eine Kugel. Die Flugbahn dieser Kugel kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

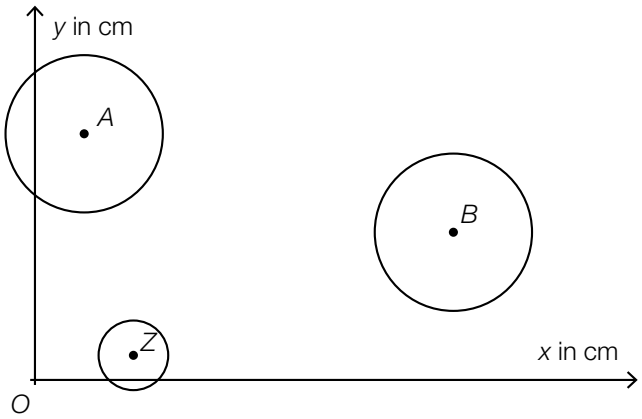
1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,1 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Wurfweite w. *[1 Punkt]*

Peter möchte, dass der Aufprallwinkel α der Kugel im Intervall [42°; 44°] liegt.

3) Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob der Aufprallwinkel α in diesem Intervall liegt. *[1 Punkt]*

b) Für eine genauere Analyse eines Boule-Spiels wird mithilfe einer Drohne ein Luftbild aufgenommen.



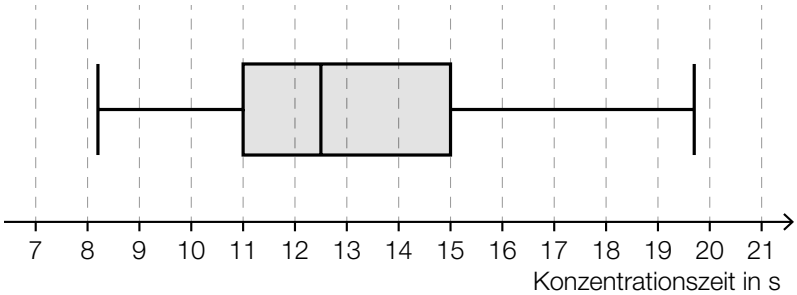
$A = (2|10)$ ... Auflagepunkt der ersten Kugel
$B = (17|6)$ ... Auflagepunkt der zweiten Kugel
$Z = (4|1)$ ... Auflagepunkt der Zielkugel

1) Berechnen Sie die Länge der Strecke BZ. *[1 Punkt]*

Während des Spiels bewegt sich die erste Kugel entlang der Strecke AB 3 cm in Richtung B.

2) Berechnen Sie die Koordinaten der neuen Position des Auflagepunkts der ersten Kugel. *[2 Punkte]*

c) Die Zeit, die benötigt wird, um sich vor einem Wurf zu konzentrieren, nennt man Konzentrationszeit.
Im nachstehenden Boxplot sind die Konzentrationszeiten von Emma bei mehreren Würfen zusammengefasst.



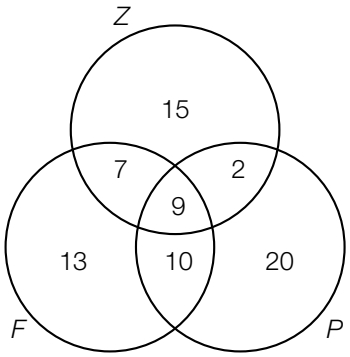
1) Lesen Sie aus dem Boxplot den Interquartilsabstand der Konzentrationszeiten von Emma ab. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Studienabschlüsse

a) Mehrere Personen wurden befragt, warum sie ihr Studium nicht abgeschlossen haben.
Zur Auswahl standen folgende 3 Gründe: „Zeitprobleme“, „private Gründe“ und „fachliche Defizite“. Mehrfachnennungen waren möglich.

Die Ergebnisse der Befragung von 76 Personen sind im nachstehenden Venn-Diagramm dargestellt.

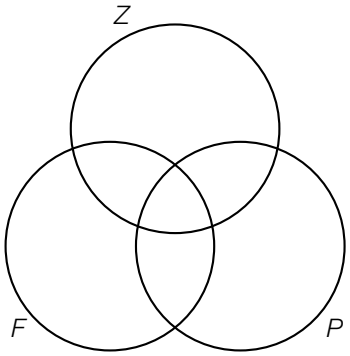


Z ... Menge aller Personen, die Zeitprobleme angegeben haben
P ... Menge aller Personen, die private Gründe angegeben haben
F ... Menge aller Personen, die fachliche Defizite angegeben haben

1) Beschreiben Sie die Menge $(F \cap Z) \setminus P$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie, wie viele Personen genau 1 der 3 Gründe angegeben haben. *[1 Punkt]*

3) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Venn-Diagramm die Menge derjenigen Personen, die sowohl Zeitprobleme als auch private Gründe als auch fachliche Defizite angegeben haben. *[1 Punkt]*



b) Folgende Tabelle gibt die jeweilige Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten in Österreich in den Jahren 2007 bis 2014 an:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten	22 121	23 910	27 232	27 926	31 115	34 460	37 312	34 300

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Bildung in Zahlen 2014/15. Tabellenband.* Wien: Statistik Austria 2016, S. 320.

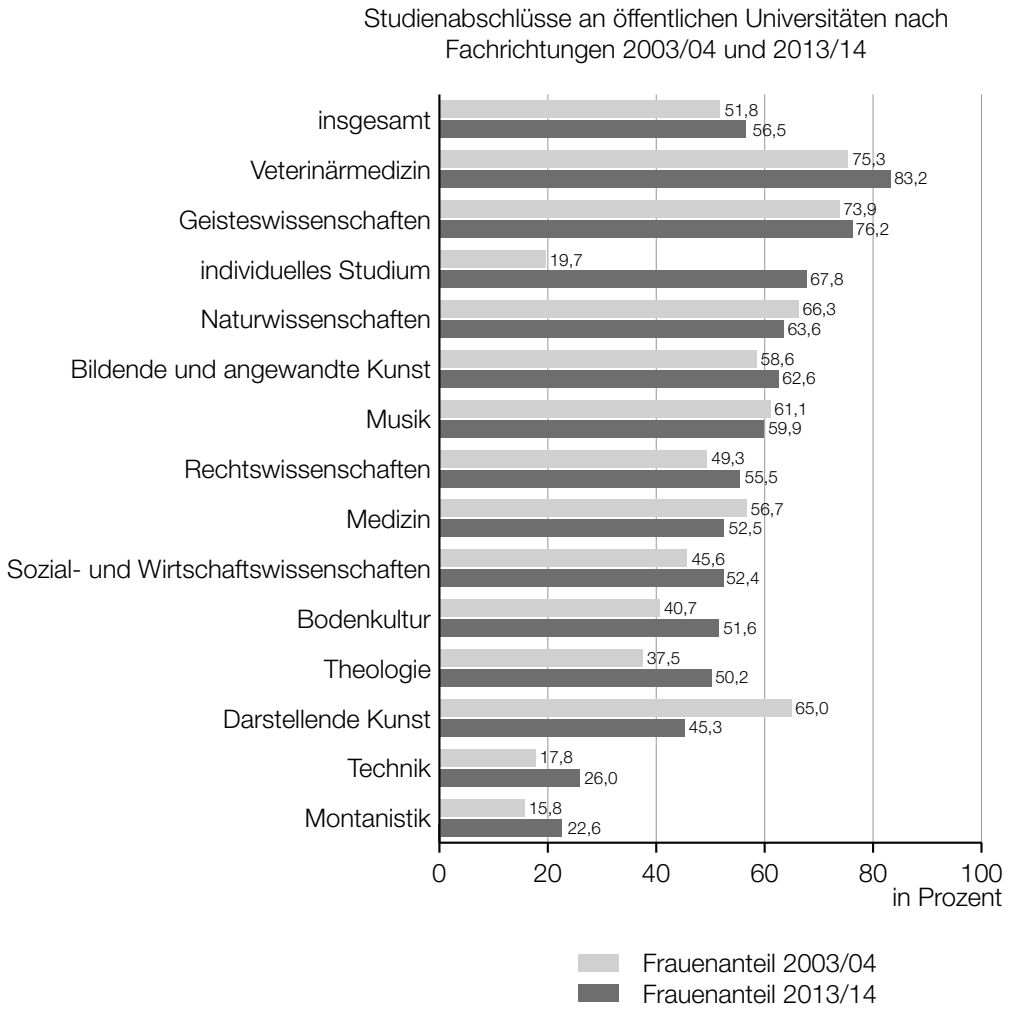
Jemand vermutet, dass sich die Anzahl der Studienabschlüsse in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007. *[1 Punkt]*

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsfunktion ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Anzahl der Studienabschlüsse zu beschreiben. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie, mit wie vielen Studienabschlüssen gemäß diesem Modell im Jahr 2020 zu rechnen ist. *[1 Punkt]*

c) Folgendes Diagramm zeigt den Frauenanteil bei den Studienabschlüssen an öffentlichen Universitäten in Österreich für zwei verschiedene Studienjahre:



Quelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/soziales/gender-statistik/bildung/index.html [14.02.2017] (adaptiert).

1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm ab, in welchen Fachrichtungen der Frauenanteil im Studienjahr 2013/14 geringer als im Studienjahr 2003/04 war. *[1 Punkt]*

Jemand behauptet:
„Im Bereich *individuelles Studium* ist der Frauenanteil in den dargestellten Studienjahren von 19,7 % auf 67,8 % gestiegen. Das heißt, dass 2013/14 viel mehr Frauen als 2003/04 ein *individuelles Studium* abgeschlossen haben."

2) Erklären Sie, warum diese Argumentation unzulässig ist. *[1 Punkt]*

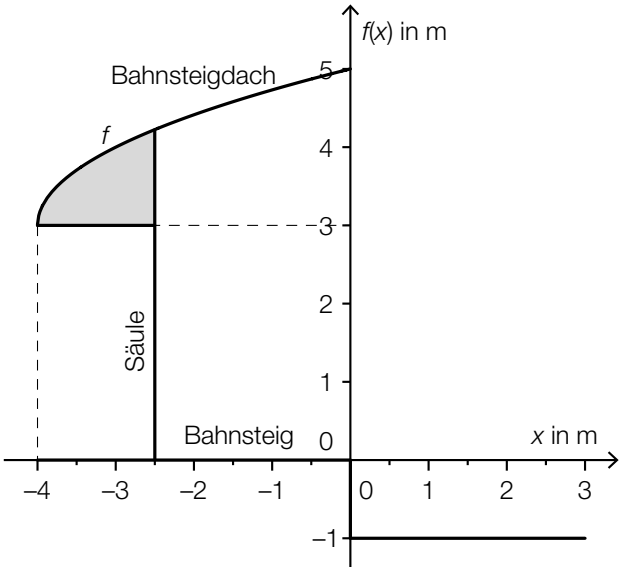
Aufgabe 9 (Teil B)

Bahnsteige

a) Auf dem Bahnhof Linz wird eine Betonkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs verwendet.

Bildquelle: BMBWF

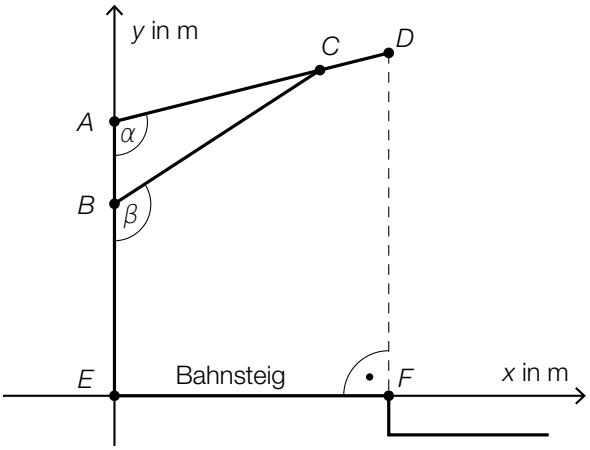
Die nebenstehende Abbildung zeigt eine vereinfachte Darstellung der Betonkonstruktion.



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche.

$A =$ _____ *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Skizze ist eine Holzkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ und α eine Formel zur Berechnung von $\overline{DF}$.

$\overline{DF}$ = _____ *[1 Punkt]*

Es gilt: $A = (0|4)$, $B = (0|2{,}8)$, $\alpha = 104°$ und $\beta = 123°$

2) Berechnen Sie die Länge $\overline{BC}$. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

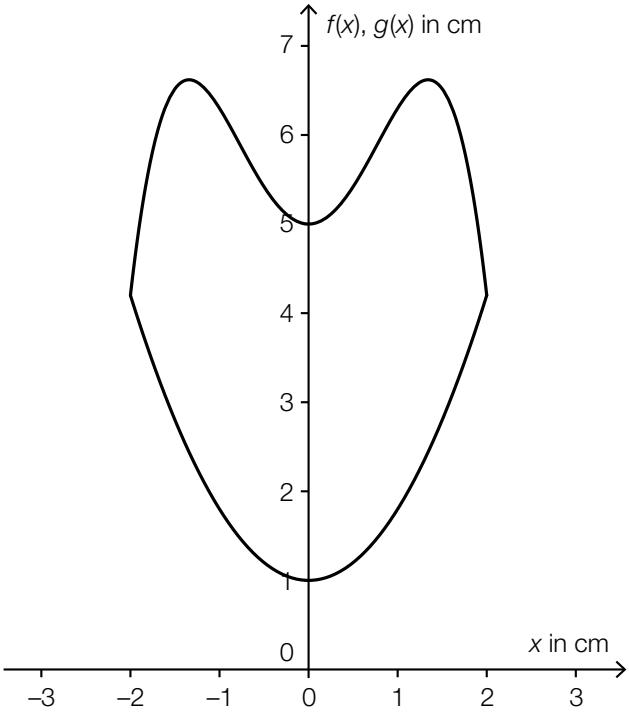
Bastelarbeit im Kindergarten

Als Werkarbeit in einem Kindergarten sollen Katzenköpfe aus Modelliermasse gestaltet werden. Als Vorlage dazu dient eine Ausstechform. Die Begrenzungslinien dieser Ausstechform können durch die Graphen der Funktionen f und g beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}5 \cdot x^4 + 1{,}8 \cdot x^2 + 5$
$g(x) = 0{,}8 \cdot x^2 + 1$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Graphen dieser Funktionen sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



a) 1) Argumentieren Sie mithilfe der Funktionsgleichungen, dass der Graph der Funktion f die obere Begrenzungslinie und der Graph der Funktion g die untere Begrenzungslinie beschreibt (und nicht umgekehrt). *[1 Punkt]*

b) Modelliermasse erhält man in quaderförmigen Packungen mit folgenden Maßen:
(B) 95 mm × (T) 25 mm × (H) 200 mm

1) Berechnen Sie das Volumen einer Packung Modelliermasse in cm^3. *[1 Punkt]*

Jedes Kind soll mithilfe der Form einen 2 cm dicken Katzenkopf ausstechen können.

2) Berechnen Sie, wie viele Packungen Modelliermasse man mindestens benötigt, damit alle 24 Kinder der Gruppe jeweils einen Katzenkopf basteln können. *[2 Punkte]*

c) Um die Werkarbeit der Kinder schön verpacken zu können, sollen Schachteln mit rechteckiger Grundfläche gefaltet werden. Jeder Katzenkopf soll in eine solche Schachtel gelegt werden. Eine Seite der Schachtel-Grundfläche muss mindestens 4 cm lang sein.

1) Berechnen Sie die Mindestabmessung der anderen Seite der Grundfläche. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

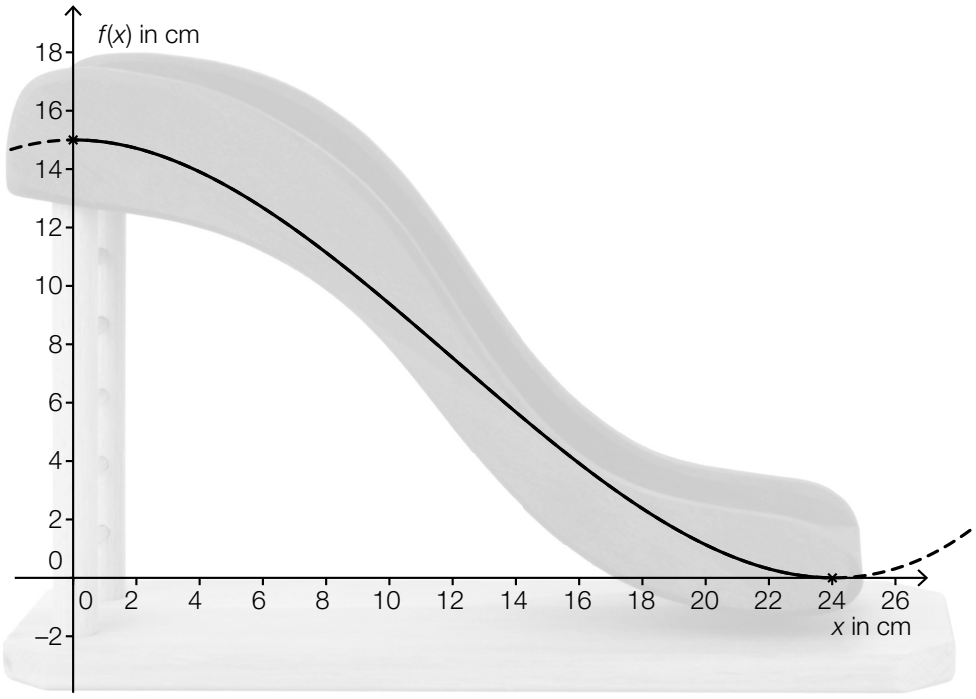
Puppenrutsche

a) In der unten stehenden Abbildung ist eine Puppenrutsche dargestellt. Das seitliche Profil dieser Puppenrutsche kann annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades f modelliert werden:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $0 \leq x \leq 24$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

Der Graph der Funktion f hat an den Stellen $x = 0$ und $x = 24$ jeweils eine horizontale Tangente.



Bildquelle: http://www.spielzeug-truhe.de/artikel-277.htm [01.12.2014] (adaptiert).

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können. *[2 Punkte]*

b) Das seitliche Profil einer anderen Spielzeugrutsche kann durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = \frac{1}{108} \cdot (x^3 - 18 \cdot x^2 + 864)$ mit $0 \leq x \leq 12$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

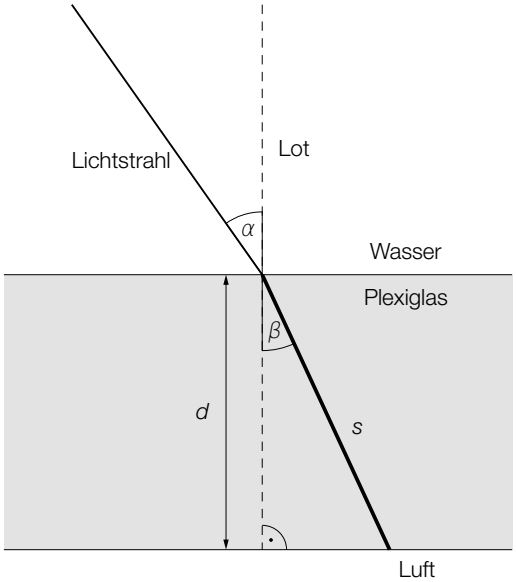
1) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Rutsche am steilsten ist. *[2 Punkte]*

2) Begründen Sie allgemein, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Tauchgang

a) Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



α ... Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Wasser
β ... Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Plexiglas

Der Zusammenhang zwischen α und β kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

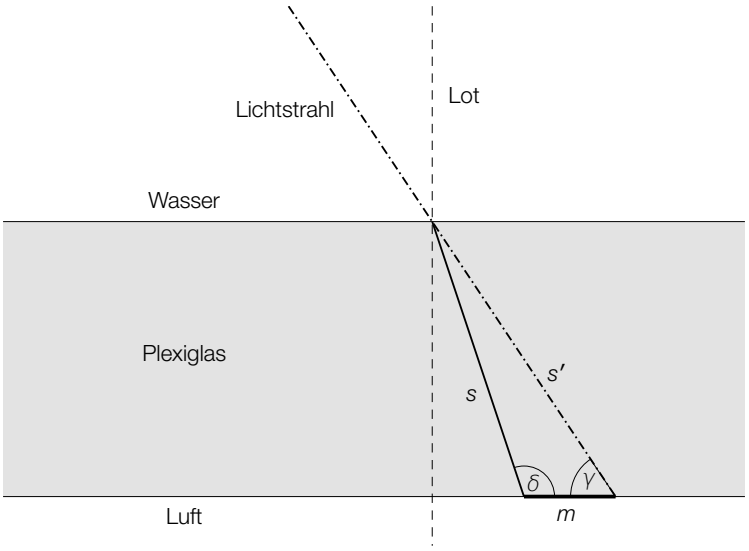
$\sin(\alpha)$ verhält sich zu $\sin(\beta)$ wie 1,49 zu 1,33.

1) Berechnen Sie den Winkel β, wenn gilt: $\alpha = 35°$. *[1 Punkt]*

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge s, wenn die Dicke d und der Winkel β bekannt sind.

s = _____ *[1 Punkt]*

b) Die nachstehende nicht maßstabgetreue Grafik zeigt den Verlauf eines anderen Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



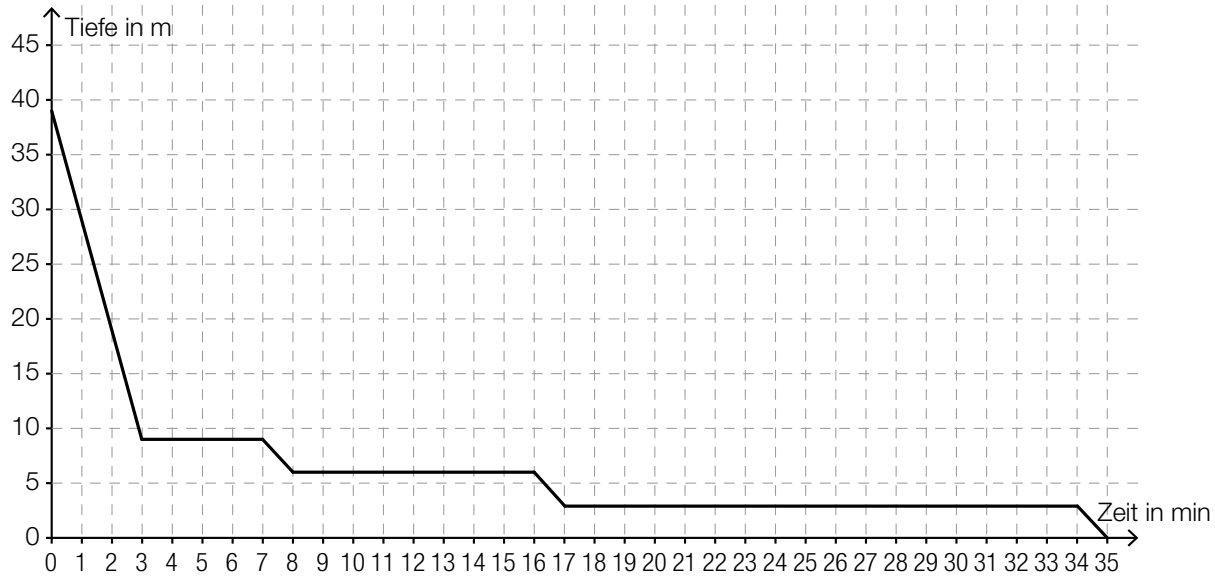
s ... Weg, den der Lichtstrahl im Plexiglas zurücklegt
s' ... Weg, den der Lichtstrahl ohne Ablenkung zurücklegen würde

Dabei gilt: $s = 4{,}52$ mm und $s' = 4{,}77$ mm. Außerdem kennt man den Winkel $\gamma = 57°$.

1) Berechnen Sie den stumpfen Winkel δ. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Länge der Strecke m. *[1 Punkt]*

c) Das nachstehende Diagramm zeigt, wie bei einem bestimmten Tauchgang aus 39 m Tiefe aufgetaucht wurde.



1) Interpretieren Sie die waagrechten Abschnitte des Graphen im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

2) Markieren Sie im obigen Diagramm ein Zeitintervall, in dem die Auftauchgeschwindigkeit rund 10 m/min beträgt. *[1 Punkt]*

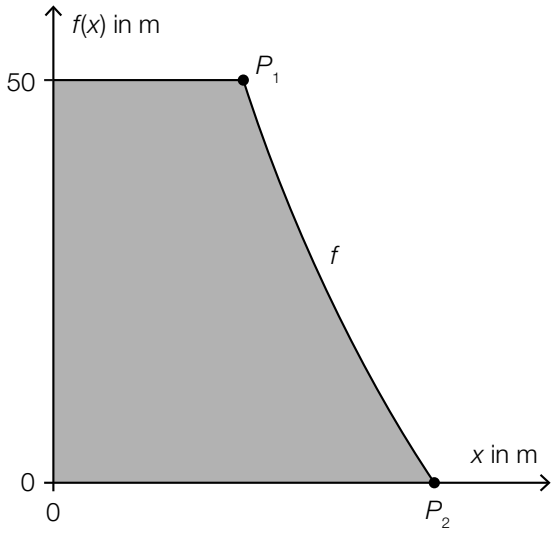
Aufgabe 10 (Teil B)

Staudamm

a) Ein Staudamm hat den unten – nicht maßstabgetreu – dargestellten Querschnitt mit den Punkten $P_1 = (10|50)$ und $P_2 = (20|0)$. Alle Angaben erfolgen in Metern. Der Verlauf zwischen den Punkten P_1 und P_2 wird durch den Graphen einer Funktion f beschrieben:

$f(x) = a + b \cdot \ln(x)$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m



1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Parameter a und b ermittelt werden können. *[1 Punkt]*

Es wurden folgende Werte für a bzw. b ermittelt:

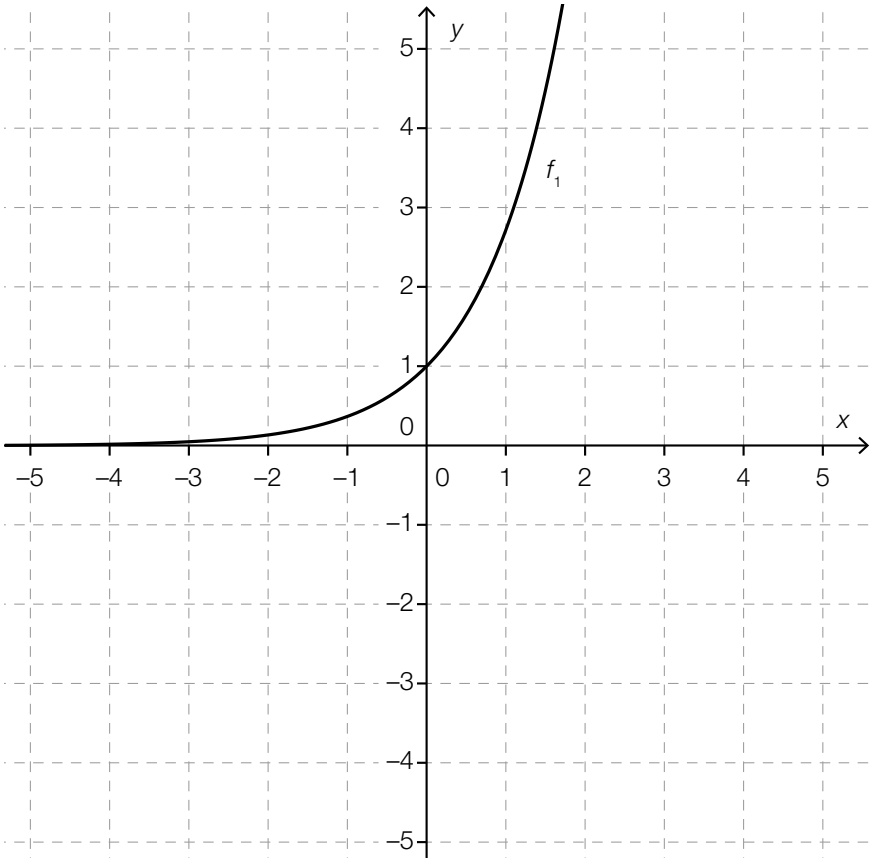
$a = 216{,}1$
$b = -72{,}1$

2) Berechnen Sie die Breite des Staudamms auf halber Höhe. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Staudamms (graue Fläche). *[2 Punkte]*

b) Im unten stehenden Diagramm ist der Graph einer Exponentialfunktion f_1 eingezeichnet.

1) Zeichnen Sie in diesem Diagramm den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion f_2 ein.
[1 Punkt]



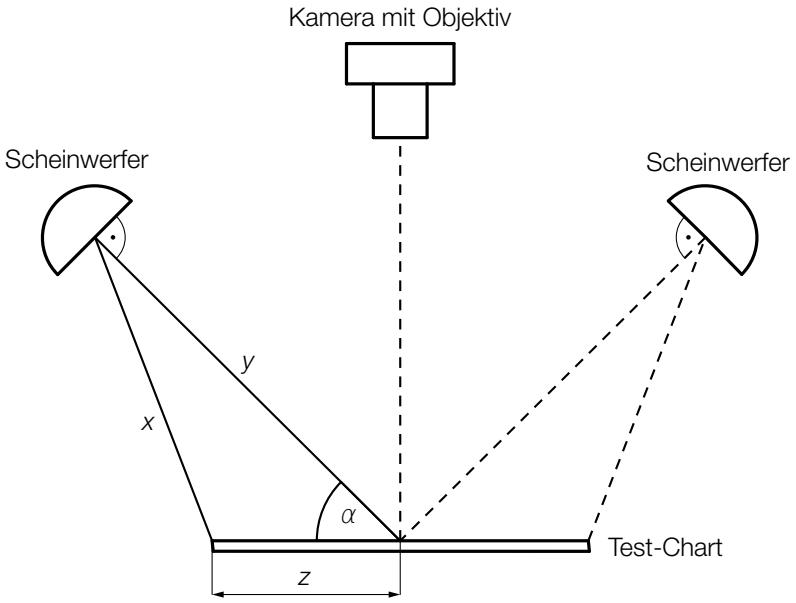
2) Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Gerade $y = x$ für den Zusammenhang der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 hat. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Qualitätstest bei Objektiven

Um das Objektiv einer Digitalkamera zu testen, fotografiert man eine genormte Tafel (Test-Chart) mit einem Test-Motiv und lässt das Foto von einer speziellen Software auswerten.

a) Eine Fotografin möchte ihr neues Objektiv testen. Dazu verwendet sie folgenden Aufbau:



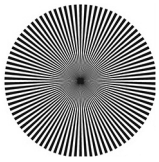
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus y, z und α.

$x =$ _____ *[1 Punkt]*

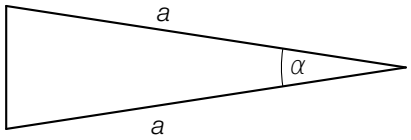
Bei einem bestimmten Test gilt:
$\alpha = 45°$
$x = 121$ cm
$z = 70$ cm

2) Berechnen Sie die Entfernung y. *[2 Punkte]*

b) Ein beliebtes Motiv für solche Test-Charts ist ein spezieller Stern:

ganzer Stern	Detailansicht
	

Ein Stern besteht aus einzelnen Abschnitten, die abwechselnd schwarz und weiß sind. Jeder dieser Abschnitte kann näherungsweise als Dreieck mit folgenden Abmessungen beschrieben werden:



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des obigen Dreiecks aus a und α.

$A =$ _____ *[1 Punkt]*

Ein ganzer Stern besteht aus n weißen und n schwarzen Abschnitten.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α aus n.

$\alpha =$ _____ *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

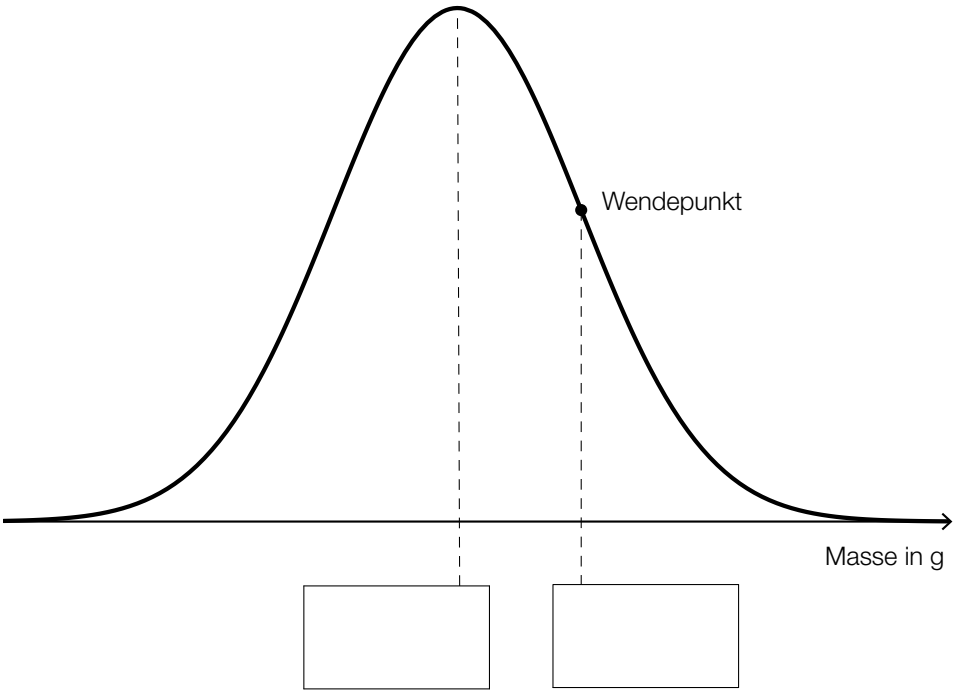
Schokoriegel

a) Schokoriegel wurden bisher in Packungen zu 5 Stück zu einem Preis von € 1,79 pro Packung verkauft. Nun werden sie in Packungen zu 6 Stück zu einem Preis von € 2,49 pro Packung verkauft.

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent ein einzelner Schokoriegel in der neuen Packung teurer ist als ein einzelner Schokoriegel in der alten Packung. *[1 Punkt]*

b) Die Masse von bestimmten Schokoriegeln ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 48 g und einer Standardabweichung von 1,3 g.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Masse eines zufällig ausgewählten Schokoriegels weniger als 45 g beträgt. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie, welche Masse ein zufällig ausgewählter Schokoriegel mindestens hat, wenn er zu den schwersten 20 % der Schokoriegel zählt. *[1 Punkt]*

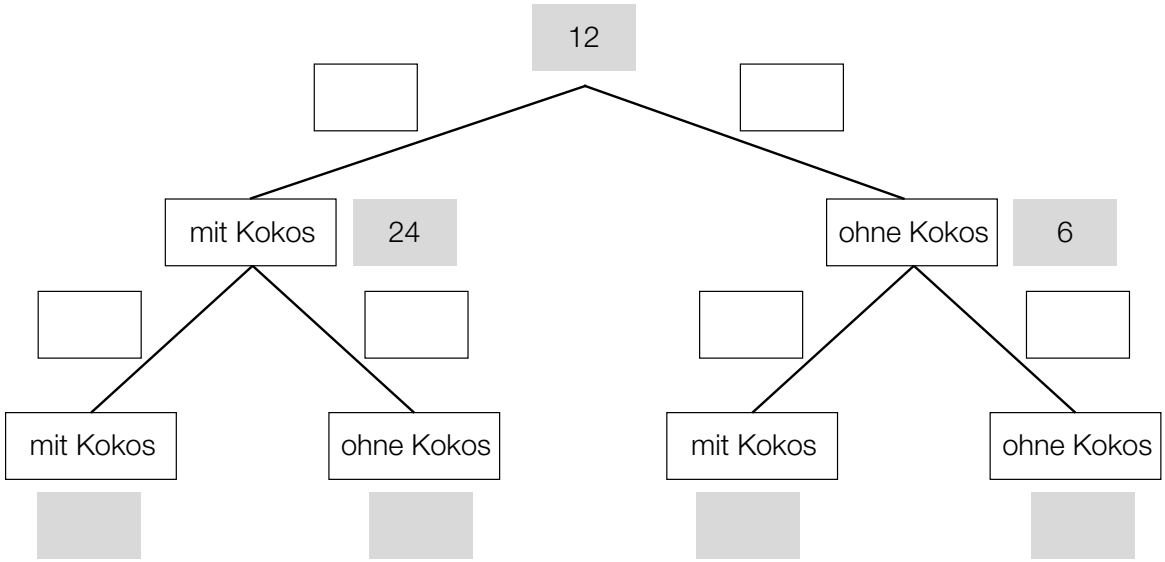
c) In einer Schale sind zwei verschiedene Sorten Schokoriegel: 5 Riegel mit Kokos, 10 Riegel ohne Kokos.

Man bietet Ihnen folgendes Spiel an:

Sie erhalten 12 Spielmünzen. Sie müssen ohne Hinsehen 2-mal hintereinander einen Schokoriegel aus der Schale ziehen und behalten. Jedes Mal, wenn Sie einen Schokoriegel mit Kokos ziehen, wird die Anzahl Ihrer Spielmünzen verdoppelt, andernfalls wird sie halbiert.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten in die weißen Kästchen ein. *[1 Punkt]*

2) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels in die grauen Kästchen ein. *[1 Punkt]*



Im Folgenden betrachtet man die Zufallsvariable X:

X … Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels

3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle alle auftretenden Werte für X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ein. *[1 Punkt]*

Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels			
Wahrscheinlichkeit			

4) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Papierflieger

a) Für die Flugeigenschaften eines Papierfliegers ist unter anderem der Strömungskoeffizient c mitbestimmend.

$$c = \frac{F_W}{\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot A}$$

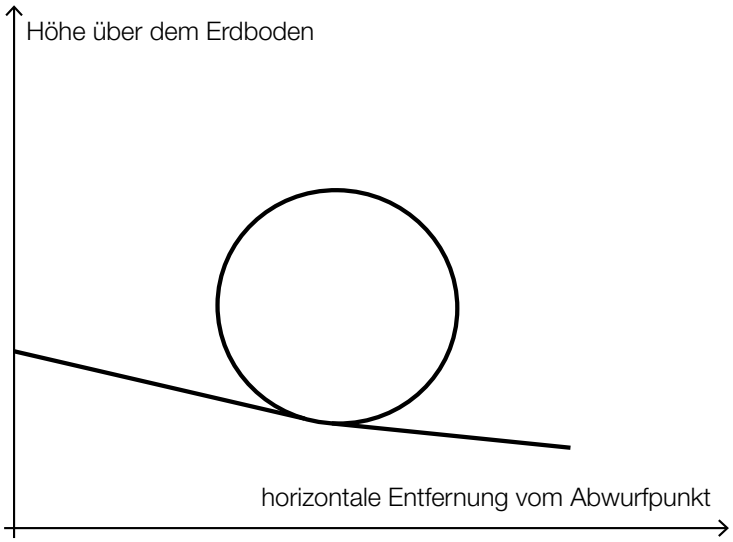
c ... Strömungskoeffizient
F_W ... Strömungswiderstand
A ... Flächeninhalt der angeströmten Fläche
v ... Strömungsgeschwindigkeit
ϱ ... Dichte der Luft

1) Formen Sie die obige Formel nach F_W um.

F_W = _____ *[1 Punkt]*

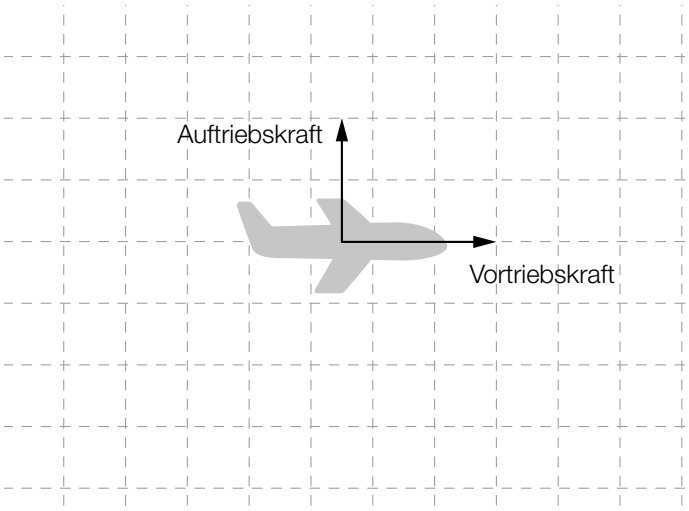
2) Beschreiben Sie, wie sich F_W verändert, wenn v verdoppelt wird und alle anderen Größen unverändert bleiben. *[1 Punkt]*

b) Im nachstehenden Diagramm ist modellhaft die Flugbahn eines Papierfliegers dargestellt, wenn dieser einen sogenannten Looping fliegt.



1) Begründen Sie, warum die dargestellte Flugbahn nicht als Funktionsgraph aufgefasst werden kann. *[1 Punkt]*

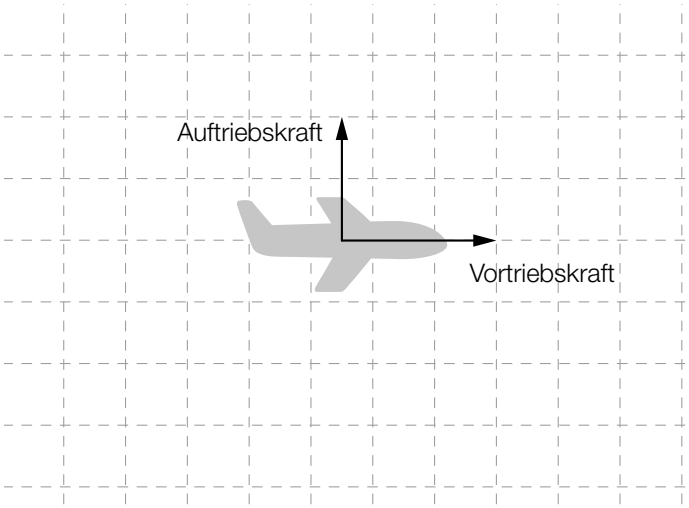
c) Bei einem angetriebenen Flugzeug wirken unter anderem die Auftriebskraft und die Vortriebskraft ein. In der nachstehenden Abbildung sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile dargestellt.



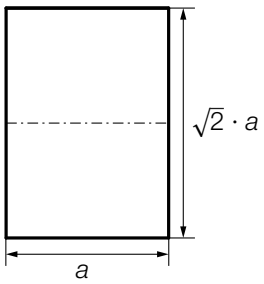
1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die aus Auftriebskraft und Vortriebskraft resultierende Kraft als Pfeil ein. *[1 Punkt]*

Bei einem angetriebenen Flugzeug gilt während einer Flugphase:
Der Strömungswiderstand ist der Gegenvektor zur Vortriebskraft.
Die Schwerkraft ist der Gegenvektor zur Auftriebskraft.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor für die Schwerkraft und den Vektor für den Strömungswiderstand als Pfeile ein. *[1 Punkt]*



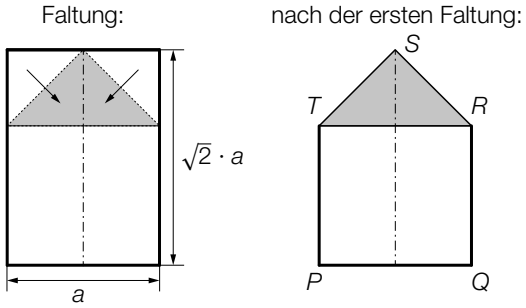
d) Zum Falten von Papierfliegern wird sehr oft Papier in einem DIN-Format verwendet. Für diese Formate gilt, dass die Seitenlängen im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen (siehe nachstehende Abbildung).



Ein solches Papier wird entlang der Blattmitte (siehe strichpunktiert eingezeichnete Linie) gefaltet.

1) Zeigen Sie, dass die Seitenlängen des dabei entstandenen Rechtecks wieder im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen. *[1 Punkt]*

In der nachstehenden Abbildung ist der erste Faltschritt für einen Papierflieger aus einem Papier in einem DIN-Format dargestellt. (Die eingezeichnete strichpunktierte Linie verläuft entlang der Mitte.)



2) Begründen Sie, warum das in der obigen Abbildung grau markierte Dreieck *RST* rechtwinkelig ist. *[1 Punkt]*

Der Papierflieger soll nach der ersten Faltung bemalt werden.

3) Erstellen Sie mithilfe von *a* eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts *A* des Fünfecks *PQRST*.

$A =$ _____ *[1 Punkt]*

Bei Papier im DIN-A4-Format ist die kürzere Seite 210 mm lang.

4) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks *PQRST* für ein Papier im DIN-A4-Format in cm^2. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Abrissbirnen

Abrissbirnen sind kugel- oder birnenförmige Werkzeuge zum Abreißen von Gebäuden.

a) Eine Abrissbirne hat die Form einer Kugel mit dem Durchmesser d. Die Masse m und die Dichte ϱ der Kugel sind bekannt. Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

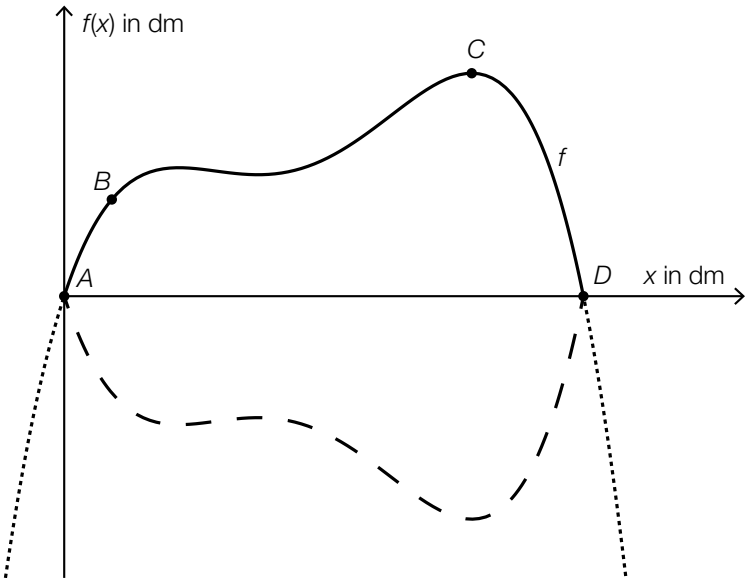
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Durchmessers d aus m und ϱ.

$d =$ _____ *[1 Punkt]*

Eine einfache Regel besagt: „Um die Masse einer Kugel zu verdoppeln, ist ihr Durchmesser um rund ein Viertel zu vergrößern."

– Zeigen Sie allgemein, dass diese Regel richtig ist. *[1 Punkt]*

b) Eine andere Abrissbirne kann als Körper modelliert werden, der durch Rotation des Graphen der Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ um die x-Achse entsteht.



Dabei gilt:
$A = (0|0)$, $B = (1{,}1|2{,}2)$, $C = (9{,}4|5{,}1)$, $D = (12|0)$
Im Punkt C hat die Abrissbirne den größten Durchmesser.

– Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A, B, C und D ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion f. *[2 Punkte]*
– Ermitteln Sie die Koeffizienten von f. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Höhe der Wolkenuntergrenze

Die Höhe der Wolkenuntergrenze kann auf verschiedene Arten näherungsweise bestimmt werden.

a) Die Höhe der Wolkenuntergrenze wurde früher mithilfe eines Nachtwolkenscheinwerfers bestimmt. Folgende Anweisung musste man dabei befolgen:

„Platzieren Sie auf einer horizontalen Ebene den Scheinwerfer in einem Punkt P so, dass sein Lichtstrahl senkrecht nach oben gerichtet ist.
Dort erzeugt er auf der Wolkenuntergrenze in der Höhe h einen punktförmigen Lichtfleck L.
Begeben Sie sich in einen anderen Punkt Q dieser Ebene und messen Sie die Streckenlänge $\overline{PQ}$.
Messen Sie den Höhenwinkel α, unter dem der Lichtfleck L nun von Punkt Q aus gesehen wird."

– Veranschaulichen Sie den beschriebenen Sachverhalt mithilfe einer Skizze. Beschriften Sie P, Q, L, h und α in dieser Skizze. *[1 Punkt]*
– Erstellen Sie eine Formel, mit deren Hilfe man die Höhe der Wolkenuntergrenze h mit den gemessenen Größen bestimmen kann.

$h =$ _____ *[1 Punkt]*

b) Ein *Ceilometer* ist ein Messgerät, mit dem man aufgrund einer Lichtlaufzeitmessung die Höhe der Wolkenuntergrenze bestimmen kann. Dabei gilt:

$$h = \frac{c \cdot t}{2}$$

h … Höhe der Wolkenuntergrenze in m
t … Lichtlaufzeit in s
$c \approx 300\,000\,000$ m/s ... Lichtgeschwindigkeit

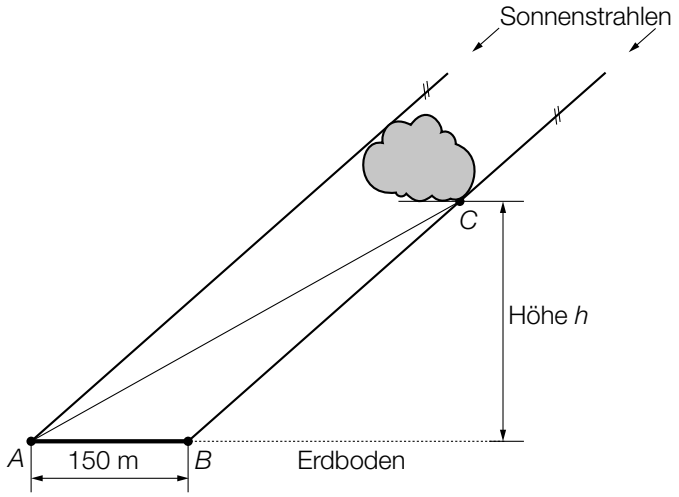
Das Gerät misst eine Lichtlaufzeit von 10 µs.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die Höhe der Wolkenuntergrenze h in Metern korrekt ermittelt wird. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$\frac{300 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{2}$	☐
$\frac{300 \cdot 10^{6} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{5}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10 \cdot 10^{9}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-5}}{2}$	☐

c) Eine Wolke wirft einen 150 m langen Schatten auf den Erdboden. Von A aus sieht man die Wolke unter dem Sehwinkel $\alpha = 4°$. Der Einfallswinkel der parallelen Sonnenstrahlen gegenüber der Horizontalen beträgt $\beta = 30°$.

Die folgende Abbildung stellt diese Situation vereinfacht und nicht maßstabgetreu dar:



– Tragen Sie die gegebenen Winkel α und β in die obige Abbildung ein. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BC}$. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die Höhe h. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Würfel

a) Das im Folgenden beschriebene Spiel wird mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.

Es werden 2 Spielwürfel gleichzeitig geworfen und es wird deren Augensumme bestimmt. Nun sollen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

– Tragen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in die nachstehende Tabelle ein.

[1 Punkt]

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit											

Es wird Ihnen nun folgendes Spiel vorgeschlagen:

Sie gewinnen, wenn die Augensumme 5, 6, 7 oder 8 beträgt.

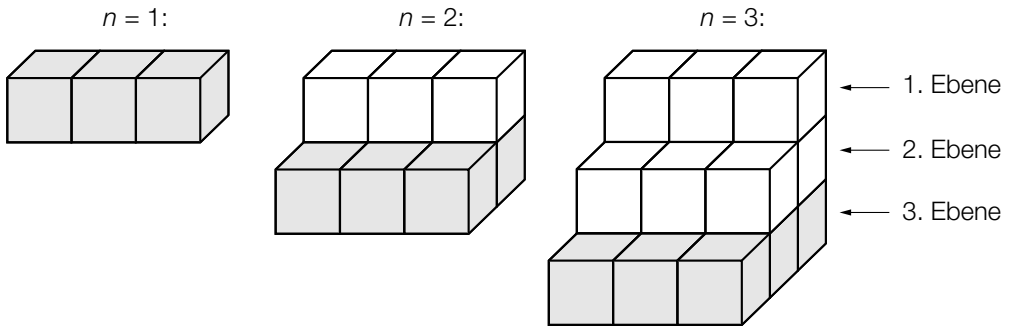
oder

Sie gewinnen mit allen übrigen Augensummen.

– Ermitteln Sie, welche der beiden Möglichkeiten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

[1 Punkt]

b) Mit Würfeln wird eine Treppe gebaut:



Das obige Bauschema soll auf diese Art fortgesetzt werden.

– Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Anzahl der Würfel in der n-ten Ebene berechnen kann. *[1 Punkt]*
– Bestimmen Sie, wie viele Würfel in der 7. Ebene liegen. *[1 Punkt]*

Die Anzahl s_n der Würfel, die für eine solche Treppe aus n Ebenen insgesamt benötigt wird, kann mithilfe der folgenden Formel bestimmt werden:

$s_n = 1{,}5 \cdot (n^2 + n)$

– Berechnen Sie, aus wie vielen Ebenen eine solche Treppe besteht, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut. *[1 Punkt]*

Aufgabe 10 (Teil B)

Wiener Öffis

Wien betreibt das fünftgrößte Straßenbahnnetz weltweit und das fünftgrößte U-Bahn-Netz in der Europäischen Union. Seit 1995 steigt die Zahl der Passagiere ständig an.

a)

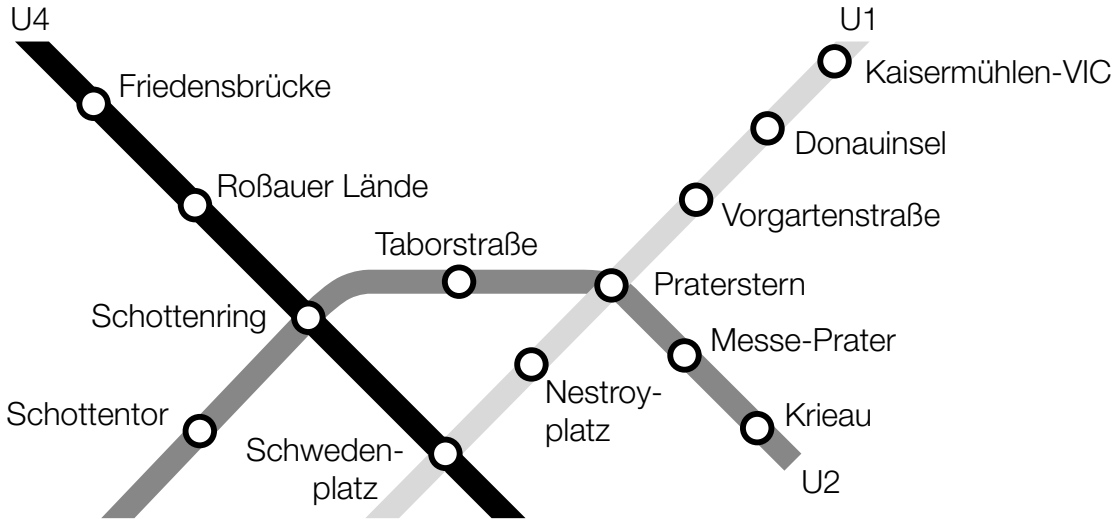
Jahr	2002	2005	2008	2011
Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen	722,4	746,8	803,7	875,0

– Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:
$\frac{875{,}0 - 722{,}4}{722{,}4} \approx 0{,}21$ *[1 Punkt]*

Es wird angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Zeit t in Jahren und der Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen pro Jahr näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

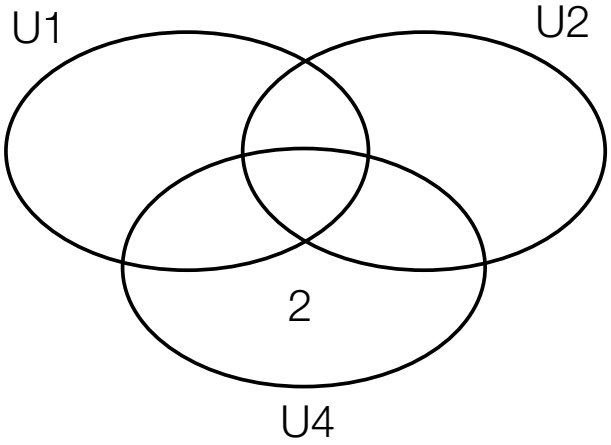
– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018. *[1 Punkt]*

b) Im Folgenden ist ein kleiner Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes abgebildet:



Die Mengen der Haltestellen der Linien U1, U2 und U4, die in diesem Ausschnitt dargestellt sind, werden mit U1, U2 bzw. U4 bezeichnet.

– Tragen Sie in jeden Teilbereich des nachstehenden Diagramms die entsprechende Anzahl an Haltestellen für den abgebildeten Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes ein. *[1 Punkt]*



– Geben Sie die Namen derjenigen Haltestellen an, die in der folgenden Menge liegen:
$U1 \setminus (U2 \cup U4)$ *[1 Punkt]*

Aus dem abgebildeten Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes wird eine Haltestelle zufällig ausgewählt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um eine Haltestelle handelt, die an mehr als einer U-Bahn-Linie liegt. *[1 Punkt]*