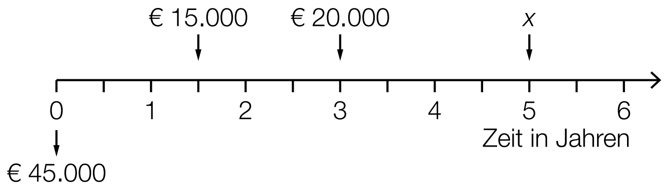
Aufgabe 7 (Teil B)

Almhütte

Ein Hüttenwirt möchte seine Gästezimmer renovieren. Für die Finanzierung der Renovierung benötigt er einen Kredit in Höhe von € 45.000 und holt Angebote bei verschiedenen Banken ein.

a) Die Bank A bietet dem Hüttenwirt einen Kredit mit einer Laufzeit von 5 Jahren bei einem Semesterzinssatz von 4,5 % p.s. an.
Die nachstehende Zeitachse stellt eine Rückzahlungsvariante dieses Kredits dar.



Die oben dargestellte Rückzahlungsvariante soll als Gleichung angeschrieben werden.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$45000 \cdot 1{,}045^{10} = 15000 \cdot 1{,}045^{\square} + 20000 \cdot 1{,}045^{\square} + x$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den zu 4,5 % p.s. äquivalenten Jahreszinssatz. *[0/1 P.]*

b) Die Bank B bietet dem Hüttenwirt einen Kredit in Höhe von € 45.000 bei einem Monatszinssatz von 0,74 % p.m. an.

Der Kredit soll in 4 Jahren durch monatliche nachschüssige Annuitäten gleicher Höhe getilgt werden.

1) Berechnen Sie die Höhe der monatlichen Annuität. *[0/1 P.]*

Der Hüttenwirt kann allerdings nur € 800 monatlich zurückzahlen.

2) Vervollständigen Sie im nachstehenden Tilgungsplan die Zeile für den Monat 1. *[0/1 P.]*

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	–––	–––	–––	€ 45.000
1			€ 800	

c) Die Bank C legt dem Hüttenwirt als Angebot für den Kredit in Höhe von € 45.000 einen Tilgungsplan vor. In der nachstehenden Tabelle ist der unvollständige Tilgungsplan für das Quartal 1 angegeben.

Quartal	Zinsanteil	Tilgungsanteil	vierteljährliche Annuität	Restschuld
0	–––	–––	–––	€ 45.000
1	€ 900		A	K_1

1) Stellen Sie mithilfe von A eine Formel zur Berechnung von K_1 auf.

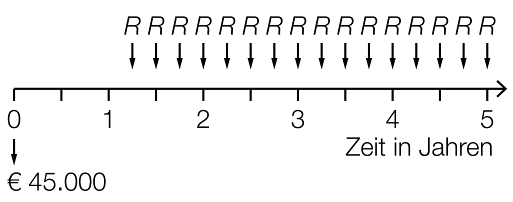
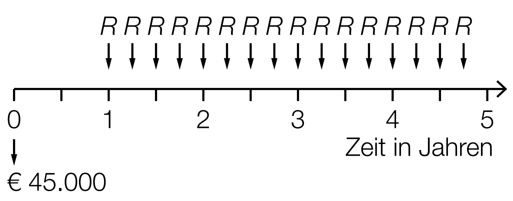
K_1 = ____ *[0/1 P.]*

d) Der Hüttenwirt vergleicht die Angebote von zwei weiteren Banken für den Kredit in Höhe von € 45.000. Bei beiden Angeboten beträgt der Quartalszinssatz 2 % p.q.

In den unten stehenden Abbildungen sind die Rückzahlungen für diese zwei Angebote jeweils auf einer Zeitachse dargestellt.

1) Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu.

[0/1 P.]

	☐
	☐

A	$45\,000 = R \cdot \frac{1{,}02^{16} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^{15}}$
B	$45\,000 = R \cdot \frac{1{,}02^{16} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^{17}}$
C	$45\,000 = R \cdot \frac{1{,}02^{16} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^{19}}$
D	$45\,000 = R \cdot \frac{1{,}02^{16} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^{20}}$

Aufgabe 8 (Teil B)

Drucker

Ein Unternehmen produziert und verkauft Drucker.

a) Für ein bestimmtes Druckermodell wurde die Kostenfunktion K ermittelt:

$$K(x) = 2 \cdot x^3 - 30 \cdot x^2 + 187 \cdot x + 1\,000$$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze. *[0/1 P.]*

b) Das Unternehmen produziert ein weiteres Druckermodell. Es geht für dieses Druckermodell von der Kostenfunktion K aus.

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die entsprechende Gleichung aus A bis D zu (für alle möglichen Werte von a, b, c und d). *[0/1 P.]*

Die Kostenkehre liegt bei 4 ME.	☐
Die Grenzkosten bei 4 ME betragen 1 GE/ME.	☐

A	$48 \cdot a + 8 \cdot b + c = 1$
B	$6 \cdot a + 2 \cdot b = 4$
C	$64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d = 1$
D	$24 \cdot a + 2 \cdot b = 0$

c) Das Unternehmen produziert und verkauft ein weiteres Druckermodell. Es geht für dieses Druckermodell von der Gewinnfunktion G aus.

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

_____①_____ entspricht einer Lösung der Gleichung _____②_____.

①	
Diejenige Absatzmenge in ME, bei der der maximale Gewinn erzielt wird,	☐
Der Cournot'sche Preis in GE/ME	☐
Der maximale Gewinn in GE	☐

②	
$G(x) = 0$	☐
$G'(x) = 0$	☐
$G''(x) = 0$	☐

d) Das Unternehmen produziert und verkauft auch 3-D-Drucker.
Für die Kostenfunktion K und für die Gewinnfunktion G gilt:

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^3 - 5{,}6 \cdot x^2 + 1125 \cdot x + 20000$
$G(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 4{,}4 \cdot x^2 - 225 \cdot x - 20000$

x ... Absatzmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Absatzmenge x in GE
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage p_N durch Eintragen der fehlenden Zahlen.

$p_N(x) = \boxed{} \cdot x + \boxed{}$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis für diese 3-D-Drucker. *[0/1 P.]*

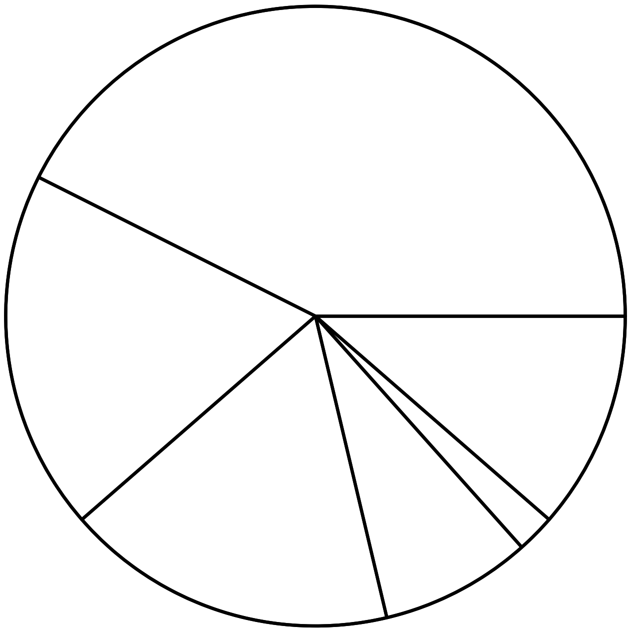
e) Das Unternehmen führt eine Marktanalyse durch.

In der nachstehenden Tabelle sind die weltweiten Marktanteile von Unternehmen, die Drucker verkaufen, für das 2. Quartal 2019 angegeben.

Unternehmen	HP Inc.	Canon Group	Epson	Brother	Kyocera Group	andere Unternehmen
Marktanteil	42,6 %	18,8 %	17,3 %	7,9 %	2 %	11,4 %

Datenquelle: https://www.druckerchannel.de/artikel.php?ID=4135&t=marktzahlen_2019_zweites_quartal [05.09.2022].

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Kreisdiagramm denjenigen Sektor, der dem Marktanteil von Epson entspricht. *[0/1 P.]*

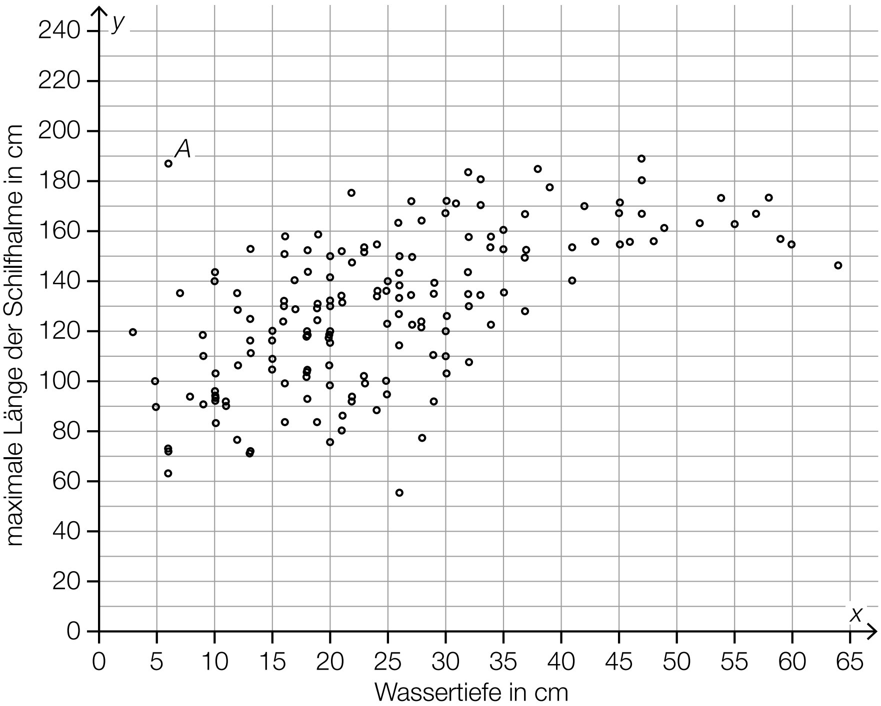


Aufgabe 9 (Teil B)

Schilf

Schilf ist eine Pflanze, die häufig im Uferbereich von Gewässern vorkommt. Die röhrenförmigen Stängel werden als *Schilfhalme* bezeichnet.

a) An verschiedenen Standorten von Schilf wurden die Wassertiefe und die maximale Länge der Schilfhalme gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Abbildung als Punktwolke dargestellt.



Es wurde dazu folgende Regressionsgerade ermittelt:

$y = 1{,}4 \cdot x + 94$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diese Regressionsgerade ein. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie diejenige Zahl an, die als Korrelationskoeffizient für den dargestellten Zusammenhang infrage kommt. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

−0,4	☐
0	☐
0,6	☐
1	☐
1,4	☐

Um die Gleichung der Regressionsgeraden zu ermitteln, wird das arithmetische Mittel aller x-Koordinaten der Punkte berechnet.

In der obigen Abbildung sind 161 Punkte eingezeichnet, das arithmetische Mittel ihrer x-Koordinaten wird mit $\overline{x}$ bezeichnet.
Der mit A bezeichnete Punkt hat die x-Koordinate $x = 6$. Für eine weitere Analyse soll dieser Punkt entfernt werden. Es soll das arithmetische Mittel $\overline{x}_{\text{neu}}$ der x-Koordinaten aller verbliebenen 160 Punkte berechnet werden.

3) Stellen Sie mithilfe von $\overline{x}$ eine Formel zur Berechnung von $\overline{x}_{\text{neu}}$ auf.

$\overline{x}_{\text{neu}} =$ ______________________ *[0/1 P.]*

b) An einem bestimmten Standort ist der Durchmesser der Schilfhalme annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 4,3 cm. Ein Viertel dieser Schilfhalme hat einen Durchmesser von mehr als 5 cm.

1) Argumentieren Sie, dass ein Viertel dieser Schilfhalme einen Durchmesser von weniger als 3,6 cm hat. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. *[0/1 P.]*

c) Die mit Schilf bewachsene Fläche im Uferbereich des Neusiedler Sees ist seit dem Jahr 1900 immer größer geworden.
Der Inhalt dieser Fläche kann näherungsweise durch die logistische Funktion S beschrieben werden.

$$S(t) = \frac{185}{1 + 1{,}15 \cdot 0{,}96^t}$$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1900
$S(t)$ … Inhalt der zur Zeit t mit Schilf bewachsenen Fläche in km^2

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Satz durch Eintragen der fehlenden Zahl.

Mit zunehmender Zeitdauer nähert sich der Inhalt der mit Schilf bewachsenen Fläche dem

Wert __________ km^2 beliebig nahe an. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Handcreme

Ein Unternehmen produziert verschiedene Handcremen.

a) Von der Nachfrage nach Handcremen der Marke *Hand Aktiv* ist bekannt:

Bei einem Preis von 4,2 GE/ME werden 500 ME nachgefragt.
Wird der Preis auf 3,2 GE/ME gesenkt, so verdoppelt sich die nachgefragte Menge.

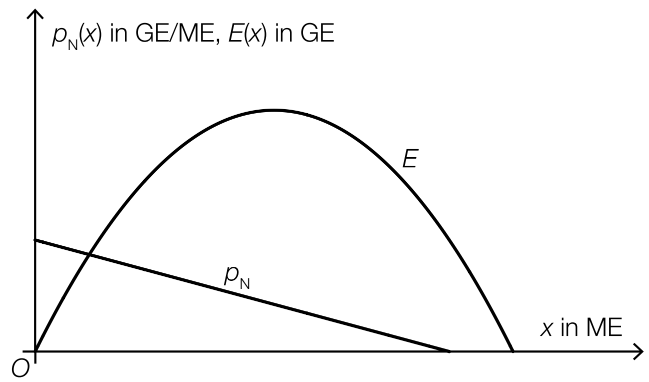
Der Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge und dem Preis soll durch die lineare Preisfunktion der Nachfrage p_N beschrieben werden.

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion p_N auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[0/1 P.]*

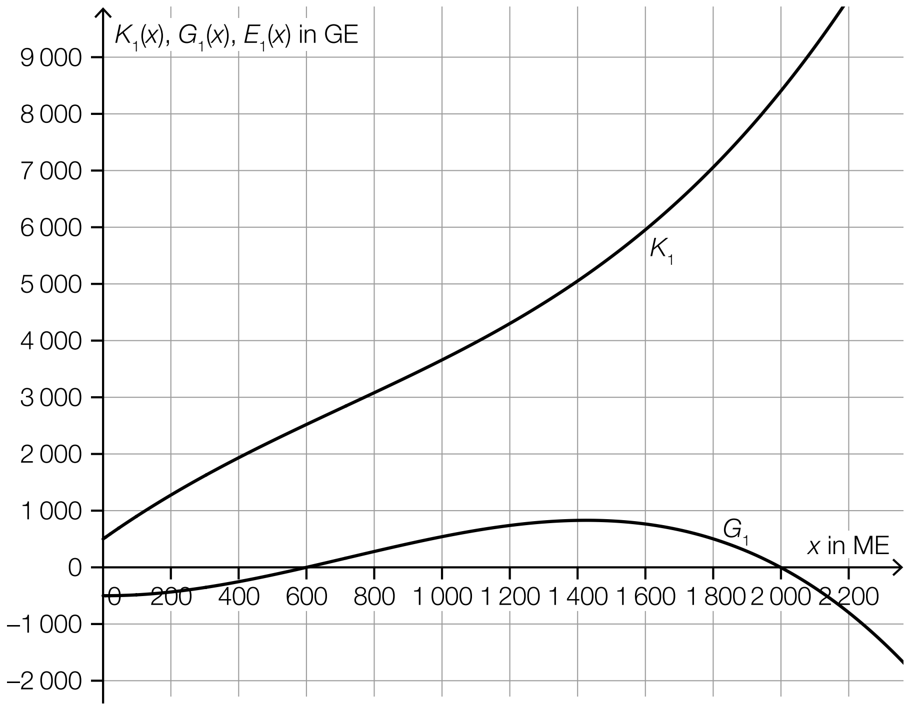
In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p_N und der Graph einer Funktion E dargestellt.



3) Begründen Sie, warum E <u>nicht</u> die zu p_N passende Erlösfunktion sein kann. *[0/1 P.]*

b) Die Handcreme *Kamille Classic* wird zu einem fixen Preis verkauft.

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Kostenfunktion K_1 und der Gewinnfunktion G_1 dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E_1 ein. *[0/1 P.]*

c) Für die Grenzkostenfunktion K_2' bei der Produktion der Handcreme *Handrepair* gilt:

$K_2'(x) = 0{,}0003 \cdot x^2 + b \cdot x + 40$

x ... Produktionsmenge in ME
$K_2'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Die Fixkosten betragen 500 GE.

1) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K_2 die fehlenden Zahlen ein.

$K_2(x) = \boxed{} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2 + \boxed{} \cdot x + \boxed{}$ *[0/1 P.]*

Bei der Produktion von 100 ME betragen die Gesamtkosten 3 600 GE.

2) Berechnen Sie b. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Neuwagen

a) Lorena möchte einen Neuwagen um € 20.000 kaufen. Sie hat dafür auf einem Sparbuch einen Betrag von € 18.500 angespart. Der Zinssatz beträgt 2,1 % p. a.

1) Berechnen Sie, wie lange dieser Betrag auf dem Sparbuch veranlagt werden müsste, um einen Wert von € 20.000 zu erreichen. *[0/1 P.]*

Bei einer anderen Veranlagung werden Lorena die Jahreszinssätze i und j angeboten. Dabei gilt:

$$18\,500 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + j)^{m-n} = 20\,000 \quad \text{mit} \quad m \geq n > 0$$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von m im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

b) Mario hat vor 6 Jahren ein Konto eröffnet, um für einen Neuwagen zu sparen. Er zahlte 4 Jahre lang nachschüssige Quartalsraten auf dieses Konto ein. Die restlichen 2 Jahre tätigte er keine Einzahlungen mehr.

R ... Höhe der nachschüssigen Quartalsraten
i_4 ... Quartalszinssatz
q_4 ... vierteljährlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie die zwei fehlenden Hochzahlen in der nachstehenden Formel zur Berechnung des heutigen Kontostands K ein.

$$K = R \cdot \frac{q_4^{\boxed{}} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4^{\boxed{}}$$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie R für $K = € 6.916{,}22$ und $i_4 = 0{,}5\ \%$. *[0/1 P.]*

c) Helena erhält von einem Autohändler ein Zahlungsangebot für einen Neuwagen mit einem Kaufpreis von € 20.990. Dieses Zahlungsangebot kann durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden.

$$20\,990 \cdot q_{12}^{36} = 5\,200 \cdot q_{12}^{36} + 220 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} + 9\,870$$

q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die Höhe der Zahlung nach 1 Monat und die Höhe der Zahlung nach 36 Monaten ein. *[0/1 P.]*

Zeit in Monaten	Höhe der Zahlung in €
0	5 200
1	
...	...
36	

Helena will auch noch andere Zahlungsangebote des Autohändlers vergleichen. Dabei muss sie den gegebenen positiven Quartalszinssatz i_4 in den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} umrechnen.

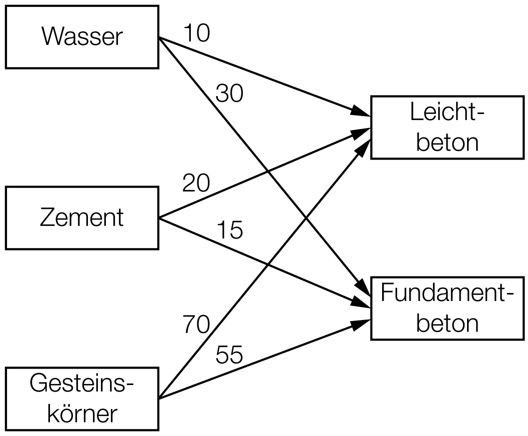
2) Kreuzen Sie die richtige Umrechnung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$i_{12} = \sqrt[4]{1 + i_4} - 1$	☐
$i_{12} = (1 + i_4)^{\frac{1}{3}} - 1$	☐
$i_{12} = (1 + i_4)^4 - 1$	☐
$i_{12} = \sqrt[3]{1 + i_4}$	☐
$i_{12} = \frac{i_4}{3}$	☐

Aufgabe 9 (Teil B)

Beton

a) Für die Herstellung von Leichtbeton und Fundamentbeton werden Wasser, Zement und Gesteinskörner benötigt. Der Bedarf an diesen 3 Rohstoffen ist im nachstehenden Gozinto-Graphen dargestellt (Wasser und Gesteinskörner in L, Zement in kg, Leichtbeton und Fundamentbeton in ME).



1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Satz durch Eintragen der richtigen Zahl.

   Für die Herstellung von 1 ME Leichtbeton und 2 ME Fundamentbeton werden insgesamt

   __________ kg Zement benötigt. *[0/1 P.]*

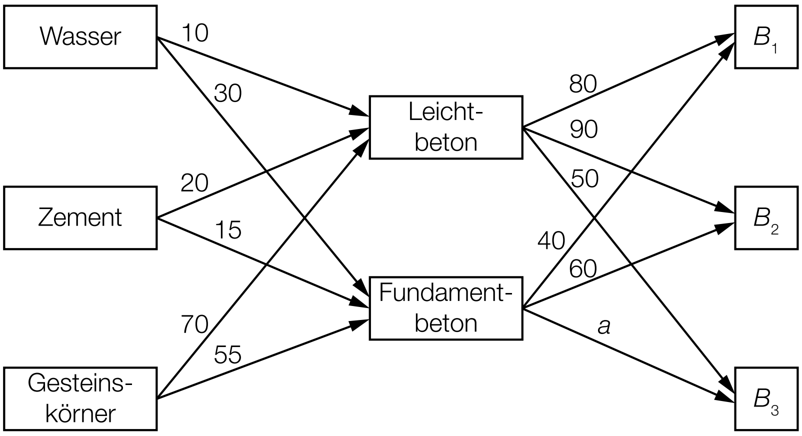
Die 3×2-Matrix ***R*** beschreibt den Bedarf an den 3 Rohstoffen für die Herstellung von jeweils 1 ME der beiden Betonsorten.

2) Ermitteln Sie die Matrix ***R***. *[0/1 P.]*

Für eine Baustelle werden 50 ME Leichtbeton und 30 ME Fundamentbeton bestellt.

3) Ermitteln Sie den Mengenbedarf an den 3 Rohstoffen für diese Bestellung. *[0/1 P.]*

Im erweiterten Gozinto-Graphen (siehe nachstehende Abbildung) ist auch der Bedarf an Leichtbeton und Fundamentbeton für die 3 Baustellen B_1, B_2 und B_3 dargestellt.



Die Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt den Bedarf an Rohstoffen für die 3 Baustellen B_1, B_2 und B_3.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2\,000 & 2\,700 & 1\,340 \\ 2200 & 2\,700 & 1\,420 \\ 7\,800 & 9\,600 & 5\,040 \end{pmatrix}$$

4) Ermitteln Sie die Mengenangabe a. *[0/1 P.]*

b) Ein Bauunternehmen möchte ein Förderband anschaffen. Die Anschaffungskosten betragen € 28.000. Als Nutzungsdauer werden 7 Jahre angenommen.
Das Bauunternehmen erwartet durch diese Investition jährliche Einnahmen in Höhe von € 5.000. Jeweils nach 2 Jahren entstehen Wartungskosten in Höhe von € 1.000. Am Ende der Nutzungsdauer beträgt der Liquidationserlös € 3.000.

1) Übertragen Sie die Einnahmen und Ausgaben für die gesamte Nutzungsdauer in die nachstehende Tabelle. *[0/1 P.]*

Zeit nach der Anschaffung in Jahren	Einnahmen in €	Ausgaben in €
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Das Bauunternehmen rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 3 % p.a.

2) Berechnen Sie den Kapitalwert der Investition. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Bauteile

In einem Betrieb werden verschiedene Bauteile hergestellt.

a) Die Kostenfunktion K für das Bauteil A ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

x ... produzierte Menge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Menge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Der Graph der Grenzkostenfunktion und der Graph der Stückkostenfunktion schneiden einander bei 10 ME.	
Die Stückkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 10 GE/ME.	

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

b) Für die Kostenfunktion K und die Gewinnfunktion G für das Bauteil B gilt im Intervall [0; 25]:

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 700 \cdot x + 6000$
$G(x) = -40 \cdot x^2 + 1200 \cdot x - 6000$

x ... produzierte und verkaufte Menge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Menge x in GE
$G(x)$ ... Gewinn bei der Menge x in GE

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall der Produktionsmenge, in dem die Grenzkosten maximal 700 GE/ME betragen. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsminimum ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 0$	☐
$12 \cdot x - 120 = 0$	☐
$2 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 700 = 0$	☐
$4 \cdot x - 60 = 0$	☐
$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x = 0$	☐

Für die Produktion des Bauteils B gilt:

1 ME = 10 000 Stück
1 GE = 100 Euro

Es wird genau diejenige Menge produziert, bei der der Gewinn maximal ist.

3) Berechnen Sie den Gewinn pro Stück bei dieser Menge. Geben Sie das Ergebnis in Euro/Stück an. *[0/1 P.]*

Für die zugehörige Erlösfunktion E gilt: $E(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$

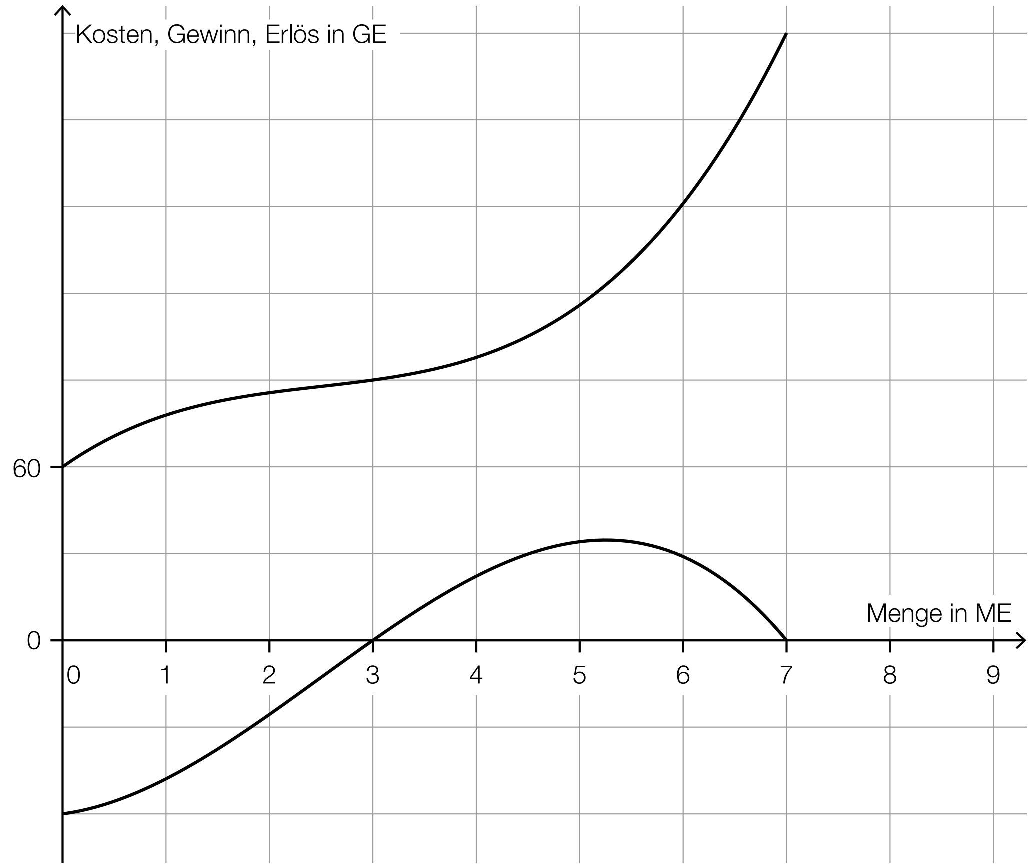
4) Ermitteln Sie die Parameter a, b und c. *[0/1 P.]*

a = ____________________

b = ____________________

c = ____________________

c) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion und der Graph der Gewinnfunktion für das Bauteil C dargestellt.



Die zugehörige Erlösfunktion ist linear.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion ein. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem das Bauteil C verkauft wird. *[0/1 P.]*

d) Für die Preis-Absatz-Funktion für das Bauteil D gilt:

$$p(x) = p_H - 20 \cdot x$$

x ... abgesetzte Menge in ME
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in GE/ME
p_H ... Höchstpreis in GE/ME

Der Preis bei einem Verkauf von 5 ME beträgt 300 GE/ME.

1) Berechnen Sie den Höchstpreis p_H. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Preis-Absatz-Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Swimmingpool

a) Lea möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür über einen Zeitraum von 5 Jahren bei einem konstanten Jahreszinssatz 4 Einzahlungen Z auf ein Konto getätigt und so bis heute € 2.468,39 gespart.

Dabei gilt:

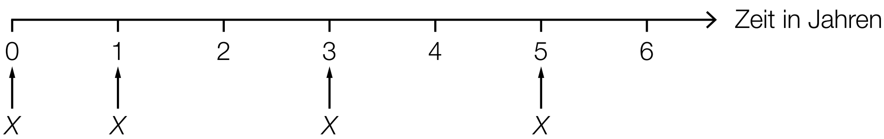
$Z + Z \cdot 1{,}0102^2 + Z \cdot 1{,}0102^4 + Z \cdot 1{,}0102^5 = 2\,468{,}39$

1) Lesen Sie den Jahreszinssatz i ab.

$i =$ ____________________ % p. a. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Höhe von Z. *[0/1 P.]*

b) Melisa möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür 4 Einzahlungen X auf ein Konto getätigt (siehe nachstehende Zeitachse).



Für verschiedene Zeitpunkte soll der Wert dieser Einzahlungen berechnet werden.
Der jährliche Aufzinsungsfaktor wird mit q bezeichnet.

1) Ordnen Sie den beiden Werten jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 1	
Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 3	

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

c) Konstantin möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf, den er durch 120 Monatsraten in Höhe von jeweils € 198,71 zurückzahlen möchte. Die 1. Zahlung erfolgt 1 Monat nach Auszahlung des Kredits.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz für diesen Kredit. *[0/1 P.]*

d) Simon möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit auf, den er durch nachschüssige monatliche Annuitäten bei einem Monatszinssatz i_{12} zurückzahlen soll.
Die Höhe der monatlichen Annuitäten ändert sich dabei.

In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
12				€ 6.766,03
13				€ 6.492,13
14				€ 6.492,13
15			A_{15}	€ 6.217,55

1) Geben Sie denjenigen Monat an, in dem der Tilgungsanteil € 0 beträgt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von A_{15} auf.
Verwenden Sie dabei i_{12} sowie die Werte für die Restschuld im Monat 14 und im Monat 15.

A_{15} = ____ *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Kraftfahrzeug-Bestand

a) In der nachstehenden Tabelle ist der Kraftfahrzeug-Bestand in Österreich für ausgewählte Jahre angegeben.

Ende des Jahres ...	Kraftfahrzeug-Bestand in Millionen Stück
2008	5,87
2010	6,09
2012	6,30
2014	6,47
2016	6,65
2018	6,90

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/strasse/kraftfahrzeuge_-_bestand/index.html [21.10.2020].

Mit den Zahlen aus der obigen Tabelle wird die nachstehende Berechnung durchgeführt.

$$\frac{6{,}9 - 6{,}3}{6{,}3} \approx 0{,}095$$

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Der Kraftfahrzeug-Bestand soll in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die lineare Funktion K beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Ende des Jahres 2008
$K(t)$ ... Kraftfahrzeug-Bestand zur Zeit t in Millionen Stück

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser linearen Funktion K auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Ende des Jahres 2008. *[0/1 P.]*
3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von K im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Die Funktionswerte weichen von den Tabellenwerten des Kraftfahrzeug-Bestands ab.

4) Berechnen Sie diese absolute Abweichung für das Jahr 2018. *[0/1 P.]*

b) Die zeitliche Entwicklung des Diesel-PKW-Bestands in Österreich kann modellhaft durch die logistische Funktion D beschrieben werden.

$$D(t) = \frac{2{,}84}{1 + 277 \cdot e^{-0{,}19 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Ende des Jahres 1970
$D(t)$ ... Diesel-PKW-Bestand zur Zeit t in Millionen Stück

1) Ermitteln Sie mithilfe von D den prognostizierten Wert für den Diesel-PKW-Bestand am Ende des Jahres 2025.

______________________ Millionen Stück *[0/1 P.]*

Für die allgemeine Form einer logistischen Wachstumsfunktion f gilt:

$$f(t) = \frac{a}{b + c \cdot d^t}$$

a, b, c, d ... positive Parameter
$0 < d < 1$

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, dem sich die Funktionswerte von f mit wachsendem t in jedem Fall annähern. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\frac{a}{b}$	☐
$\frac{a}{c}$	☐
$\frac{a}{c \cdot d}$	☐
$\frac{a}{b + c}$	☐
$\frac{a}{b + c \cdot d}$	☐

c) Der Elektro-PKW-Bestand ist in den letzten Jahren stark gestiegen. In der nachstehenden Tabelle sind für ausgewählte Jahre die prozentuellen Änderungen des Elektro-PKW-Bestands jeweils am Ende eines Jahres gegenüber dem Ende des jeweiligen Vorjahres angegeben (Werte gerundet).

Ende des Jahres ...	2015	2016	2017	2018
Änderung gegenüber dem Ende des Vorjahres	+49 %	+80 %	+61 %	+43 %

1) Berechnen Sie die mittlere jährliche prozentuelle Änderung des Elektro-PKW-Bestands für den Zeitraum vom Anfang des Jahres 2015 bis zum Ende des Jahres 2018. *[0/1 P.]*

Am Ende des Jahres 2018 betrug der Elektro-PKW-Bestand E Stück.
Am Ende des Jahres 2017 betrug der Elektro-PKW-Bestand X Stück.

2) Stellen Sie mithilfe von E eine Formel zur Berechnung von X auf.

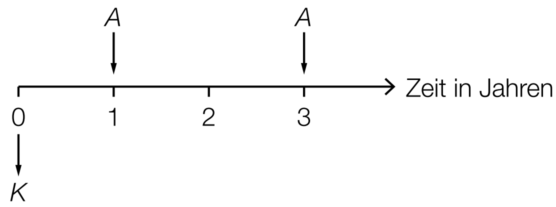
X = ______________________________ *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Tischlerei

a) Für den Kauf einer Sägemaschine wird der Kreditbetrag K aufgenommen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

Der Kredit wird durch zwei gleich hohe Zahlungen A getilgt (siehe nachstehende Zeitachse).



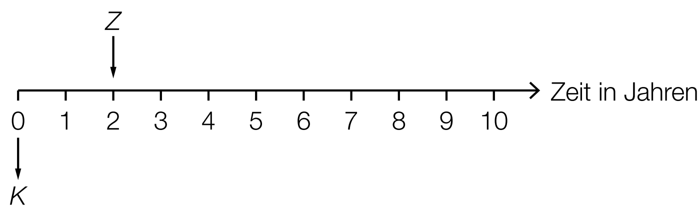
1) Stellen Sie mithilfe von K eine Formel für A auf.

A = ______________________________ [0/1 P.]

Alternativ kann der Kreditbetrag K durch eine Einmalzahlung Z und 5 jährliche Raten R zurückgezahlt werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

Es gilt: $K \cdot 1{,}02^3 = Z \cdot 1{,}02 + R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^5}$

Der Kreditbetrag K und die Einmalzahlung Z sind auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



2) Zeichnen Sie auf der obigen Zeitachse die Raten R ein. [0/1 P.]

3) Berechnen Sie R für K = € 60.000 und Z = € 20.000. [0/1 P.]

b) Eine Schleifmaschine wird um den Betrag S gekauft. Die Bezahlung erfolgt mit den Beträgen B_1 und B_2.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$

q ... monatlicher Aufzinsungsfaktor ($q > 1$)

Alternativ könnte die Zahlung auch mit den Beträgen B_1 und B_3 erfolgen.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_3 \cdot q^{-3}$

1) Argumentieren Sie, dass B_3 kleiner als B_2 ist. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die <u>nicht</u> zur Gleichung $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$ äquivalent ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$S \cdot q^{10} = B_1 \cdot q^5 + B_2 \cdot q^3$	☐
$S \cdot q^7 = B_1 \cdot q^2 + B_2$	☐
$S \cdot q^6 = B_1 \cdot q + B_2 \cdot q^{-1}$	☐
$S \cdot q^5 = B_1 + B_2 \cdot q^{-2}$	☐
$S \cdot q^2 = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-3}$	☐

c) Für den Kauf einer Fräsmaschine wird ein Kredit in Höhe von € 45.000 aufgenommen. Dieser Kredit wird durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von je € 3.500 und eine Restzahlung getilgt. Der Semesterzinssatz beträgt 0,8 %.

Für die Rückzahlung des Kredits wurde der nachstehende Tilgungsplan erstellt.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 360	€ 3.140	€ 3.500	

1) Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das Semester 1. *[0/1 P.]*

Es werden 13 nachschüssige Semesterraten gezahlt. Ein Semester nach Zahlung der letzten Semesterrate wird der Kredit durch eine Restzahlung vollständig getilgt.

2) Vervollständigen Sie im nachstehenden Tilgungsplan die Zeilen für die Semester 13 und 14. *[0/1 P.]*

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
13	€ 44,94	€ 3.455,06	€ 3.500,00	
14	€ 17,30			€ 0,00

Für eine alternative Rückzahlung wird folgende Berechnung durchgeführt:

$\sqrt[6]{1{,}008} - 1 \approx 0{,}0013$

3) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

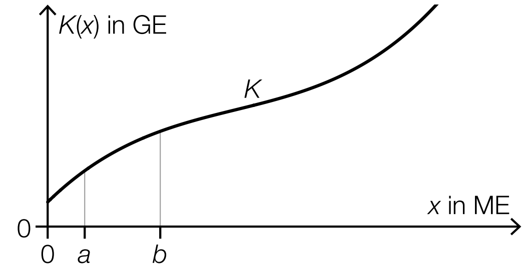
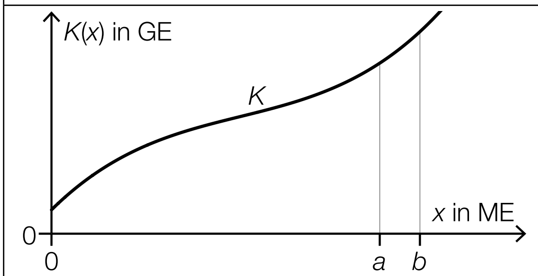
Aufgabe 7 (Teil B)

Fahrradhelme

a) In den zwei unten stehenden Abbildungen ist jeweils der Graph der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Green Protection* dargestellt.

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

A	Die Gesamtkosten sind bei a ME höher als bei b ME.
B	Die Grenzkosten sind bei a ME geringer als bei b ME.
C	Die Kostenkehre liegt zwischen a ME und b ME.
D	Die Durchschnittskosten sind bei a ME höher als bei b ME.

Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}4 \cdot x + 18$

Bei einer Produktion von 40 ME betragen die Gesamtkosten 664 GE.

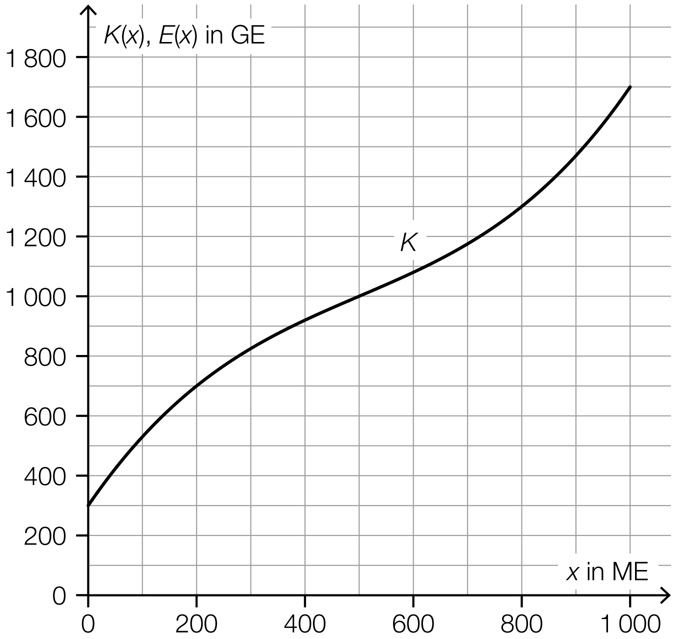
2) Berechnen Sie die Fixkosten. *[0/1 P.]*

b) Für die Erlösfunktion E für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* gilt:

$E(x) = -0{,}0045 \cdot x^2 + 5{,}45 \cdot x$

x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E im Intervall [0; 1 000] ein. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Gewinn bei einem Absatz von 500 ME. *[0/1 P.]*

Es wird die nachstehende Berechnung durchgeführt.

$\frac{E(700)}{700} = 2{,}3$

3) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Das Ergebnis dieser Berechnung entspricht ____①____ bei einem Absatz von 700 ME in der Einheit ____②____.

①	
dem Grenzerlös	☐
dem Preis	☐
den Durchschnittskosten	☐

②	
GE	☐
ME	☐
GE/ME	☐

c) Für die quadratische Gewinnfunktion G für Fahrradhelme des Modells *Gold Protection* gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Die Fixkosten betragen 220 GE.
Der Break-even-Point liegt bei einem Absatz von 50 ME.
Der maximale Gewinn wird bei einem Absatz von 300 ME erzielt.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. *[0/1/2 P.]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Online-Shopping

Online-Shopping wird in Österreich immer beliebter.

a) In der nachstehenden Tabelle ist der jeweilige Anteil der Online-Shopper an der Gesamtbevölkerung Österreichs für ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Anteil der Online-Shopper in %	33	38	44	54	58	62

Der Anteil der Online-Shopper in Prozent soll in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2007
$S(t)$ ... Anteil der Online-Shopper zur Zeit t in %

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion S auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 2007. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe von S den prognostizierten Wert für den Anteil der Online-Shopper im Jahr 2023. *[0/1 P.]*

b) Die zeitliche Entwicklung des Anteils der Online-Shopper an der Gesamtbevölkerung Österreichs kann in einem anderen Modell durch die Funktion A beschrieben werden.

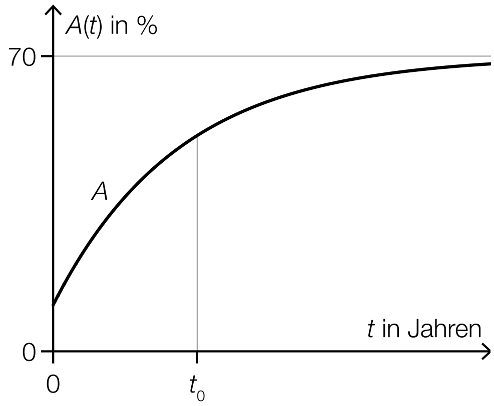
$A(t) = 70 - 37 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2007
$A(t)$ ... Anteil der Online-Shopper zur Zeit t in %

Im Jahr 2017 betrug der Anteil der Online-Shopper 62 %.

1) Berechnen Sie den Parameter λ. *[0/1 P.]*

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion A dargestellt.



2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Für den Zeitpunkt t_0 gilt, dass ___①___ und ___②___.

①	
$A'(t_0) > 0$	☐
$A'(t_0) = 0$	☐
$A'(t_0) < 0$	☐

②	
$A''(t_0) > 0$	☐
$A''(t_0) = 0$	☐
$A''(t_0) < 0$	☐

c) In einer Studie wurden die Merkmale „Kaufverhalten“ und „Geschlecht“ für die Altersgruppe der 16- bis 24-Jährigen untersucht. Dabei wurde beim Merkmal „Geschlecht“ zwischen „männlich“ und „weiblich“ unterschieden.

In dieser Altersgruppe sind 81 % Online-Shopper.
51 % dieser Altersgruppe sind männlich.
39 % dieser Altersgruppe sind männlich und Online-Shopper.

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/presse/121982.html [17.09.2021].

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*

		Kaufverhalten		
		Online-Shopper	kein Online-Shopper	Summe
Geschlecht	männlich			
	weiblich			
	Summe			

Eine zufällig ausgewählte Person dieser Altersgruppe ist männlich.

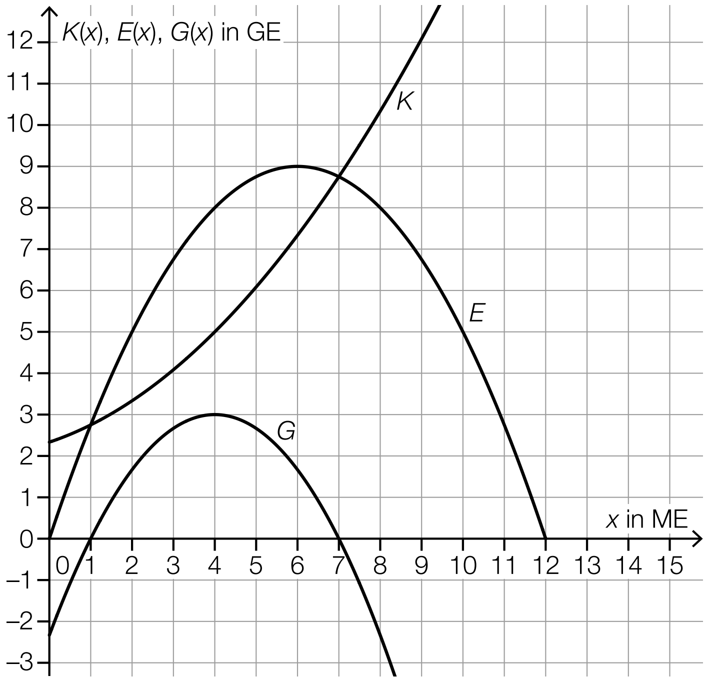
2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person Online-Shopper ist. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Trinkflaschen

Ein Unternehmen produziert Trinkflaschen aus verschiedenen Materialien.

a) In der nachstehenden Abbildung sind für die Produktion von Trinkflaschen aus Glas die Graphen der Kostenfunktion K, der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G dargestellt.



1) Markieren Sie in der obigen Abbildung auf der x-Achse den Gewinnbereich. *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf. *[0/1 P.]*

3) Kreuzen Sie den Cournot'schen Preis an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

1 GE/ME	☐
2 GE/ME	☐
3 GE/ME	☐
4 GE/ME	☐
6 GE/ME	☐

b) Für Trinkflaschen aus Edelstahl ist die Kostenfunktion K bekannt:

$K(x) = 0{,}035 \cdot x^3 - 0{,}32 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x + 4$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten 2,8 GE/ME betragen. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die absolute Änderung der Gesamtkosten bei einer Steigerung der Produktion von 8 ME auf 9 ME. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Kostenkehre. *[0/1 P.]*

c) Das Unternehmen entwickelt neue Thermosflaschen. In verschiedenen Versuchen wurde untersucht, wie schnell Tee in diesen Thermosflaschen abkühlt.
Diese Versuche ergaben, dass die Temperatur des Tees zu einem bestimmten Messzeitpunkt annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt $\mu = 64$ °C.
Bei 4 % aller Versuche betrug die Temperatur des Tees zu diesem Messzeitpunkt weniger als 60 °C.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ. *[0/1 P.]*

Bei einem dieser Versuche wurde die nachstehende Funktion T ermittelt.

$T(t) = 20 + 77 \cdot 0{,}93^t$

t … Zeit seit dem Einfüllen des Tees in h
$T(t)$ … Temperatur des Tees zur Zeit t in °C

2) Geben Sie diejenige Temperatur an, die der Tee beim Einfüllen zur Zeit $t = 0$ hatte.

____________________ °C *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Umbaufinanzierung

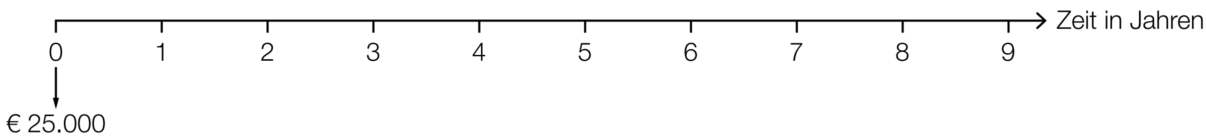
Maria und Johanna bauen ihre gemeinsame Wohnung um und benötigen für die Umbaufinanzierung einen Kredit in Höhe von € 25.000.

a) Maria überlegt sich eine Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- einmalige Rückzahlung in Höhe von € 8.000, die 2 Jahre nach Auszahlung des Kredits erfolgt
- 3 Jahresraten in Höhe von jeweils € 6.500, beginnend 3 Jahre nach der einmaligen Rückzahlung

1) Tragen Sie auf der nachstehenden Zeitachse alle Rückzahlungen ein. *[0/1 P.]*



2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der der zugrundeliegende Jahreszinssatz i berechnet werden kann. *[0/1 P.]*

b) Johanna überlegt sich eine andere Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- 5 Jahresraten in Höhe von jeweils € 5.000, beginnend 1 Jahr nach Auszahlung des Kredits
- Restzahlung, die 1 Jahr nach der letzten Jahresrate erfolgt

Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

1) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung. *[0/1 P.]*

c) Maria und Johanna erhalten von ihrer Bank einen Tilgungsplan für die Rückzahlung des Kredits mit gleich bleibenden monatlichen Annuitäten.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
37	€ 26,06	€ 423,94	€ 450,00	€ 9.998,09
38			€ 450,00	

1) Ermitteln Sie den Monatszinssatz für den Monat 37. *[0/1 P.]*

Für den Monat 38 beträgt der Monatszinssatz 0,2 %.

2) Vervollständigen Sie die Zeile für den Monat 38. *[0/1 P.]*

d) Für den Kredit in Höhe von € 25.000 bietet eine andere Bank Maria und Johanna eine Tilgung mit einem Monatszinssatz von 0,375 % an.
Sie verhandeln mit der Bank über einen Zahlungsaufschub.

1) Berechnen Sie, nach wie vielen Monaten ohne Rückzahlungen die Restschuld erstmals € 30.000 übersteigen würde. *[0/1 P.]*

Maria und Johanna wollen nun doch von Anfang an am Ende jedes Monats genau so viel zurückzahlen, dass die Restschuld am Ende jedes Monats gleich dem ursprünglichen Kreditbetrag von € 25.000 ist.

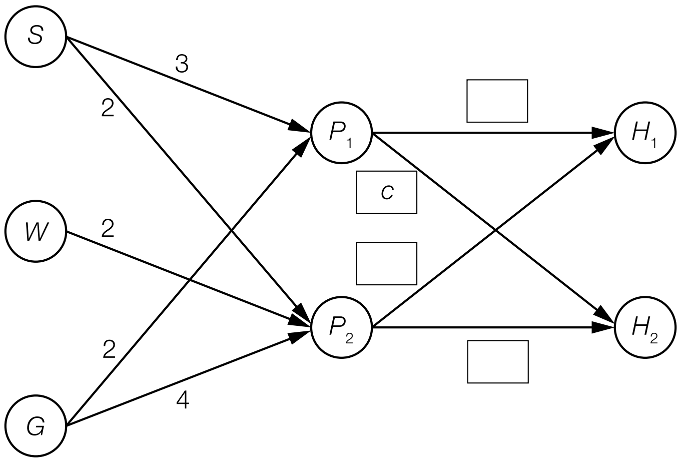
2) Ermitteln Sie, wie hoch die monatlichen Rückzahlungen dazu sein müssen. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Tennissocken

Ein Sportartikelhersteller produziert unter anderem schwarze (*S*), weiße (*W*) und graue (*G*) Tennissocken und verkauft diese als einzelne Paare sowie in zwei verschiedenen Großpackungen (P_1 und P_2).

a) Der nachstehende Gozinto-Graph veranschaulicht den Bedarf an Paaren von Tennissocken für die einzelnen Großpackungen, die später in unterschiedlicher Anzahl an die zwei Sporthändler H_1 und H_2 ausgeliefert werden.



Die 3 × 2-Matrix ***A*** beschreibt den Bedarf an Paaren von Tennissocken für die jeweiligen Großpackungen.

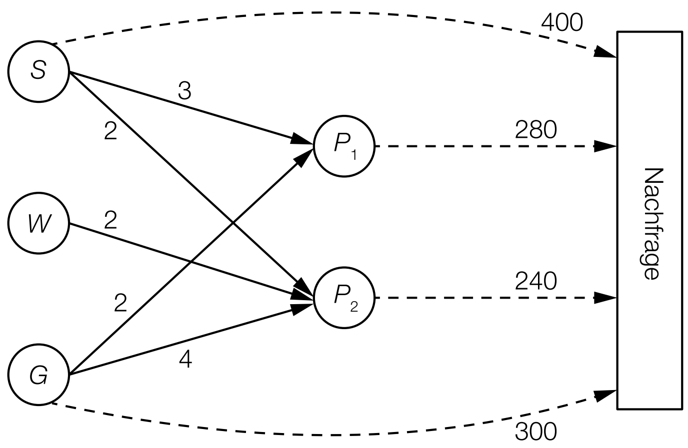
1) Ermitteln Sie die Matrix ***A***. *[0/1 P.]*

Die Matrix ***B*** beschreibt den Bedarf an Großpackungen für die Sporthändler H_1 und H_2.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

2) Tragen Sie im obigen Gozinto-Graphen die richtigen Elemente der Matrix ***B*** in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

b) Im Online-Shop dieses Sportartikelherstellers werden Tennissocken auch als einzelne Paare nachgefragt.
Die gesamte Nachfrage eines Monats ist in der nachstehenden Abbildung durch strichlierte Pfeile dargestellt.



Die quadratische 5×5-Matrix $\boldsymbol{V}$ beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen den einzelnen Paaren von Tennissocken und den Großpackungen (in der Reihenfolge S, W, G, P_1, P_2).

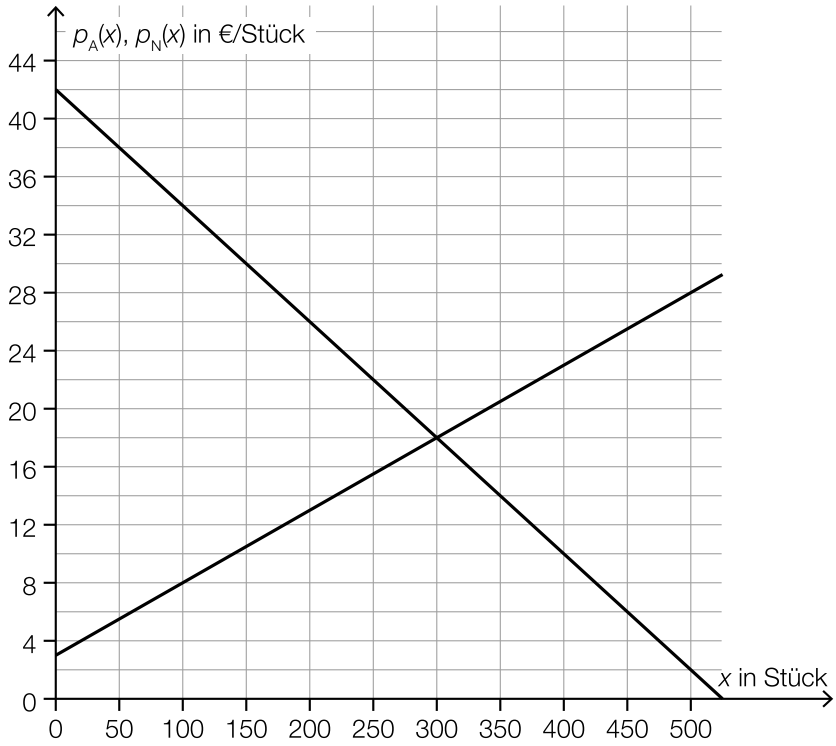
1) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{V}$. *[0/1 P.]*

Der Vektor $\vec{n}$ beschreibt die Nachfrage nach den einzelnen Paaren von Tennissocken und den Großpackungen (in der Reihenfolge S, W, G, P_1, P_2).

2) Ermitteln Sie den Vektor $\vec{n}$. *[0/1 P.]*

3) Ermitteln Sie die jeweilige Anzahl der benötigten Paare schwarzer, weißer und grauer Tennissocken für die angegebene Nachfrage. *[0/1 P.]*

c) Der Sportartikelhersteller weiß, wie sich Angebot und Nachfrage für die Großpackung P_1 verhalten. In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Preisfunktion des Angebots p_A und der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p_N dargestellt.



1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Die Gleichung der ______①______ lautet ______②______.

①	
Preisfunktion des Angebots	☐
Preisfunktion der Nachfrage	☐
Erlösfunktion	☐

②	
$y = -0{,}08 \cdot x^2 + 3 \cdot x$	☐
$y = -0{,}05 \cdot x + 3$	☐
$y = -0{,}08 \cdot x + 42$	☐

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Gleichgewichtspreis ab.

__________ €/Stück *[0/1 P.]*

Der Preis wird später auf 14 €/Stück festgelegt. Dadurch übersteigt die Nachfrage das Angebot um eine bestimmte Stückzahl.

3) Markieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Strecke, die dieser Stückzahl entspricht. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Niedrigzinsphase

Infolge der Finanzmarktkrise 2008 entstand eine über Jahre andauernde Phase niedriger Zinsen.

a) Für einen Kredit mit jährlich nachschüssigen Annuitäten in Höhe von je € 12.000 wurde in der Zeit vor der Niedrigzinsphase ein fixer Jahreszinssatz i vereinbart.
Die Zeile des Tilgungsplans für das Jahr 7 ist gegeben:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
7	€ 3.628,87	€ 8.371,13	€ 12.000,00	€ 78.030,55

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz i. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Höhe des Kredits. *[0/1 P.]*

Nach dem Jahr 7 wird mit der Bank über einen neuen Zinssatz verhandelt. Mit dem ursprünglichen Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_8	T_8	€ 12.000,00	K_8

Mit dem neuen, niedrigeren Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_{neu}	T_{neu}	€ 12.000,00	K_{neu}

Diese beiden Zeilen für das Jahr 8 werden verglichen.

3) Tragen Sie jeweils das richtige Zeichen („<“ oder „>“) ein.

Z_{neu} _______ Z_8 T_{neu} _______ T_8 K_{neu} _______ K_8 *[0/1 P.]*

b) Bei Tilgungsplänen können verschiedene Sonderfälle auftreten.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D so zu, dass zutreffende Aussagen entstehen. *[0/1 P.]*

Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr gleich 0 ist,	
Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr negativ ist,	

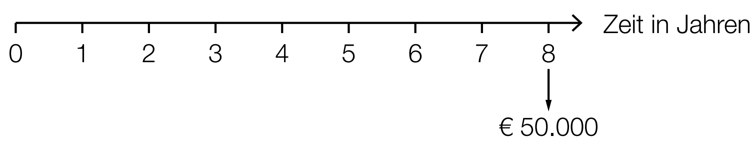
A	so wird die Restschuld in diesem Jahr vollständig beglichen.
B	so ist die Restschuld in diesem Jahr niedriger als im vorhergehenden Jahr.
C	so werden in diesem Jahr nur die anfallenden Zinsen beglichen.
D	so wird in diesem Jahr weniger als die anfallenden Zinsen zurückgezahlt.

c) In 8 Jahren sollen € 50.000 angespart werden. Die nachstehende Gleichung beschreibt den Ansparplan für einen positiven Jahreszinssatz.

$$R \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \cdot q^5 + 20000 \cdot q^2 = 50000$$

R ... Rate
q ... jährlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie alle Raten R und den Betrag in Höhe von € 20.000 auf der nachstehenden Zeitachse ein. *[0/1/2 P.]*



2) Berechnen Sie die Höhe der Rate R für den Fall, dass der Zinssatz 0 % p. a. ist. *[0/1 P.]*

d) Die Europäische Zentralbank legt einen sogenannten *Leitzinssatz* fest. Seit der Finanzmarktkrise 2008 ist der Leitzinssatz gesunken (siehe nachstehende Tabelle):

Zeit ab 1.1.2008 in Jahren	0	1	2	3	4	5	6	7
Leitzinssatz in Prozent	4,00	2,50	1,00	1,00	1,00	0,75	0,25	0,05

Datenquelle: https://www.finanzen.net/leitzins/@historisch [21.10.2020].

Die zeitliche Entwicklung des Leitzinssatzes soll mithilfe von exponentieller Regression durch die Funktion L modelliert werden.

$L(t) = a \cdot b^t$

t ... Zeit ab 1.1.2008 in Jahren
$L(t)$ ... Leitzinssatz zur Zeit t in Prozent

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion L auf. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem sich der Leitzinssatz gemäß der Funktion L jeweils halbiert. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Werkzeugproduktion

In einer Fabrik werden Werkzeuge hergestellt. Der Fabrik ist auch ein Shop für den Direktverkauf angeschlossen.

a) Im Shop ist der Erlös aus dem Verkauf eines bestimmten Schraubenziehers, der zu einem fixen Preis verkauft wird, erfasst worden:

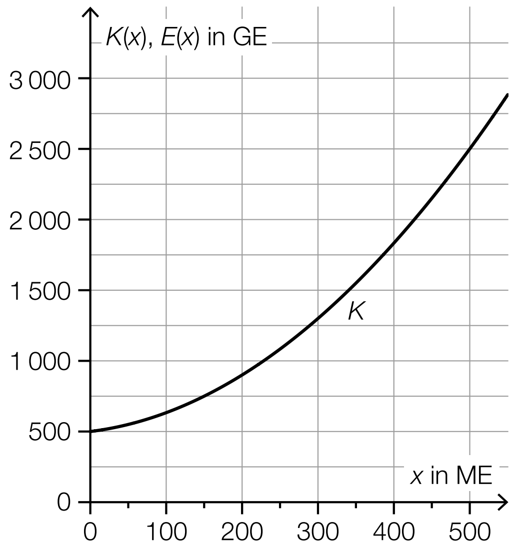
verkaufte Menge in ME	Erlös in GE
50	250
110	605

Die Daten in der obigen Wertetabelle sind allerdings fehlerhaft.

1) Weisen Sie nach, dass die obige Wertetabelle nicht zur Erlösfunktion des Schraubenziehers passen kann. *[0/1 P.]*

Es stellt sich heraus, dass nur der Erlös aus dem Verkauf von 50 ME korrekt erfasst wurde.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E ein. *[0/1 P.]*



x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinngrenzen ab.

untere Gewinngrenze: ____________________ ME

obere Gewinngrenze: ____________________ ME *[0/1 P.]*

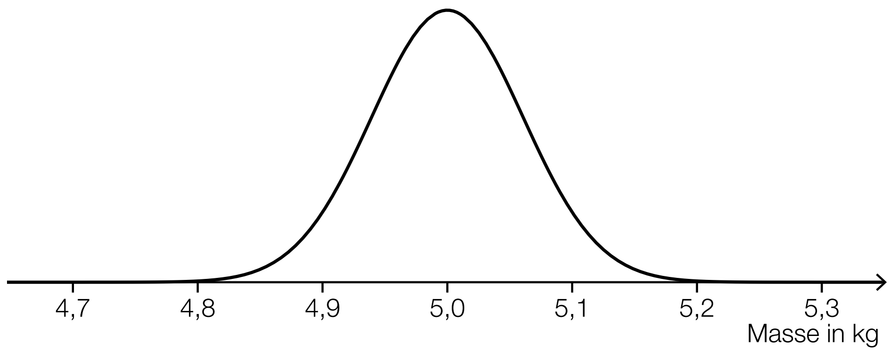
4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass für die Funktionen E und K eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Wenn für eine Menge x_0 der Zusammenhang ___①___ gilt, dann ist ___②___.

①	
$E(x_0) = K(x_0)$	☐
$E'(x_0) = K'(x_0)$	☐
$E(x_0) > K(x_0)$	☐

②	
x_0 kleiner als der Break-even-Point	☐
$x_0 = 0$	☐
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	☐

b) Für die Produktion eines bestimmten Werkzeugs wird ein Rohstoff in Packungen angeliefert. Die Masse dieser Packungen ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 5 kg. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Packung um höchstens 0,1 kg vom Erwartungswert abweicht, beträgt 90 %.

1) Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der obigen Abbildung. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. *[0/1 P.]*

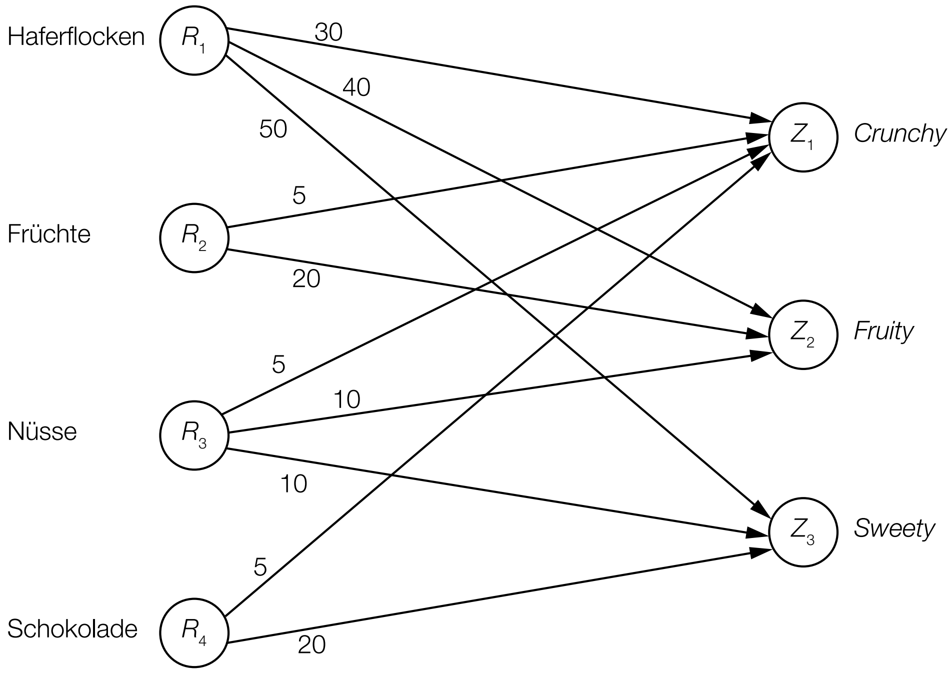
Aufgabe 8 (Teil B)

Müsliriegel

Ein Start-up-Unternehmen bringt verschiedene Müsliriegel-Sorten auf den Markt.

Aus den 4 Rohstoffen Haferflocken (R_1), Früchte (R_2), Nüsse (R_3) und Schokolade (R_4) werden mit Öl und Honig Müsliriegel der Sorten *Crunchy* (Z_1), *Fruity* (Z_2) und *Sweety* (Z_3) als Zwischenprodukte hergestellt.

Im nachstehenden Gozinto-Graphen ist der Mengenbedarf an diesen 4 Rohstoffen in Gramm für die Herstellung jeweils eines Müsliriegels dargestellt.



Das Start-up-Unternehmen bringt die Müsliriegel als Endprodukte in 6er-Probierpackungen (E_1), in 12er-Packungen (E_2) und in 18er-Mix-Boxen (E_3) auf den Markt.

Die jeweiligen Stückzahlen der Müsliriegel in den Packungen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben, die der Matrix ***P*** entspricht.

	6er-Probierpackung E_1	12er-Packung E_2	18er-Mix-Box E_3
Crunchy Z_1	2	2	10
Fruity Z_2	2	4	4
Sweety Z_3	2	6	4

a) Der im obigen Gozinto-Graphen dargestellte Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Müsliriegel soll durch die Matrix $\boldsymbol{R}$ beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{R}$. *[0/1 P.]*

Der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Müsliriegel-Packungen soll durch die Matrix $\boldsymbol{V}$ beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{V}$. *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie das Element v_{32} der Matrix $\boldsymbol{V}$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Es werden 50 der 6er-Probierpackungen, 30 der 12er-Packungen und 20 der 18er-Mix-Boxen nachgefragt.

Es stehen 40 kg Haferflocken zur Verfügung.

4) Überprüfen Sie nachweislich, ob mit dieser Menge der Mengenbedarf an Haferflocken für die Herstellung der Müsliriegel gedeckt ist. *[0/1 P.]*

b) Die Gesamtmasse der Müsliriegel beträgt in der 6er-Probierpackung 540 g, in der 12er-Packung 1 220 g und in der 18er-Mix-Box 1 380 g.

Aus diesen Werten kann mithilfe der Matrix $\boldsymbol{P}$ die Masse x_1 eines Müsliriegels *Crunchy*, die Masse x_2 eines Müsliriegels *Fruity* und die Masse x_3 eines Müsliriegels *Sweety* berechnet werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Massen x_1, x_2 und x_3. *[0/1 P.]*

Die Massen x_1, x_2 und x_3 können auch zu einem Vektor $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zusammengefasst und mithilfe des Vektors $\vec{\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} 540 \\ 1\,220 \\ 1\,380 \end{pmatrix}$ und der Matrix $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ ermittelt werden.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem der Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}$ berechnet werden kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}$	☐
$\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}$	☐
$\vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{P} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})^{\mathrm{T}}$	☐
$\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}$	☐
$\vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}$	☐

c) In einer Marktstudie wird die Nachfrage nach der 18er-Mix-Box untersucht.

Die Sättigungsmenge liegt bei 180 Stück.

Bei einem Preis von 10 Euro pro Stück beträgt die Nachfrage 80 Stück.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$p_N(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 30$
x ... nachgefragte Menge in Stück
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in Euro pro Stück

1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Nachfrage bei einem Preis von 24 Euro pro Stück. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Parfumherstellung

In einem Betrieb wird Parfum hergestellt.

a) Die Gesamtkosten für die Produktion des Parfums *Desert* können durch die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden. Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME
c ... Parameter

1) Ermitteln Sie, für welche Produktionsmengen ein progressiver Kostenverlauf vorliegt. *[0/1 P.]*

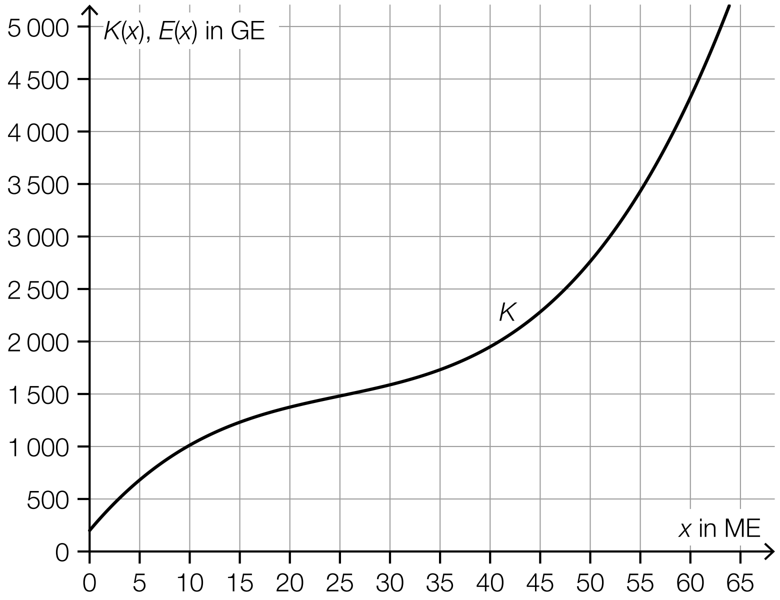
Bei ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen gilt folgende Bedingung:
Die Grenzkostenfunktion muss im gesamten Definitionsbereich positiv sein.

2) Weisen Sie nach, dass diese Bedingung nur für $c > 60$ erfüllt ist. *[0/1 P.]*

Die Fixkosten bei der Produktion dieses Parfums betragen 250 GE.
Es gilt: $c = 80$

3) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K auf. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gesamtkostenfunktion K für die Produktion des Parfums *Sunrise* dargestellt. Der Verkaufspreis dieses Parfums beträgt 75 GE/ME.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E ein. *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Gewinnbereich ab.

[_______ ; _______] (in ME) *[0/1 P.]*

c) Für die Gewinnfunktion G für die Produktion des Parfums *Moonlight* gilt:

$G(x) = -0{,}05 \cdot x^3 + 2{,}4 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 180$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro ME, der bei einem Absatz von 25 ME erzielt wird. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Küchengerät

Ein neues Küchengerät wird auf den Markt gebracht.

a) Die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts soll durch die beschränkte Wachstumsfunktion N_1 beschrieben werden.

$N_1(t) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen
$N_1(t)$ ... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück
S ... Sättigungsmenge in Stück
λ ... positiver Parameter

1) Argumentieren Sie mathematisch anhand der Funktionsgleichung, dass gilt: $N_1(0) = 0$
[0/1 P.]

Die Sättigungsmenge beträgt 5 000 Stück. Eine Woche nach Verkaufsbeginn wurden bereits 350 Stück verkauft.

2) Berechnen Sie λ. *[0/1 P.]*

Vereinfacht kann die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts für einen eingeschränkten Zeitraum auch durch die Funktion N_2 beschrieben werden.

$N_2(t) = 350 \cdot t$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen
$N_2(t)$ ... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück

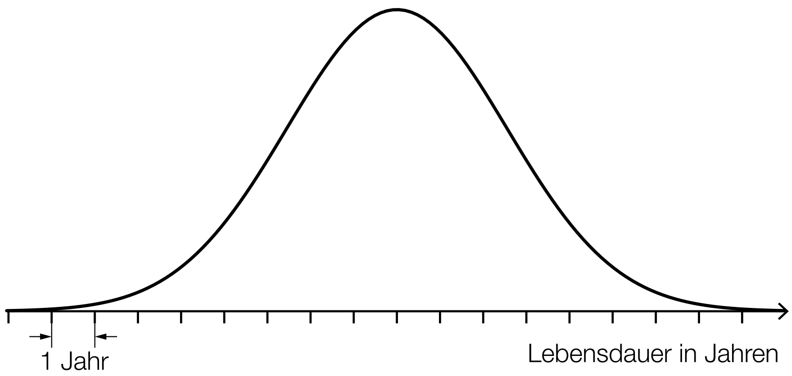
Jemand hat die Gleichungen $N_1(t) = N_2(t)$ und $N_1'(t) = N_2'(t)$ nach t gelöst.

3) Ordnen Sie den beiden Gleichungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.
[0/1 P.]

$N_1(t) = N_2(t)$	
$N_1'(t) = N_2'(t)$	

A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0; 1}.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall]0; 1[.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall [1; ∞[.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0}.

b) Die Lebensdauer des Küchengeräts wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Jahren angenommen. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung. Der Abstand zwischen zwei Markierungen auf der Achse entspricht 1 Jahr.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Küchengerät dieses Typs eine Lebensdauer von maximal 7 Jahren hat, beträgt 12 %.

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung diese Wahrscheinlichkeit. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. *[0/1 P.]*

c) Eine Marktforschungsanalyse zu diesem Küchengerät hat ergeben, dass folgende Mengen bei den jeweiligen Preisen abgesetzt werden können:

abgesetzte Menge in Stück	210	420	1 430	1 760
Preis in Euro/Stück	55	45	20	15

Die Kosten für die Produktion von 1 430 Stück betragen 28.000 Euro. Diese Menge wird zu einem Preis von 20 Euro/Stück abgesetzt.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht wird. *[0/1 P.]*

Mit den Daten aus der obigen Tabelle soll mithilfe von exponentieller Regression eine Preis-Absatz-Funktion p erstellt werden.

$p(x) = a \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

x ... abgesetzte Menge in Stück
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in Euro/Stück

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion p auf. *[0/1 P.]*

3) Begründen Sie, warum es gemäß diesem Modell keine Sättigungsmenge gibt. *[0/1 P.]*

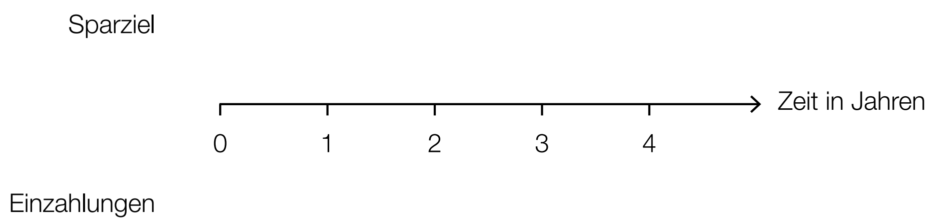
Aufgabe 8 (Teil B)

Esszimmereinrichtung

Petra möchte eine neue Esszimmereinrichtung kaufen, die € 4.000 kostet.

a) Petra hat vor 3 Jahren € 2.000 und vor 1 Jahr den Betrag *X* auf ein Konto eingezahlt, sodass sie nun als Sparziel den Betrag € 4.000 auf diesem Konto hat.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und Sparziel) auf der nachstehenden Zeitachse. *[0/1 P.]*



Die eingezahlten Beträge werden mit dem Jahreszinssatz *i* verzinst.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe des Betrags *X* auf. Verwenden Sie dabei die Beträge € 4.000 und € 2.000 sowie den Jahreszinssatz *i*.

$X =$ ____ *[0/1 P.]*

b) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch bei einem Versandhaus über Ratenzahlung finanzieren. Aufgrund der anfallenden Zinsen betragen die Kosten dabei monatlich € 1,65 pro € 100 offener Restschuld.

Petra berechnet für diese Ratenzahlung einen Jahreszinssatz von rund 21,7 %.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob Petras Berechnung stimmt. *[0/1 P.]*

Beim Kauf der Esszimmereinrichtung um € 4.000 über Ratenzahlung müssen 12 nachschüssige Monatsraten in Höhe von jeweils € 370 und ein Restbetrag, der zeitgleich mit der letzten Monatsrate fällig ist, bezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt 21,7 %.

2) Berechnen Sie die Höhe des Restbetrags. *[0/1 P.]*

Beim Kauf eines Möbelstücks mit dem Verkaufspreis W über Ratenzahlung müssen 3 nachschüssige Monatsraten der Höhe R bezahlt werden. Der zugehörige monatliche Aufzinsungsfaktor wird mit q_{12} bezeichnet.

3) Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$W = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	☐
$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = R \cdot q_{12}^3 + R \cdot q_{12}^2 + R \cdot q_{12}$	☐

c) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch über einen Kredit mit einer Laufzeit von 5 Jahren finanzieren.

Dazu wird eine gleichbleibende Annuität berechnet und ein Tilgungsplan erstellt.

Allerdings ist nach 5 Jahren die Schuld noch nicht vollständig getilgt, weil während der Laufzeit eine einmalige Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	–––	–––	–––	€ 4.000,00
1	€ 100,00	€ 760,99	€ 860,99	€ 3.239,01
2	€ 80,98	€ 780,01	€ 860,99	€ 2.459,00
3	€ 98,36	€ 762,63	€ 860,99	€ 1.696,37
4	€ 67,85	€ 793,13	€ 860,99	€ 903,24
5	€ 36,13	€ 824,86	€ 860,99	€ 78,38

1) Erklären Sie, woran man erkennen kann, dass während der Laufzeit eine Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Zinssatz im Jahr 5. *[0/1 P.]*

Der Kredit soll am Ende des Jahres 5 vollständig getilgt werden.
Dadurch verändert sich die letzte Zeile des obigen Tilgungsplans.

3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die beiden fehlenden Zahlen ein. *[0/1 P.]*

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 36,13			€ 0,00

Aufgabe 6 (Teil B)

Süßwarenproduktion

Ein Unternehmen produziert Süßwaren.

a) Eine bestimmte Sorte von Schokoriegeln wird im Werk *A* und im Werk *B* produziert. Aufgrund unterschiedlicher Produktionsbedingungen sind die Kostenfunktionen für die Produktion in den beiden Werken unterschiedlich.

x … Produktionsmenge in ME
$K_A(x)$ … Gesamtkosten im Werk *A* bei der Produktionsmenge x in GE
$K_B(x)$ … Gesamtkosten im Werk *B* bei der Produktionsmenge x in GE

Bei der Produktionsmenge x_1 sind die jeweiligen Gesamtkosten in beiden Werken gleich hoch.

1) Argumentieren Sie, dass bei der Produktionsmenge x_1 auch die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

Für K_A gilt:
$K_A(x) = 0{,}0001 \cdot x^2 + 0{,}17 \cdot x + 200$

Für K_B gilt:
K_B ist eine lineare Funktion. Die Fixkosten betragen 260 GE, die variablen Stückkosten betragen 0,3 GE/ME.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_B auf. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

b) Die Gesamtkosten bei der Produktion von Waffelschnitten können durch die lineare Kostenfunktion K beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x + b$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

In Abbildung 1 sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' und der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.

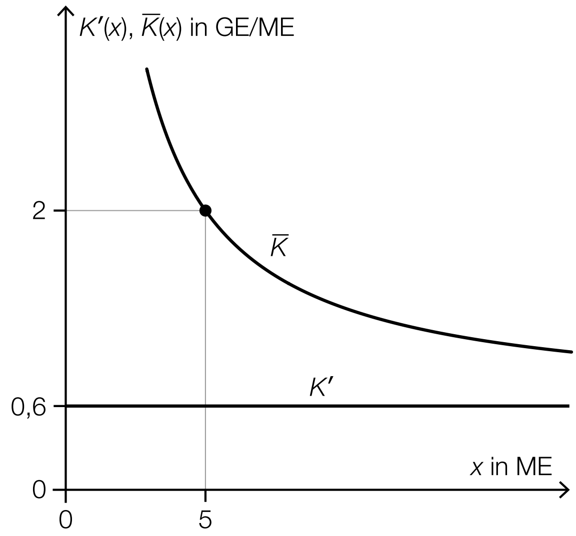


Abbildung 1

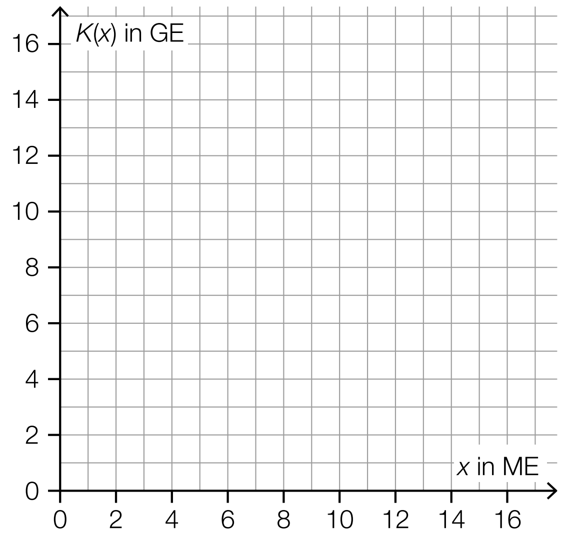


Abbildung 2

1) Geben Sie die Steigung a der Kostenfunktion K an.

$a =$ __________ GE/ME *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der Kostenfunktion K ein. *[0/1 P.]*

c) Für die Produktion von Schokolinsen sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$K(x) = 0{,}0003 \cdot x^3 - 0{,}017 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 40$
$E(x) = 1{,}5 \cdot x$

x … produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[0/1 P.]*

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}0003 \cdot x^2 - 0{,}017 \cdot x + 0{,}4 + \frac{40}{x}$$

$$0{,}0006 \cdot x - 0{,}017 - \frac{40}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx 52{,}5$$

3) Interpretieren Sie die Zahl 52,5 im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Autokauf

Clara möchte ein neues Auto kaufen.

a) Eine Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einer Laufzeit von 7 Jahren an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 216.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz i_{12} für diesen Kredit. *[0/1 P.]*

Mit dem monatlichen Aufzinsungsfaktor $q_{12} = 1 + i_{12}$ führt Clara die nachstehende Berechnung durch.

$$X = 15\,000 \cdot q_{12}^{24} - 216 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von X im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Eine andere Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einem Zinssatz von 6,2 % p. a. an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 219,35.

1) Berechnen Sie den zu 6,2 % p. a. äquivalenten Monatszinssatz. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans. *[0/1 P.]*

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 15.000,00
1				

c) Clara hat vor 5 Jahren den Geldbetrag B_1 und vor 3 Jahren den Geldbetrag B_2 auf ein Konto eingezahlt. Der Zinssatz beträgt 1 % p. a.

1) Ordnen Sie den beiden Beschreibungen jeweils den passenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.	
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.	

A	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^3$
B	$B_1 + B_2 \cdot 1{,}01^{-2}$
C	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^2$
D	$B_1 \cdot 1{,}01^2 + B_2$

d) Der Wert eines Autos verringert sich im Laufe der Zeit. Für ein bestimmtes Auto ist dessen Wert nach 1 Jahr und nach 3 Jahren in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Zeit nach dem Kauf in Jahren	1	3
Wert des Autos in €	15 000	10 000

Der Wert des Autos kann im Zeitintervall [1; 3] näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Kauf in Jahren
$f(t)$ ... Wert des Autos zur Zeit t in €

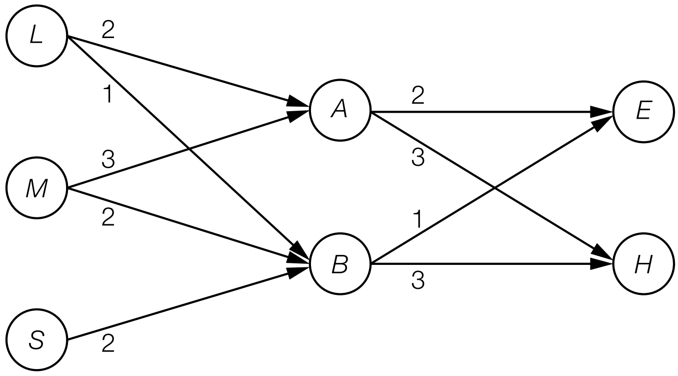
1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Seminarprüfungen

a) An einer Universität stellt eine Professorin Prüfungen für ihre Seminare zusammen. Dabei verwendet sie jede Prüfungsfrage nur ein Mal.
Sie teilt ihre Prüfungsfragen in drei Kategorien ein: leicht (L), mittel (M), schwierig (S).
Sie kombiniert die Prüfungsfragen in unterschiedlicher Anzahl für Prüfungen der Niveaustufen A und B. In ihren Einführungsseminaren (E) und Hauptseminaren (H) gibt es jeweils unterschiedlich viele Prüfungen der Niveaustufen A und B.
Die entsprechenden Zahlen können dem nachstehenden Gozinto-Graphen entnommen werden.



In diesem Gozinto-Graphen existiert kein Pfeil von S nach A.

1) Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Die Matrix $\boldsymbol{V_1}$ beschreibt den Bedarf an Prüfungsfragen für die unterschiedlichen Prüfungen der Niveaustufen A und B.
Die Matrix $\boldsymbol{V_2}$ beschreibt den Bedarf an Prüfungen der Niveaustufen A und B für die unterschiedlichen Seminare.

2) Ermitteln Sie die beiden Matrizen $\boldsymbol{V_1}$ und $\boldsymbol{V_2}$. *[0/1 P.]*

Die Professorin hält im aktuellen Semester 4 Einführungsseminare (E) und 2 Hauptseminare (H).
Der Vektor $\vec{a}$ beschreibt den Bedarf an leichten, mittleren und schwierigen Prüfungsfragen für diese Seminare.

3) Berechnen Sie den Vektor $\vec{a}$. *[0/1 P.]*

Die Professorin benötigt für die Vorbereitung der Prüfungsfragen unterschiedlich viel Zeit:
t_1 Minuten für eine leichte, t_2 Minuten für eine mittlere und t_3 Minuten für eine schwierige Prüfungsfrage. Die insgesamt für alle Prüfungsfragen des aktuellen Semesters benötigte Vorbereitungszeit wird mit t bezeichnet.

4) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von t auf. Verwenden Sie dabei t_1, t_2 und t_3 sowie den Vektor $\vec{a}$.

$t =$ ____ *[0/1 P.]*

b) Über die Matrizen ***R***, ***S*** und ***T*** weiß man:

R ist eine 3×3-Matrix.
S ist eine 2×3-Matrix.
T ist eine 3×2-Matrix.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

R · ***S*** ist eine 3×2-Matrix.	☐
R · ***T*** ist eine 2×3-Matrix.	☐
T · ***S*** ist eine 3×3-Matrix.	☐
S · ***R*** ist eine 3×2-Matrix.	☐
S · ***T*** ist eine 3×3-Matrix.	☐

c) Eine Kommission untersucht die Ergebnisse mehrerer Prüfungen. Dabei wird beim Prüfungsergebnis zwischen „positiv“ und „negativ“, beim Geschlecht der Studierenden zwischen „männlich“ und „weiblich“ unterschieden.
In der nachstehenden Vierfeldertafel sind die relativen Häufigkeiten für eine bestimmte Prüfung angegeben.

	männlich	weiblich	Summe
positiv	0,38		0,72
negativ			0,28
Summe	0,58	0,42	1

1) Ergänzen Sie die leeren Felder der obigen Vierfeldertafel. *[0/1 P.]*

Von den Studierenden wird eine Person zufällig ausgewählt.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person männlich ist, wenn bekannt ist, dass die Person ein negatives Prüfungsergebnis hat. *[0/1 P.]*

Bei einer anderen Prüfung geht die Kommission von einer (stochastischen) Unabhängigkeit zwischen dem Prüfungsergebnis und dem Geschlecht aus.

3) Ergänzen Sie unter Berücksichtigung dieser Voraussetzung die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Vierfeldertafel. *[0/1 P.]*

	männlich	weiblich	Summe
positiv			0,80
negativ			0,20
Summe	0,55	0,45	1

Aufgabe 6 (Teil B)

Abfindung

Vier Geschwister haben gemeinsam ein Haus geerbt.
Martha übernimmt das Haus und muss dafür ihren Geschwistern Andreas, Beate und Christian zum Zeitpunkt der Übernahme Geldbeträge in Höhe von jeweils € 80.000 auszahlen. Ein solcher Geldbetrag wird *Abfindung* genannt.

a) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Andreas soll durch 3 Zahlungen erfolgen:

€ 25.000 nach 3 Jahren,
€ 30.000 nach 6 Jahren und
€ 35.000 nach 9 Jahren.

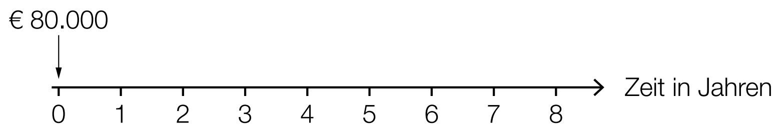
1) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des zugehörigen Jahreszinssatzes *i* auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz *i*. *[0/1 P.]*

b) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Beate soll durch Zahlungen erfolgen, die durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden.

$$80\,000 = 20\,000 + R \cdot \frac{1{,}02^4 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^6}$$

1) Stellen Sie den Betrag € 20.000 und die Raten *R* auf der nachstehenden Zeitachse dar. *[0/1 P.]*



c) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Christian soll durch Quartalsraten in Höhe von jeweils € 4.000 und eine Restzahlung erfolgen. Die erste Zahlung erfolgt nach 1 Jahr. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

$1{,}02^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}004962...$

2) Berechnen Sie die Anzahl der vollen Quartalsraten. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die 1 Quartal nach der letzten vollen Quartalsrate ausgezahlt wird. *[0/1 P.]*

d) Zur Finanzierung der Hausübernahme nimmt Martha einen Kredit auf.

Die vorletzte Zeile des Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
15	€ 319,43	€ 9.680,57	€ 10.000,00	€ 966,95

1) Zeigen Sie, dass der Zinssatz 3 % p. a. beträgt. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie die nachstehende letzte Zeile des Tilgungsplans. *[0/1 P.]*

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
16				€ 0,00

Aufgabe 7 (Teil B)

Farben und Lacke

Ein Unternehmen stellt verschiedene Farben und Lacke her.

a) Die Gesamtkosten für die Produktion von Acrylfarbe werden durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

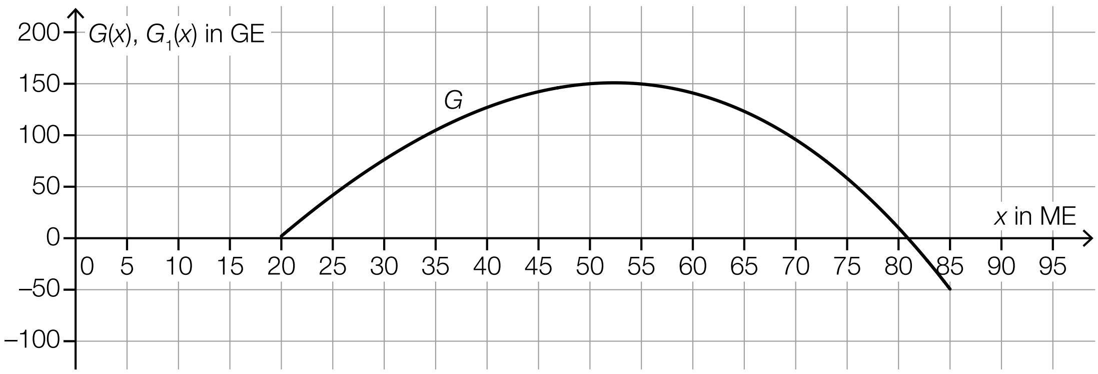
1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Wenn ______①______ ist, dann kann K keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion sein, weil in diesem Fall ______②______.

①	
$b < 0$	☐
$c < 0$	☐
$b < c$	☐

②	
die Fixkosten negativ sind	☐
keine Kostenkehre existiert	☐
die Grenzkosten bei der Produktionsmenge 0 negativ sind	☐

b) Der Graph der Gewinnfunktion G für Acrylfarbe ist in der nachstehenden Abbildung im Intervall [20; 85] dargestellt.



x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Die Fixkosten steigen um 50 GE. Die variablen Kosten und der Erlös bleiben unverändert. Der Gewinn unter diesen veränderten Bedingungen wird durch die Gewinnfunktion G_1 beschrieben.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der neuen Gewinnfunktion G_1 im Intervall [20; 85] ein. *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die untere Gewinngrenze ab, die sich unter diesen veränderten Bedingungen ergibt. *[0/1 P.]*

c) Für einen bestimmten Kunstharzlack beträgt der Höchstpreis 60 €/L. Bei einem Preis von 20 €/L können 200 L dieses Lacks abgesetzt werden.
Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge kann für diesen Lack durch die lineare Preis-Absatz-Funktion p beschrieben werden.

x … Absatzmenge in L
$p(x)$ … Preis bei der Absatzmenge x in €/L

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Preis-Absatz-Funktion p auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Preis-Absatz-Funktion p im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[0/1 P.]*

d) Das Unternehmen stellt auch Wandfarbe her.
In einem Heimwerker-Ratgeber wird empfohlen, mehr Farbe als vom Hersteller angegeben zu kaufen. Konkret werden dort folgende Empfehlungen gegeben:

- Für die zusätzlichen Flächen bei Tür- und Fensterrahmen sollten um insgesamt 10 % mehr Farbe als vom Hersteller angegeben gekauft werden.
- Um ganz sicher genug Farbe zu haben, sollte diese berechnete Menge anschließend nochmals um 20 % erhöht werden.

Auf den Farbkübeln ist angegeben, dass für 1 m^2 Wandfläche 0,14 L Farbe benötigt werden.

Es soll eine Formel für die Farbmenge M (in Litern) aufgestellt werden, die man für eine Wandfläche von A Quadratmetern benötigt. Dabei sollen die obigen Empfehlungen des Heimwerker-Ratgebers berücksichtigt werden.

1) Stellen Sie diese Formel auf.

$M =$ ____ *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Thermometer

Ein digitales Thermometer wird zur Messung der Temperatur des Wassers in einem Becken verwendet. Ausgehend von einem Startwert nähert sich die angezeigte Temperatur der tatsächlichen Temperatur des Wassers an.

a) Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei einer bestimmten Messung kann durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 38 - 6 \cdot 0{,}758^t$

t … Zeit nach Beginn der Messung in s
$f(t)$ … angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

1) Interpretieren Sie die Zahl 38 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Sobald die momentane Änderungsrate der angezeigten Temperatur unter 0,01 °C/s sinkt, ertönt ein Piepton.

2) Berechnen Sie, wie viele Sekunden nach Beginn der Messung der Piepton ertönt. *[0/1 P.]*

b) Zu Beginn einer anderen Messung zeigt das digitale Thermometer eine Temperatur von 33,0 °C an. Nach 4 s zeigt es eine Temperatur von 36,0 °C an.
Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei dieser Messung kann durch die Funktion g beschrieben werden.

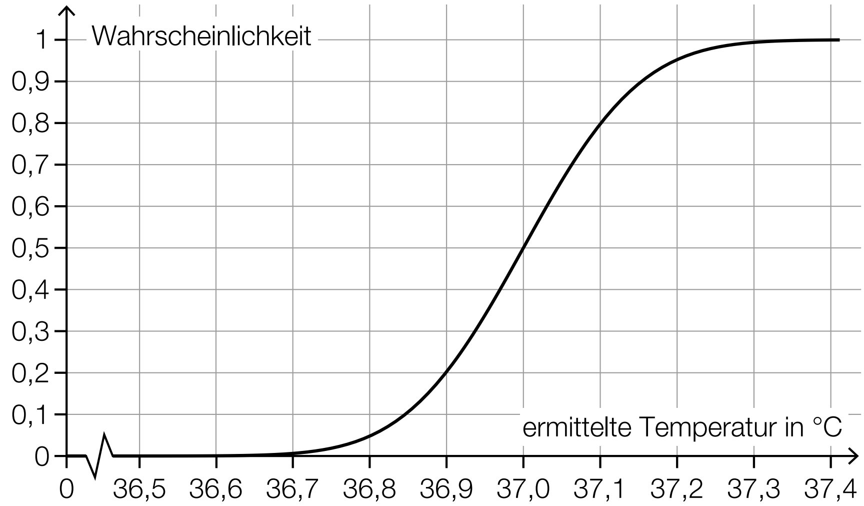
$g(t) = c - a \cdot e^{-0{,}275 \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn der Messung in s
$g(t)$ … angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a und c. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Parameter a und c. *[0/1 P.]*

c) Ein Unternehmen produziert Thermometer. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden die produzierten Thermometer unter jeweils gleichen Bedingungen getestet.
Die ermittelten Temperaturen können als annähernd normalverteilt angenommen werden.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = ____________________ °C *[0/1 P.]*

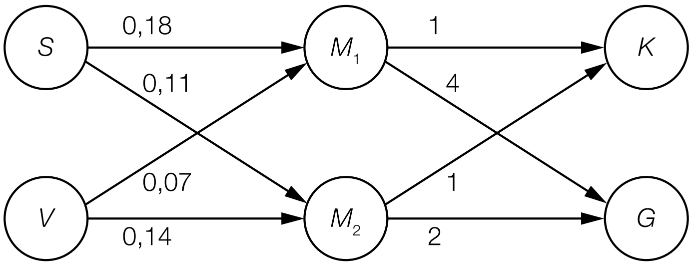
2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit ab, dass die ermittelte Temperatur höchstens 36,9 °C beträgt. *[0/1 P.]*

3) Ermitteln Sie die Standardabweichung σ. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Puddingmischungen

Aus reinen Puddingsorten werden verschiedene Mischsorten produziert. Diese werden in verschiedenen Packungen verkauft. Der nachstehende Gozinto-Graph bildet diesen Produktionsprozess ab.



S ... reiner Schokoladepudding (in Litern)
V ... reiner Vanillepudding (in Litern)

M_1 ... Mischsorte 1: Schokoladepudding mit Vanille-Sprenkeln (in Bechern)
M_2 ... Mischsorte 2: Vanillepudding mit Schoko-Sprenkeln (in Bechern)

K ... Kleinpackungen (in Stück)
G ... Großpackungen (in Stück)

a) 1) Ermitteln Sie den Prozentsatz an Schokoladepudding in einem Becher M_1. *[0/1 P.]*

2) Übertragen Sie den Gozinto-Graphen in 2 Matrizen, die den Mengenbedarf an reinen Puddingsorten für die Mischsorten bzw. den Mengenbedarf an Mischsorten für die Packungen beschreiben. *[0/1 P.]*

Ein Supermarkt bestellt 300 Klein- und 200 Großpackungen.

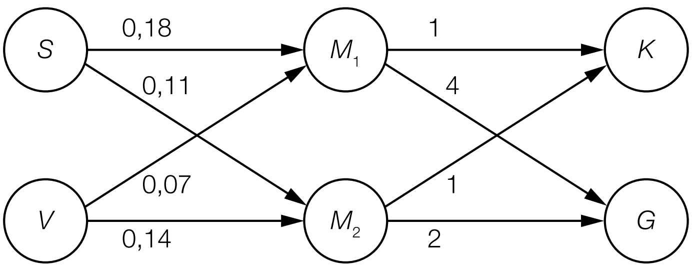
3) Ermitteln Sie die dafür jeweils benötigte Menge an Schokolade- und Vanillepudding in Litern. *[0/1 P.]*

b) Der Produktionsablauf wird verändert. Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtungen zwischen den reinen Puddingsorten, den Mischsorten und den Packungen (in der Reihenfolge S, V, M_1, M_2, K, G).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}18 & 0{,}11 & 0 & \mathbf{0{,}50} \\ 0 & 0 & 0{,}07 & 0{,}14 & 0 & \mathbf{0{,}25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neu dabei sind: $a_{16} = 0{,}50$ und $a_{26} = 0{,}25$.

1) Zeichnen Sie diese beiden neuen Verflechtungen im nachstehenden Gozinto-Graphen ein.
[0/1 P.]



Der Vektor $\vec{x}$ soll die benötigten Mengen an reinen Puddingsorten, Mischsorten und Packungen (in der Reihenfolge S, V, M_1, M_2, K, G) beschreiben.

2) Ermitteln Sie diesen Vektor $\vec{x}$ für eine Nachfrage von 300 Klein- und 200 Großpackungen.
[0/1 P.]

Für eine andere Nachfrage ergibt sich anstelle von $\vec{x}$ der Vektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 461 \\ 264 \\ 1\,300 \\ \mathbf{700} \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$.

3) Interpretieren Sie den Eintrag 700 dieses Vektors im gegebenen Sachzusammenhang.
[0/1 P.]

4) Beschreiben Sie, wie sich eine zusätzliche direkte Nachfrage nach reinem Schokoladepudding im Ausmaß von 100 Litern auf den Vektor $\vec{x}_1$ auswirkt. *[0/1 P.]*

c) Der Produktionsprozess wird auf andere Puddingsorten erweitert.
Aus a reinen Puddingsorten werden b verschiedene Mischsorten produziert, die wiederum in c verschiedenen Packungsgrößen abgepackt werden. Die quadratische Matrix $\boldsymbol{B}$ beschreibt die Produktionsverflechtungen zwischen den reinen Puddingsorten, den Mischsorten und den Packungen.

1) Ordnen Sie den beiden Eigenschaften von $\boldsymbol{B}$ jeweils die zutreffende Berechnung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Anzahl der Matrixelemente von ***B***	
Anzahl der Zeilen von ***B***	

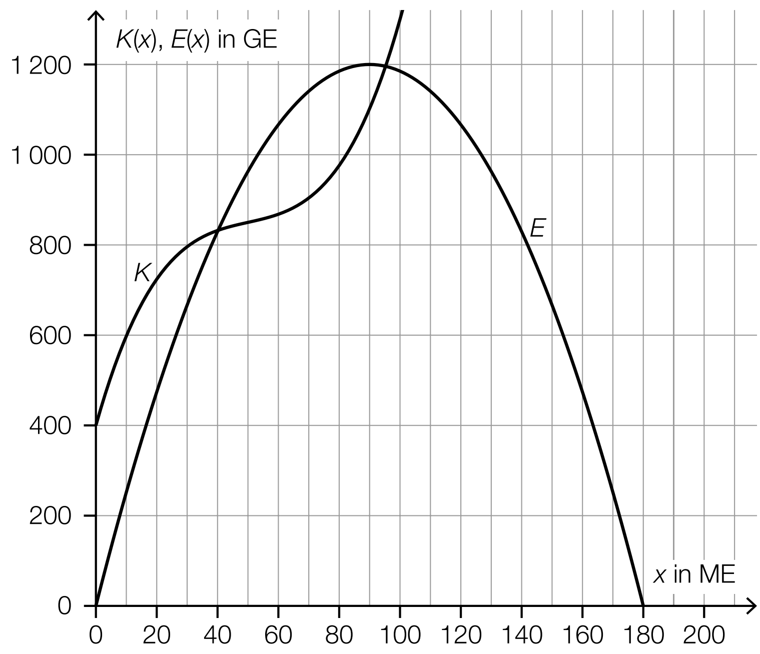
A	$a \cdot b \cdot c$
B	$a + b + c$
C	$(a + b + c) \cdot 2$
D	$(a + b + c)^2$

Aufgabe 8 (Teil B)

Scheiben für PKWs

Ein Betrieb stellt Frontscheiben und Heckscheiben für PKWs her.

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der quadratischen Erlösfunktion E für Frontscheiben eines bestimmten Typs dargestellt.



1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf. *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage auf. *[0/1 P.]*

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinnzone ab.

[_______ ; _______] *[0/1 P.]*

b) Die variablen Kosten bei der Produktion von Heckscheiben eines bestimmten Typs können durch die Funktion K_v beschrieben werden.

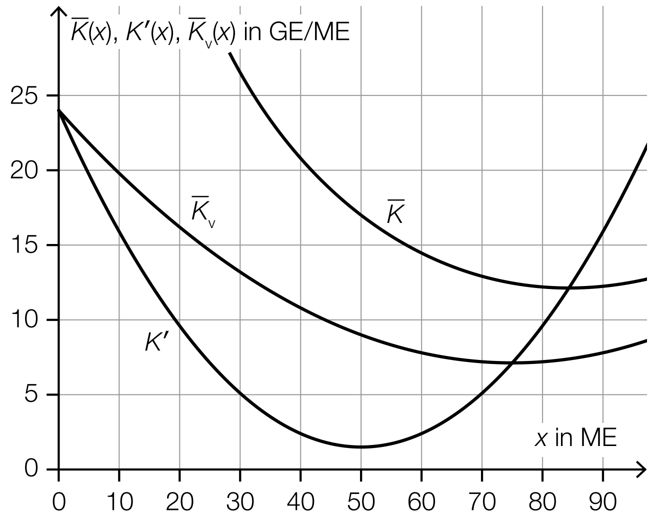
$K_v(x) = 0{,}0029 \cdot x^3 - 0{,}45 \cdot x^2 + 24 \cdot x$

x ... produzierte Menge in ME
$K_v(x)$ ... variable Kosten bei der produzierten Menge x in GE

Die Fixkosten betragen 450 GE.

1) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze. *[0/1 P.]*

In der nebenstehenden Abbildung sind der Graph der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$, der Graph der Grenzkostenfunktion K' und der Graph der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



2) Kreuzen Sie diejenige Größe an, die <u>nicht</u> aus der obigen Abbildung abgelesen werden kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Kostenkehre	☐
Fixkosten	☐
Betriebsminimum	☐
Betriebsoptimum	☐
kurzfristige Preisuntergrenze	☐

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N für Heckscheiben dieses Typs ist gegeben durch:

$p_N(x) = -0{,}16 \cdot x + 30$

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

3) Geben Sie den Höchstpreis an. *[0/1 P.]*

4) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis. *[0/1 P.]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Zinsentwicklung

Die Zinssätze für Kredite und Spareinlagen unterliegen zeitabhängigen Schwankungen.

a) Der Zinssatz für einen Kredit bei einer Bank ist unter anderem auch davon abhängig, welchen Verwendungszweck dieser hat.
Konsumkredite dienen der Finanzierung von Konsumgütern oder Dienstleistungen.
Immobilienkredite dienen der Wohnbaufinanzierung.

In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Zinssätze für beide Verwendungszwecke im Zeitraum von 2000 bis 2004 in Österreich dargestellt.

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004
Zinssatz für Konsumkredite in % p. a.	6,63	6,69	6,06	5,42	5,18
Zinssatz für Immobilienkredite in % p. a.	5,87	5,93	5,35	4,41	3,90

Datenquelle: https://www.oenb.at/Statistik/Standardisierte-Tabellen/zinssaetze-und-wechselkurse/Zinssaetze-der-Kreditinstitute.html [04.08.2021].

1) Stellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden für den Zusammenhang zwischen dem Zinssatz für Konsumkredite x und dem Zinssatz für Immobilienkredite y im angegebenen Zeitraum auf. *[0/1 P.]*

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um diesen Zusammenhang zu beschreiben. *[0/1 P.]*

Der Zinssatz im Jahr 2005 betrug für Konsumkredite 4,89 % p. a. und für Immobilienkredite 3,58 % p. a.

3) Berechnen Sie die Differenz zwischen dem tatsächlichen Zinssatz für Immobilienkredite im Jahr 2005 und dem mithilfe der Regressionsgeraden ermittelten entsprechenden Zinssatz. *[0/1 P.]*

b) Bei Abschluss eines Kreditvertrags kann festgelegt werden, ob der Zinssatz während der gesamten Laufzeit konstant bleibt oder ob sich der Zinssatz entsprechend der aktuellen Marktlage immer wieder verändert.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt aus einem Tilgungsplan dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80		€ 7.000,00	

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich der Zinssatz innerhalb der dargestellten 3 Jahre verändert hat. *[0/1 P.]*

2) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Beträge im Jahr 3 ein. *[0/1 P.]*

c) Ein Geldbetrag B wird 2 Jahre lang mit dem Jahreszinssatz i_0 verzinst, danach weitere 3 Jahre mit einem geänderten Jahreszinssatz i_1.

1) Stellen Sie eine Formel für den Endwert E am Ende dieser 5 Jahre auf. Verwenden Sie dabei B, i_0 und i_1.

$E =$ ____ *[0/1 P.]*

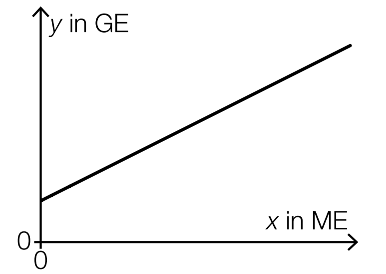
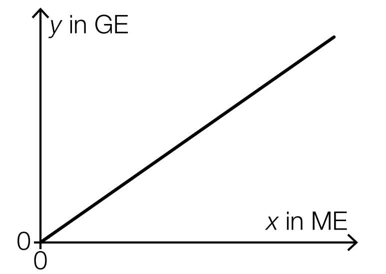
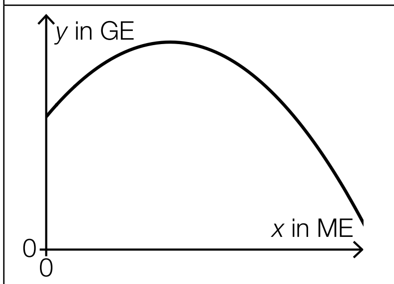
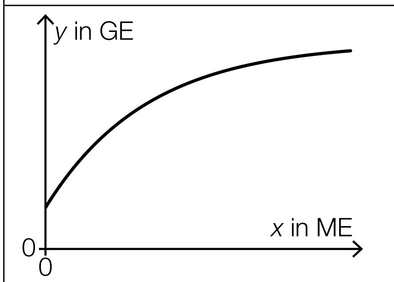
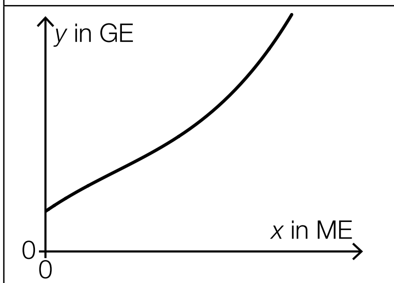
2) Berechnen Sie für $i_0 = 3\ \%$ und $i_1 = 1\ \%$ denjenigen gleichbleibenden Jahreszinssatz i, bei dem der Betrag B innerhalb von 5 Jahren auf den gleichen Endwert E anwächst. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

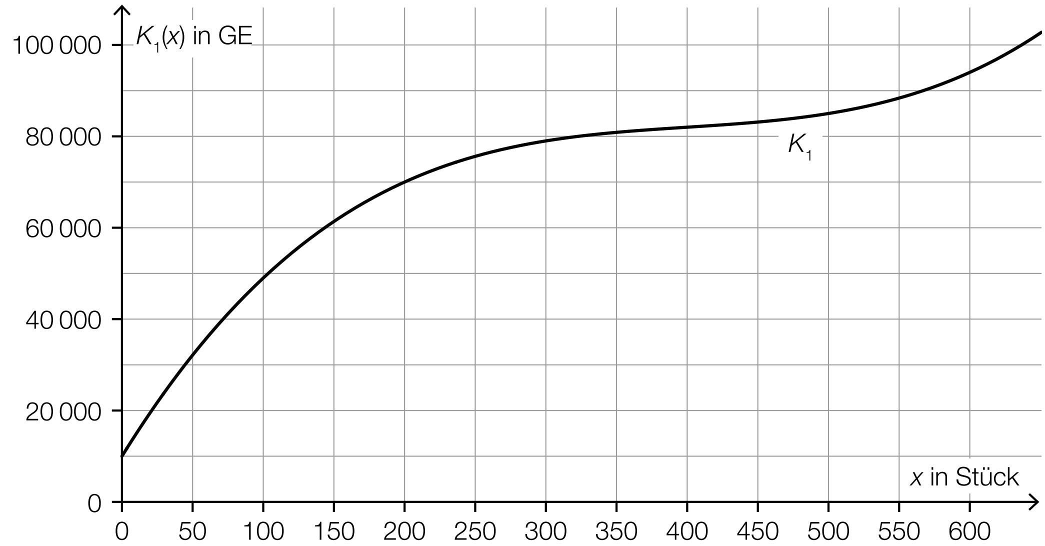
Möbel

a) Im Folgenden sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Nur einer dieser Graphen kann der Graph einer Erlösfunktion sein.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K_1 eines Betriebs bei der Produktion von Kleiderschränken dargestellt.



x ... Produktionsmenge in Stück
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Lesen Sie das größtmögliche Produktionsintervall ab, in dem der Verlauf der Kostenfunktion K_1 degressiv ist. *[0/1 P.]*
2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Stückkosten bei einer Produktion von 200 Stück. *[0/1 P.]*

Die Fixkosten können um 10 % reduziert werden.

3) Begründen Sie, warum sich die Grenzkostenfunktion dadurch nicht ändert. *[0/1 P.]*

c) Die Kostenfunktion K_2 eines Betriebs bei der Produktion von Kommoden ist gegeben durch:

$K_2(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + a \cdot x + 3000$
x ... Produktionsmenge in Stück
$K_2(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 100 Kommoden hat der Betrieb Gesamtkosten von 35 000 GE.

1) Berechnen Sie den Koeffizienten a der Kostenfunktion K_2. *[0/1 P.]*
2) Berechnen Sie das Betriebsoptimum. *[0/1 P.]*

Der Break-even-Point wird bei einem Verkauf von 60 Kommoden erreicht.

3) Berechnen Sie den Preis pro Kommode bei dieser verkauften Menge. *[0/1 P.]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Reisebus

Ein Reiseunternehmen plant, einen neuen Reisebus anzuschaffen.

a) Für den Reisebus rechnet das Reiseunternehmen mit Anschaffungskosten in Höhe von € 180.000, einer Nutzungsdauer von 6 Jahren und einem Restwert in Höhe von € 40.000. Zudem rechnet es mit jährlichen Versicherungskosten in Höhe von € 3.300, jährlichen Treibstoffkosten in Höhe von € 8.500 und jährlichen Reparaturkosten in Höhe von € 8.200. Das Reiseunternehmen erwartet durch die Anschaffung des Reisebusses jährliche Einnahmen in Höhe von € 50.000.

1) Übertragen Sie alle Einnahmen und Ausgaben in die nachstehende Tabelle. *[0/1 P.]*

Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

2) Erklären Sie anhand der obigen Tabelle, warum diese Investition vorteilhaft sein könnte. *[0/1 P.]*

Das Reiseunternehmen rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

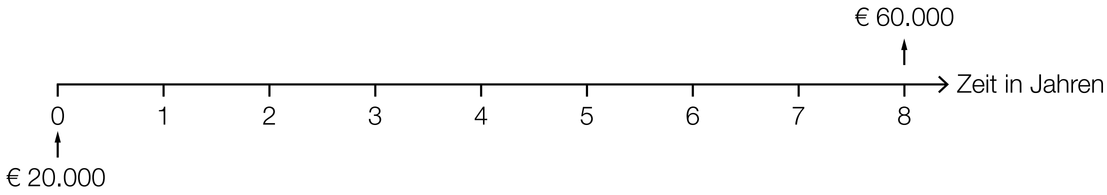
3) Berechnen Sie den Kapitalwert dieser Investition. *[0/1 P.]*

b) Für den Ankauf des Reisebusses hat das Reiseunternehmen in den letzten 8 Jahren eine Rücklage in Höhe von € 60.000 gebildet.

Die Höhe der Rücklage ergibt sich aus einer Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 und regelmäßigen Zahlungen *R*:

$$20\,000 \cdot 1{,}021^8 + R \cdot \frac{1{,}021^4 - 1}{1{,}021 - 1} \cdot 1{,}021^2 = 60\,000$$

1) Tragen Sie alle Zahlungen *R* auf der nachstehenden Zeitachse ein. *[0/1 P.]*



2) Berechnen Sie die Höhe von *R*. *[0/1 P.]*

c) Für den Ankauf des Reisebusses nimmt das Reiseunternehmen einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p.a. auf. Die Rückzahlung des Kredits erfolgt durch gleichbleibende jährliche Annuitäten.

Einige Werte des Tilgungsplans sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2				€ 35.331,00
3	€ 1.059,93	€ 2.440,07		

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die Höhe der Annuität in die grau markierte Zelle ein. *[0/1 P.]*

Bei der weiteren Tilgung des Kredits verbleibt ein Restbetrag, der ein Jahr nach der letzten Vollrate bezahlt wird.

2) Ermitteln Sie die Höhe dieses Restbetrags. *[0/1 P.]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Handyproduktion

Ein Unternehmen produziert die zwei Handymodelle H_1 und H_2.
Dabei werden die beiden Mikrochip-Sorten M_1 und M_2 benötigt.
Für die Produktion der Mikrochips werden unter anderem die Rohstoffe Silicium (R_1) und Kupfer (R_2) benötigt.

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix $\boldsymbol{R}$ entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen (in ME) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Mikrochip-Sorten.

	M_1	M_2
R_1	5	7
R_2	1	2

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix $\boldsymbol{S}$ entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Mikrochips (in Stück) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle.

	H_1	H_2
M_1	5	1
M_2	0	4

a) 1) Ermitteln Sie diejenige Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle beschreibt. *[0/1 P.]*

Bei einer bestimmten Produktionsvariante wird die Matrix $\boldsymbol{S}$ durch eine Matrix $\boldsymbol{S_1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$ so ersetzt, dass sich anstelle von $\boldsymbol{A}$ die neue Matrix $\begin{pmatrix} 46 & 33 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ ergibt.

2) Ermitteln Sie x. *[0/1 P.]*

b) Die Anzahlen der täglich produzierten Handys der Handymodelle H_1 und H_2 können durch den Vektor $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Die Preise pro ME für die Rohstoffe R_1 und R_2 können durch den Vektor $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\boldsymbol{S} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie die Zeilen- und die Spaltenanzahl der Matrix $\vec{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}$.

Zeilenanzahl: __________

Spaltenanzahl: __________ *[0/1 P.]*

c) Der Prozess der Handyproduktion wird geändert. Die neue Verflechtung zwischen den Rohstoffen, den Mikrochips und den Handymodellen kann durch die nachstehende Tabelle beschrieben werden.

	R_1	R_2	M_1	M_2	H_1	H_2
R_1	0	0	5	7	6	0
R_2	0	0	1	2	0	0
M_1	0	0	0	0	5	1
M_2	0	0	0	0	0	4
H_1	0	0	0	0	0	0
H_2	0	0	0	0	0	0

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Gozinto-Graphen so, dass er den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*

Die tägliche Nachfrage nach den Rohstoffen R_1 und R_2, den Mikrochips M_1 und M_2 sowie den Handymodellen H_1 und H_2 kann durch den Vektor $\vec{n}$ beschrieben werden:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\,000 \\ 1\,000 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix}$$

2) Lesen Sie die Anzahl der insgesamt täglich nachgefragten Mikrochips ab. *[0/1 P.]*

d) Die häufigsten Fehler, die bei den Handymodellen H_1 und H_2 auftreten, sind Displayfehler und Akkufehler.

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese beiden Fehler auftreten, sind in der nachstehenden Vierfeldertafel dargestellt.

	Displayfehler	kein Displayfehler	Summe
Akkufehler	0,01	0,02	0,03
kein Akkufehler	0,01	0,96	0,97
Summe	0,02	0,98	1,00

1) Beschreiben Sie ein Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$1 - 0{,}96 = 0{,}04$ *[0/1 P.]*

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die beiden Ereignisse „Displayfehler“ und „Akkufehler“ voneinander unabhängig sind. *[0/1 P.]*

Bei einem Handy ist ein Displayfehler aufgetreten.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung auch ein Akkufehler auftritt. *[0/1 P.]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Streaming

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen.
Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.
Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. *[1 Punkt]*
2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$. *[1 Punkt]*
3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt. *[1 Punkt]*

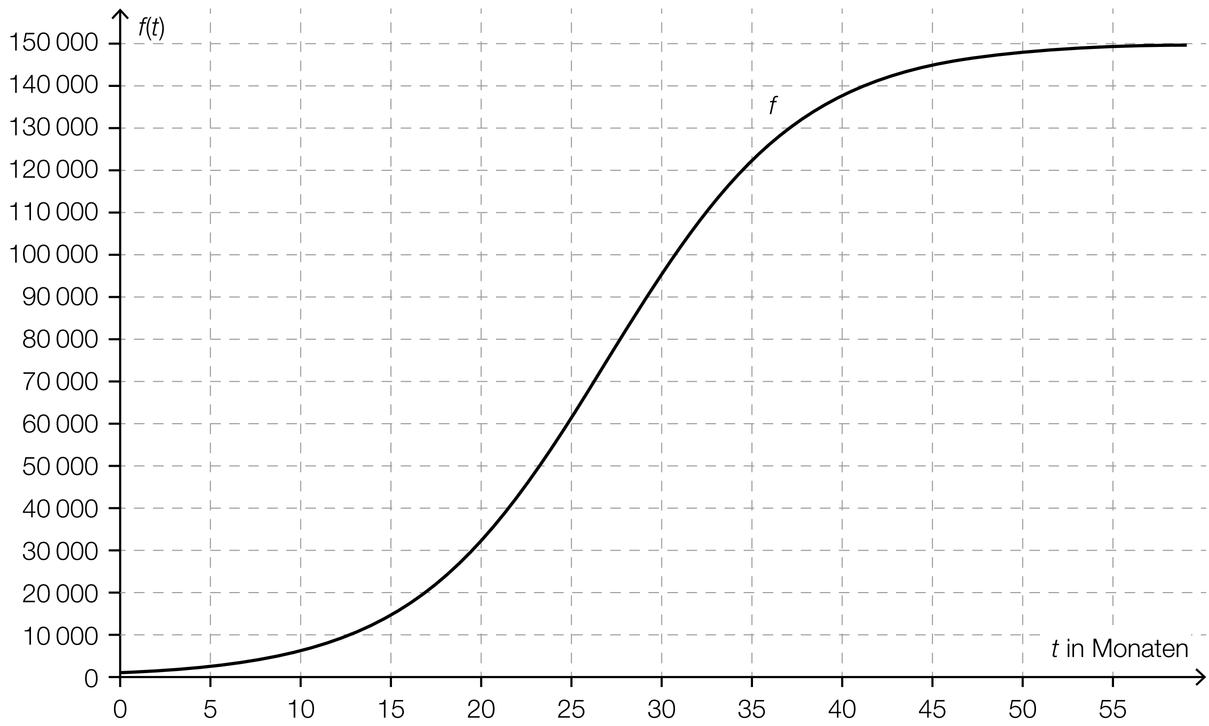
b) In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Kunden für einen bestimmten Zeitraum angegeben.

Zeit t in Monaten	18	20	24	26	28
Anzahl der Kunden	23 800	32 200	54 600	68 000	81 900

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. *[1 Punkt]*

c) Die über einen längeren Zeitraum betrachtete zeitliche Entwicklung der Anzahl der Kunden kann näherungsweise durch die logistische Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Zeitpunkt des stärksten Wachstums der Anzahl der Kunden ab. *[1 Punkt]*

Für die Funktion f gilt: $f(t) = \dfrac{150\,000}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$

Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

2) Ermitteln Sie die Parameter c und λ der Funktion f. *[2 Punkte]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Wohnanlage

Eine Wohnanlage wird saniert.

a) Die Kosten für die Sanierung in Höhe von € 52.647,60 werden proportional zur Wohnungsgröße aufgeteilt.
Die jeweiligen Größen der 4 Wohnungen sind: 52 m², 60 m², 78 m² und 102 m².

1) Berechnen Sie den Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung in Euro. *[1 Punkt]*

b) Zur Finanzierung der Sanierung nehmen die Wohnungseigentümer einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf.
Sie vereinbaren mit der Bank, den Kredit durch 6 vorschüssige Jahresraten R zu tilgen. Die erste Jahresrate ist nach 3 Jahren fällig. Für die Rückzahlung wird der Jahreszinssatz i vereinbart.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Kreditbetrag und Jahresraten) auf einer Zeitachse. *[1 Punkt]*

2) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R. Verwenden Sie dabei den Jahreszinssatz i. *[1 Punkt]*

Unmittelbar vor dem Bezahlen der 1. Jahresrate entscheiden sich die Wohnungseigentümer dafür, bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen den Kredit mit nur 3 Jahresraten zu tilgen.

3) Argumentieren Sie, dass diese neuen Jahresraten weniger als doppelt so hoch wie die zuvor vereinbarten Jahresraten sind. *[1 Punkt]*

c) Eine andere Bank unterbreitet den Wohnungseigentümern zur Rückzahlung eines Kredits ein Angebot, bei dem der Kredit bei einem fixen Jahreszinssatz in 5 Jahren vollständig getilgt wird.
Im Folgenden ist ein Teil des Tilgungsplans dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 20.000,00
1	€ 600,00		€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5				€ 0,00

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Kredits. *[1 Punkt]*

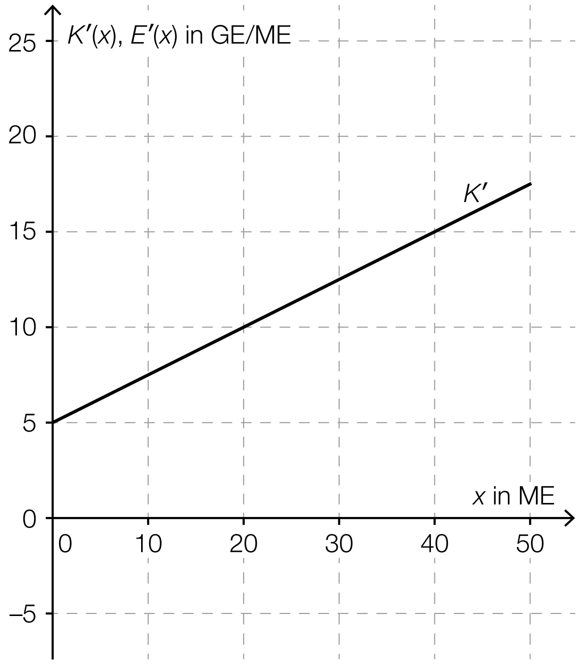
2) Tragen Sie im obigen Tilgungsplan die fehlenden Beträge in die grau markierten Zellen ein. *[2 Punkte]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Scharniere

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der Grenzkostenfunktion K'. *[1 Punkt]*

Die Fixkosten für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren betragen 50 GE.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K. *[1 Punkt]*

Die Grenzerlösfunktion E' für *Clip*-Scharniere ist gegeben durch:

$E'(x) = -0{,}5 \cdot x + 20$

x ... Absatzmenge in ME
$E'(x)$ ... Grenzerlös bei der Absatzmenge x in GE/ME

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Grenzerlösfunktion E' im Intervall [0; 50] ein. *[1 Punkt]*

4) Interpretieren Sie die Nullstelle der Grenzerlösfunktion E' in Bezug auf den Erlös. *[1 Punkt]*

b) Die Durchschnittskosten für die Herstellung des Scharniers *Modul* lassen sich durch die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ beschreiben:

$\overline{K}(x) = 0{,}25 \cdot x + 3 + \frac{1}{x}$
x ... Produktionsmenge in ME
$\overline{K}(x)$ ... Durchschnittskosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Es werden folgende Rechenschritte ausgeführt:

$\overline{K}'(x) = 0{,}25 - \frac{1}{x^2}$

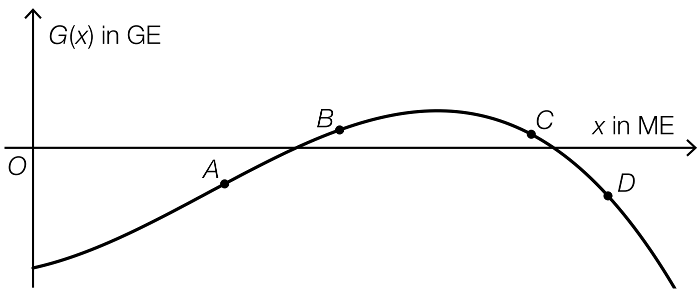
$0{,}25 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{0{,}25}}$

$x_1 = 2, \quad (x_2 = -2)$

1) Interpretieren Sie die Lösung $x_1 = 2$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

2) Zeigen Sie mithilfe der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen, dass man als Ableitung von $\frac{1}{x}$ den Ausdruck $-\frac{1}{x^2}$ erhält. *[1 Punkt]*

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für das Scharnier *Top* dargestellt.
Auf dem Graphen der Gewinnfunktion G sind die Punkte A, B, C und D eingezeichnet.



1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den zutreffenden Punkt aus A bis D zu. *[2 zu 4]*
[1 Punkt]

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	

A	Punkt *A*
B	Punkt *B*
C	Punkt *C*
D	Punkt *D*

d) Der Gewinn für das Scharnier *Cardo* kann durch die Funktion G beschrieben werden:

$G(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ermitteln Sie die untere Gewinngrenze. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Seifenherstellung

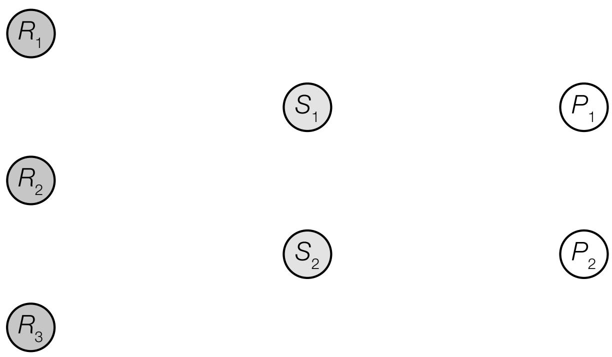
In einem Betrieb werden Seifen hergestellt und verpackt. Zur Herstellung von Seife werden die Rohstoffe *Sheabutter* (R_1), *verschiedene Öle* (R_2) und *Natronlauge* (R_3) verwendet.

a) In einer Produktionsschiene werden die beiden Seifen S_1 und S_2 hergestellt.

1. Produktionsstufe:
Für 1 ME von S_1 benötigt man 35 ME von R_1, 80 ME von R_2 und 15 ME von R_3.
Für 1 ME von S_2 benötigt man 50 ME von R_2 und 6 ME von R_3.

2. Produktionsstufe:
Beide Seifen werden in den 2 unterschiedlichen Packungen P_1 und P_2 zum Kauf angeboten.
In 1 Packung P_1 befinden sich 2 ME von S_1 und 1 ME von S_2.
In 1 Packung P_2 befinden sich 2 ME von S_1 und 3 ME von S_2.

1) Veranschaulichen Sie die Produktionsverflechtung von den Rohstoffen bis zu den Packungen als Gozinto-Graph. *[1 Punkt]*



2) Erstellen Sie die beiden Matrizen, die die einzelnen Produktionsstufen beschreiben. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Zusammenstellung der Packungen beschreibt. *[1 Punkt]*

Ein Kunde bestellt 20 Packungen P_1 und 30 Packungen P_2.

4) Ermitteln Sie den Mengenbedarf an Rohstoffen für diese Bestellung. *[1 Punkt]*

b) In einer anderen Produktionsschiene werden aus den 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Seifen S_3 und S_4 hergestellt. Die Seifen werden in Form einer Geschenkpackung P verkauft.

Die Produktionsverflechtung wird durch die nachstehende Tabelle beschrieben. Die eingetragenen Werte entsprechen den ME im Produktionsprozess.

	R_1	R_2	R_3	S_3	S_4	P
R_1	0	0	0	15	10	0
R_2	0	0	0	75	52	0
R_3	0	0	0	9,6	8,5	0
S_3	0	0	0	0	0	2
S_4	0	0	0	0	0	2
P	0	0	0	0	0	0

Die Summe der Einträge in der 3. Zeile beträgt 18,1.

1) Interpretieren Sie den Wert 18,1 im Zusammenhang mit der Produktion der beiden Seifen. *[1 Punkt]*

2) Lesen Sie aus der obigen Tabelle ab, wie viele ME Seife sich in einer Geschenkpackung befinden. *[1 Punkt]*

Im Lager befinden sich 1 260 ME von R_1 und 6 340 ME von R_2.

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob bei diesem Lagerstand jeweils 50 ME von den beiden Seifen S_3 und S_4 hergestellt werden können. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

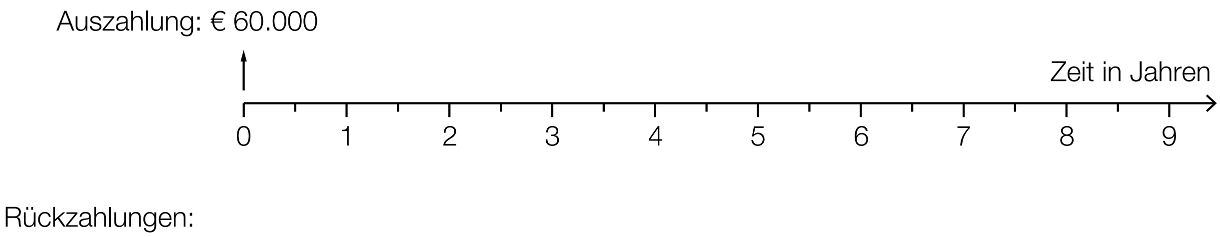
Obsthändler

Ein Obsthändler plant die Renovierung seiner Geschäftsräume.

a) Die Renovierung soll durch einen Kredit in Höhe von € 60.000 finanziert werden.

Das Angebot einer Bank sieht folgende Rückzahlungen vor:
- eine Einmalzahlung in Höhe von € 15.000 am Ende des 1. Jahres
- eine weitere Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 am Ende des 3. Jahres
- 6 Halbjahresraten in Höhe von jeweils R, die erste Rate ist am Ende des 4. Jahres fällig

1) Veranschaulichen Sie diese Rückzahlungen auf der nachstehenden Zeitachse. *[1 Punkt]*



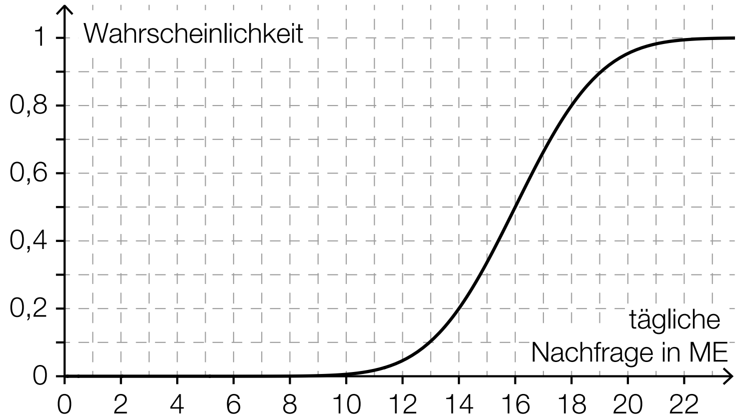
2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R bei einem Semesterzinssatz von 3 % p. s. *[2 Punkte]*

b) Der Obsthändler überlegt, die Renovierung erst in 2 Jahren durchzuführen, um bis dahin Geld anzusparen. Er geht davon aus, dass er monatlich nachschüssig € 2.400 auf ein Konto einzahlen könnte. Dadurch möchte er innerhalb von 2 Jahren € 60.000 ansparen.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz i, bei dem der Obsthändler sein Sparziel genau erreichen würde. *[1 Punkt]*

2) Begründen Sie ohne Berechnung, warum der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger ist, wenn die monatlichen Einzahlungen vorschüssig erfolgen. *[1 Punkt]*

c) Die tägliche Nachfrage X nach einer bestimmten Obstsorte ist bei diesem Obsthändler annähernd normalverteilt. Der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der Abbildung den Erwartungswert μ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$ ab.

$\mu =$ ____________________ ME

$P(X \leq 14) =$ ____________________ *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Werte die Standardabweichung von X. *[1 Punkt]*

Der Obsthändler möchte herausfinden, welche Menge dieser Obstsorte er lagern sollte (Bestandsmenge). Zur Ermittlung der optimalen Bestandsmenge kann das sogenannte *Zeitungsjungen-Modell* verwendet werden.
Laut diesem Modell ist die Bestandsmenge q dann optimal, wenn Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Nachfrage höchstens q ist, beträgt $\frac{p-c}{p}$, also:

$P(X \leq q) = \frac{p-c}{p}$
q … optimale Bestandsmenge in ME
c … Einkaufspreis in GE/ME
p … Verkaufspreis in GE/ME

3) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung für $c = 2$ GE/ME und $p = 5$ GE/ME die zugehörige optimale Bestandsmenge. *[1 Punkt]*

Man betrachtet den Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ mit $p \neq 0$.

4) Kreuzen Sie die auf diesen Ausdruck zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

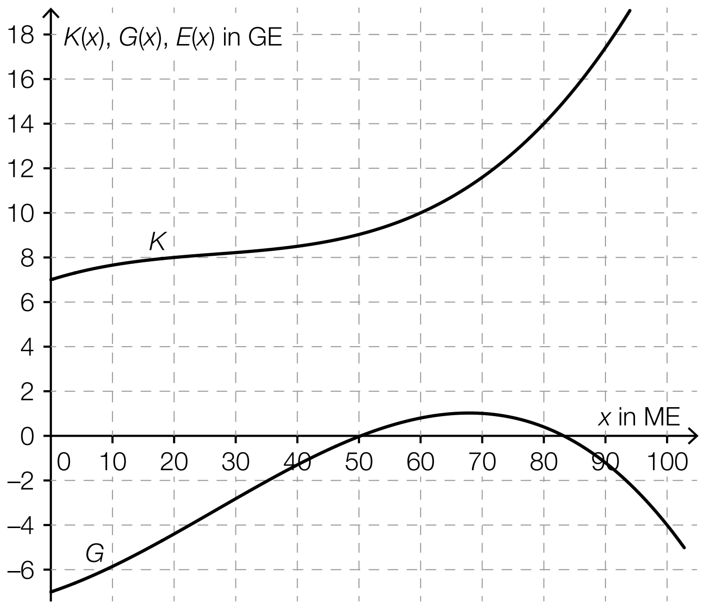
Wenn man für p und c die gleiche positive Zahl einsetzt, ist der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ nicht definiert.	☐
Der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ kann auch in der Form $p - c : p$ angeschrieben werden.	☐
Wenn sowohl p als auch c verdoppelt werden, bleibt der Wert des Ausdrucks $\frac{p-c}{p}$ unverändert.	☐
Wenn p das Doppelte von c ist, dann hat der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ den Wert $\frac{1}{3}$.	☐
Der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ kann für $p \neq 1$ zu $1 - c$ vereinfacht werden.	☐

Aufgabe 8 (Teil B)

Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen

Unbeschriebene CDs und DVDs werden als *Rohlinge* bezeichnet.

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Gewinnfunktion G für die Produktion von CD-Rohlingen dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen linearen Erlösfunktion E ein. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem die CD-Rohlinge verkauft werden. *[1 Punkt]*

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn G_{max} ab.

$G_{max} \approx$ ____________________ GE *[1 Punkt]*

b) Für bestimmte hochwertige DVD-Rohlinge ist das Unternehmen Monopolist.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

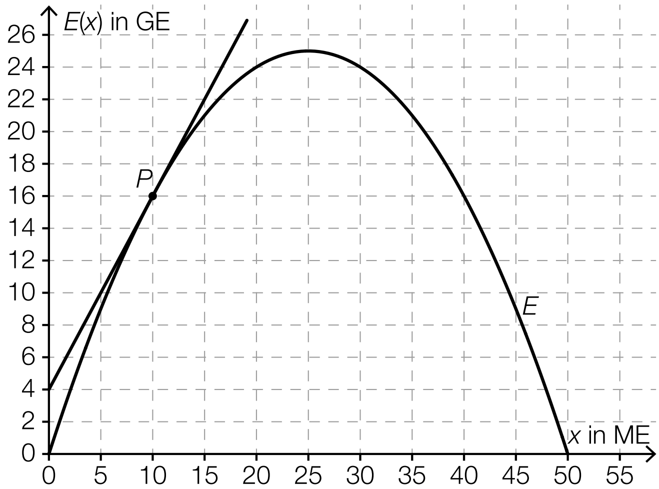
$p_N(x) = a \cdot x + b$

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die Sättigungsmenge angibt. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$\frac{a}{b}$	☐
$\frac{b}{a}$	☐
$-\frac{a}{b}$	☐
$-\frac{b}{a}$	☐
$-b - a$	☐

c) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Erlösfunktion E für spezielle DVD-Rohlinge dargestellt. Zusätzlich ist die Tangente an den Graphen von E in einem Punkt P eingezeichnet.



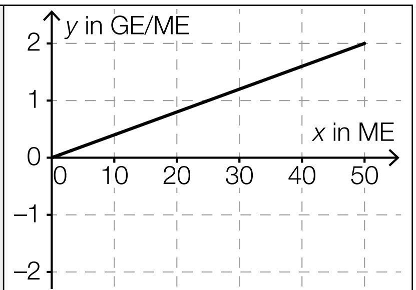
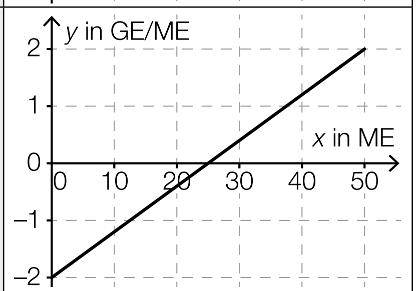
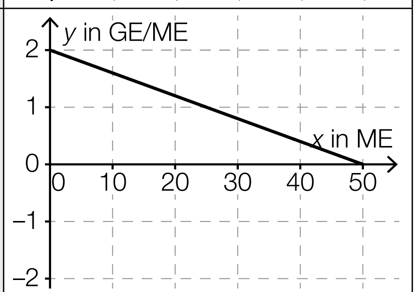
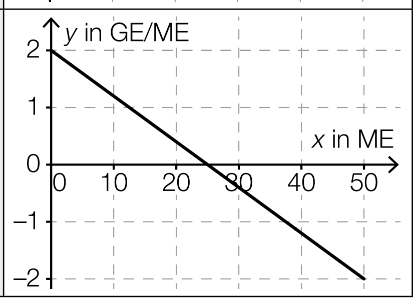
1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Tangente.

$k =$ ____________________ GE/ME [1 Punkt]

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Tangente im gegebenen Sachzusammenhang. [1 Punkt]

3) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zugehörigen Graphen aus A bis D zu. [2 zu 4] [1 Punkt]

Grenzerlösfunktion E'	
Preisfunktion der Nachfrage p_N	

A	
B	
C	
D	

Aufgabe 6 (Teil B)

Sozialausgaben

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020. *[1 Punkt]*

b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:
$\sqrt[5]{\frac{87,8}{71,2}} - 1 \approx 0,043$ *[1 Punkt]*

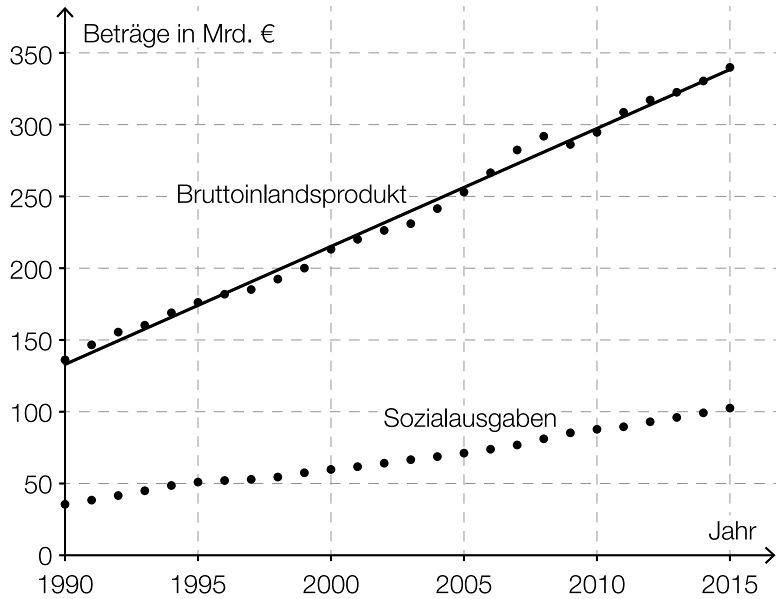
Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015. *[1 Punkt]*

c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt.
Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.

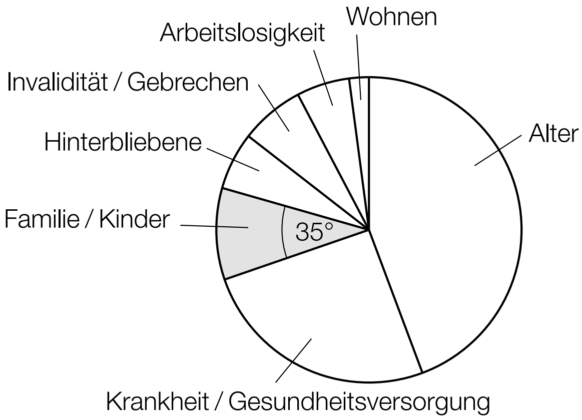


1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt. *[1 Punkt]*

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015. *[1 Punkt]*

d) Die Verteilung der Sozialausgaben von insgesamt 102,5 Milliarden Euro für das Jahr 2015 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Bereich „Familie / Kinder" ist markiert.



1) Ermitteln Sie den Betrag, der im Jahr 2015 für den Bereich „Familie / Kinder" ausgegeben worden ist. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Fruchtsaftproduktion

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1\,215$

x ... Produktionsmenge in hl
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

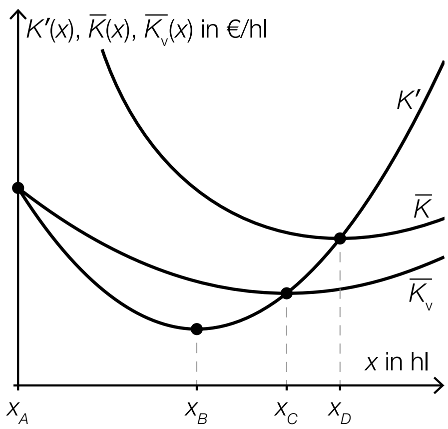
Von der Kostenfunktion ist bekannt:
I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.
II: $K''(25) = 0$

1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b. *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K', der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt.
Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D, sind auf der horizontalen Achse markiert.



1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $x \geq 0$

x ... Absatzmenge in hl
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in €

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]* *[1 Punkt]*

Der Koeffizient a muss ___①___ sein, weil der Graph von E ___②___.

①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
durch den Ursprung geht	☐
keinen Wendepunkt hat	☐
nach unten geöffnet ist	☐

2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird. *[1 Punkt]*

d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$G'(x) = -0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$

x ... Absatzmenge in hl
$G'(x)$ ... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird. *[1 Punkt]*

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten. *[1 Punkt]*

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

3) Ermitteln Sie diesen Bereich. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Parkgarage

Eine Baugesellschaft errichtet eine Parkgarage.
Es wird eine Nutzungsdauer von 40 Jahren angenommen.
Die Baugesellschaft rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

a) Die Baugesellschaft rechnet mit jährlich nachschüssigen Betriebskosten in Höhe von jeweils € 64.000.

1) Berechnen Sie den Barwert der Betriebskosten für die gesamte Nutzungsdauer. *[1 Punkt]*

b) Die Wartungskosten (in €) werden mit W_1 nach 10 Jahren, W_2 nach 20 Jahren und W_3 nach 30 Jahren veranschlagt.

1) Erstellen Sie mithilfe von W_1, W_2 und W_3 eine Formel zur Berechnung des Barwerts B der gesamten Wartungskosten.

$B =$ ____ *[1 Punkt]*

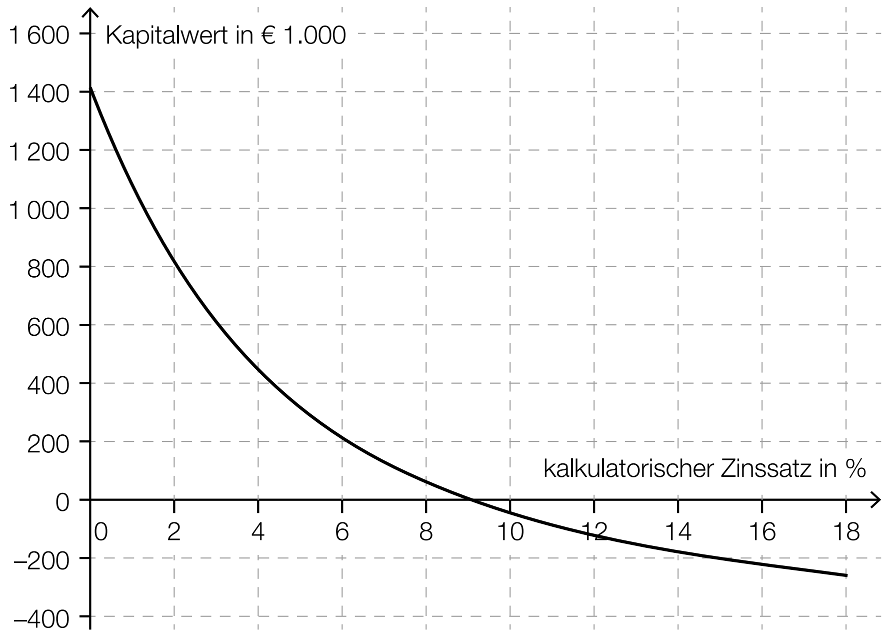
W_1 und W_2 werden mit jeweils € 60.000 veranschlagt. Der Barwert B beträgt € 92.582,56.

2) Berechnen Sie W_3. *[1 Punkt]*

c) Die monatliche Miete für einen Parkgaragenplatz wird mit € 105 veranschlagt.
Die Parkgarage verfügt über 120 Plätze.
Die Baugesellschaft rechnet mit monatlichen Mieteinnahmen in Höhe von € 10.080.
Der Auslastungsgrad gibt an, wie viel Prozent der Parkgaragenplätze vermietet sind.

1) Ermitteln Sie den Auslastungsgrad der Parkgarage, mit dem die Baugesellschaft rechnet. *[1 Punkt]*

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert für die Parkgarage (in € 1.000) in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz (in Prozent) dargestellt:



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Kapitalwert für den kalkulatorischen Zinssatz 4 % ab. Geben Sie das Ergebnis in Euro an.

Kapitalwert: € ____________________ *[1 Punkt]*

Die Baugesellschaft senkt die Anschaffungskosten für die Parkgarage um € 200.000.

2) Argumentieren Sie, dass der interne Zinssatz dadurch auf über 10 % steigt. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Käseproduktion

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$$K'(x) = 0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5$$

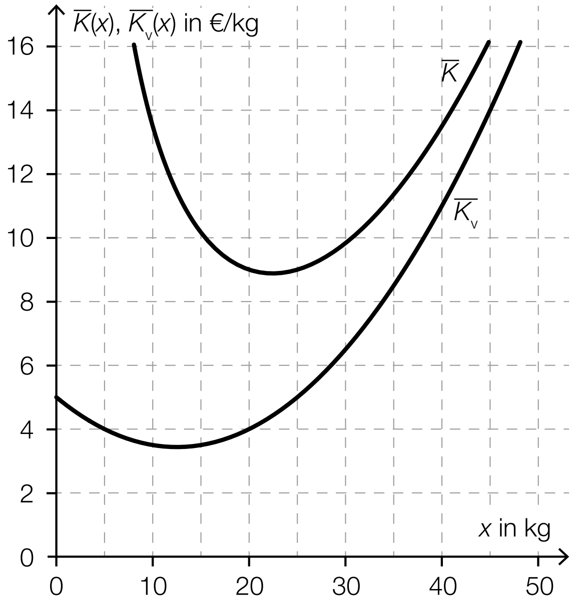
x … Produktionsmenge in kg
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K. *[1 Punkt]*
2) Berechnen Sie die Kostenkehre. *[1 Punkt]*
3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$ *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Stückkostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an. *[1 Punkt]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an. *[1 Punkt]*

c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion G beschrieben werden.

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... Absatzmenge in kg
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.
Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.
Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von G ermittelt werden können. *[2 Punkte]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[1 Punkt]*

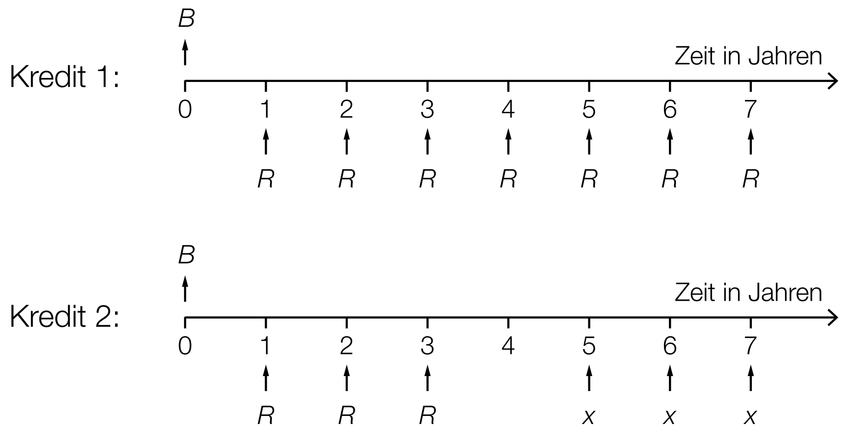
Aufgabe 8 (Teil B)

Kredit und Sparbuch

Die Begriffe *Kredit* und *Sparbuch* werden in dieser Aufgabe in vereinfachter Form ohne Berücksichtigung von Gebühren oder Steuern verwendet.

a) Die unten stehenden Zeitachsen beschreiben die Rückzahlungen von 2 Krediten, die nach 7 Jahren vollständig getilgt sind.

Bei beiden Krediten sind der Zinssatz, die Kredithöhe B und die Ratenhöhe R jeweils gleich hoch.



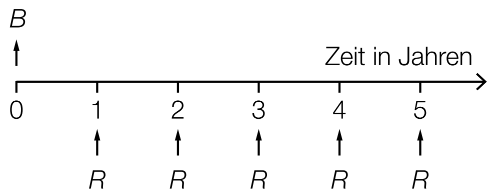
1) Argumentieren Sie, dass die Ratenhöhe x höher sein muss als die Ratenhöhe R. *[1 Punkt]*

Die Kredithöhe B beträgt € 10.000. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie für Kredit 2 die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre. *[1 Punkt]*

b) Ein Kredit in der Höhe B wird mit einem Jahreszinssatz i verzinst.
Die Höhe der jährlichen Rate beträgt R.



Nachdem die erste Rate R zurückgezahlt wurde, beträgt die Restschuld B_1.

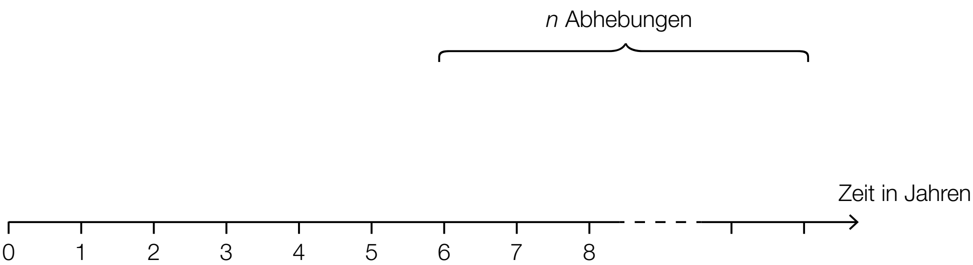
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von B_1 aus B, R und i.

B_1 = ____ *[1 Punkt]*

c) Jemand zahlt in 4 aufeinanderfolgenden Jahren jeweils zu Jahresbeginn einen Betrag in Höhe von € 300 auf ein Sparbuch ein. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

Beginnend 3 Jahre nach der letzten Einzahlung wird jeweils jährlich ein Betrag in Höhe von € 150 abgehoben.
Insgesamt finden n Abhebungen statt. Die letzte Abhebung setzt sich dabei aus den € 150 und einem Restbetrag x mit € $0 < x <$ € 150 zusammen.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zeitachse so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[1 Punkt]*



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$K = 300 \cdot 1{,}015^6 + 300 \cdot 1{,}015^5 + 300 \cdot 1{,}015^4 + 300 \cdot 1{,}015^3 \approx 1\,283{,}33$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von K im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Anzahl n der Abhebungen. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Kfz-Bestand

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist. *[1 Punkt]*

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$$

$$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Jemand berechnet weiters:

$$2 = 1{,}0169...^{t}$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) Der Kfz-Bestand kann nicht unbeschränkt wachsen.

Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands kann in einem Modell beschränkten Wachstums durch die Funktion K_B beschrieben werden:

$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_B(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

Der Graph der Funktion K_B soll durch die Datenpunkte für die Jahre 1992 und 2012 verlaufen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Parameter b und λ der Funktion K_B ermittelt werden können. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie die Parameter b und λ. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells eine Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020. *[1 Punkt]*

d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$K_L(t) = \dfrac{22{,}5}{3 + 2 \cdot e^{-0{,}06264 \cdot t}}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_L(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich der Kfz-Bestand gemäß diesem Modell langfristig dem Wert 7,5 Millionen annähert. *[1 Punkt]*

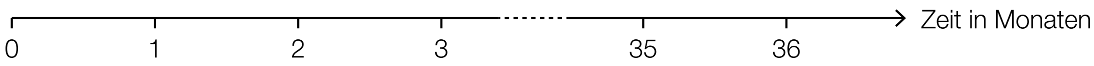
Aufgabe 6 (Teil B)

Autokauf

Frau Kopecek möchte ein neues Auto mit einem Listenpreis von € 17.100 kaufen. Dabei stehen verschiedene Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

a) Ein Händler verlangt eine Anzahlung von € 3.420 und 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

1) Veranschaulichen Sie die Zahlungen und den Listenpreis auf der nachstehenden Zeitachse. *[1 Punkt]*



Der Händler behauptet, dass es sich bei dieser Finanzierung um eine „Null-Prozent-Finanzierung" handelt.
Unter einer „Null-Prozent-Finanzierung" versteht man, dass keine Zinsen verrechnet werden.

2) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Händlers richtig ist. *[1 Punkt]*

b) Bei „Drittelfinanzierung" muss Frau Kopecek sofort, am Ende des 2. Jahres und am Ende des 3. Jahres jeweils einen gleich hohen Betrag R bezahlen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie R. *[1 Punkt]*

c) Bei einer anderen Finanzierung werden am Ende des 1. Jahres und am Ende des 2. Jahres jeweils € 6.000 bezahlt. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p.a.

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Tilgungsplan für die Jahre 1 und 2. *[1 Punkt]*

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 17.100
1				
2				

2) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, mit der die Schuld am Ende des 3. Jahres vollständig getilgt ist. *[1 Punkt]*

d) Bei Barzahlung gewährt der Händler 8 % Preisnachlass vom Listenpreis.

1) Berechnen Sie den Preis des Autos bei Barzahlung. *[1 Punkt]*

Bei einer Ratenfinanzierung verlangt der Händler eine Anzahlung von € 3.420 sowie 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.
Barzahlung und Ratenfinanzierung sind bei einem bestimmten Jahreszinssatz gleichwertig.

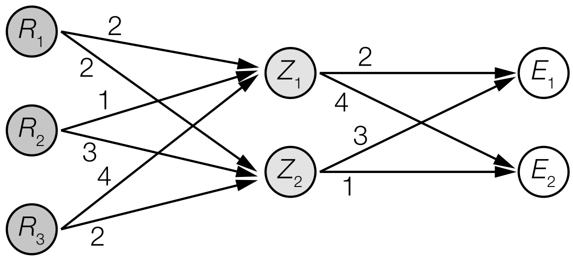
2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz. *[2 Punkte]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Zweistufige Produktionsprozesse

Ein Produktionsbetrieb stellt aus den 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die 2 Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und aus diesen die 2 Endprodukte E_1 und E_2 her.

Der nachstehend dargestellte Gozinto-Graph beschreibt die Verflechtung von Rohstoffen, Zwischenprodukten und Endprodukten. Er gibt die Menge an Rohstoffen in ME an, die für jeweils 1 ME der Zwischenprodukte benötigt wird. Er gibt weiters die Menge an Zwischenprodukten in ME an, die für jeweils 1 ME der Endprodukte benötigt wird.



a) 1) Erstellen Sie eine Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte beschreibt. *[1 Punkt]*

Der Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte kann durch die Matrix $\boldsymbol{B}$ beschrieben werden.

2) Beschreiben Sie, was mit dem Matrizenprodukt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. *[1 Punkt]*

b) Der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$ beschrieben.

In einem Produktionsprozess sollen 10 ME von E_1 und x ME von E_2 hergestellt werden und es gilt:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 145 \\ 230 \end{pmatrix}$$

1) Interpretieren Sie die Zahl 230 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie x. *[1 Punkt]*

c) Eine andere Produktionsverflechtung hat folgende Eigenschaften:

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte.
Die Matrix $\boldsymbol{D}$ beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte.

$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Es werden e_1 ME von E_1 und e_2 ME von E_2 hergestellt.
Die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 haben die Preise p_1, p_2, p_3 (in GE/ME).

1) Erstellen Sie mithilfe von Matrizen und Vektoren eine Formel zur Berechnung der Gesamtkosten K für diesen Produktionsprozess.

K = ____ *[1 Punkt]*

Es werden 5 ME von E_1 und 8 ME von E_2 hergestellt.

2) Ermitteln Sie die benötigten Mengen der jeweiligen Zwischenprodukte. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Zeitschriften

a) Die Kosten für die Produktion der Sport-Zeitschrift *Bike and Run* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K modelliert werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 100 GE und die Grenzkosten 1,5 GE/ME.

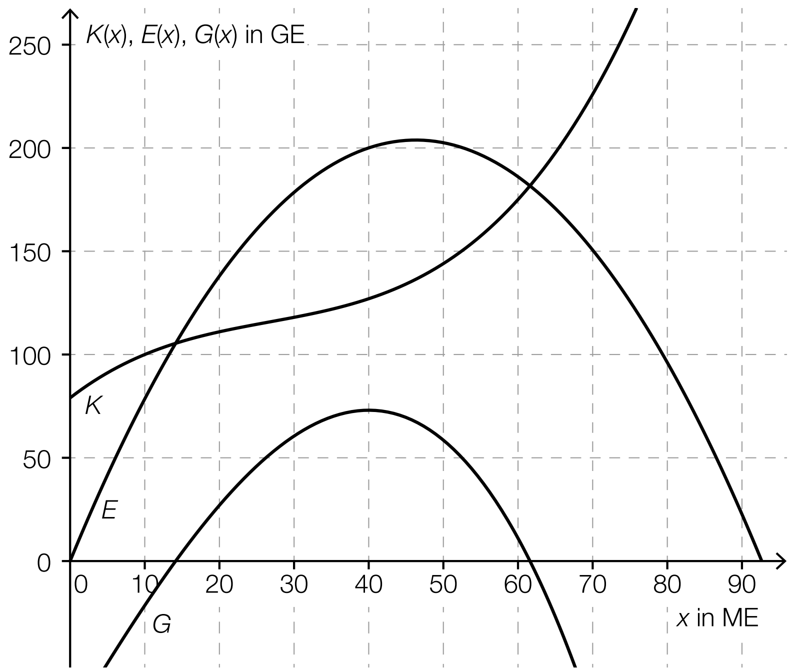
1) Erstellen Sie die beiden Gleichungen, die diesem Sachverhalt entsprechen. *[2 Punkte]*

Weiters gilt: $K''(10) = -0{,}1$

2) Interpretieren Sie das Vorzeichen von $K''(10)$ in Bezug auf den Verlauf des Funktionsgraphen von K. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b und c der Kostenfunktion K. *[1 Punkt]*

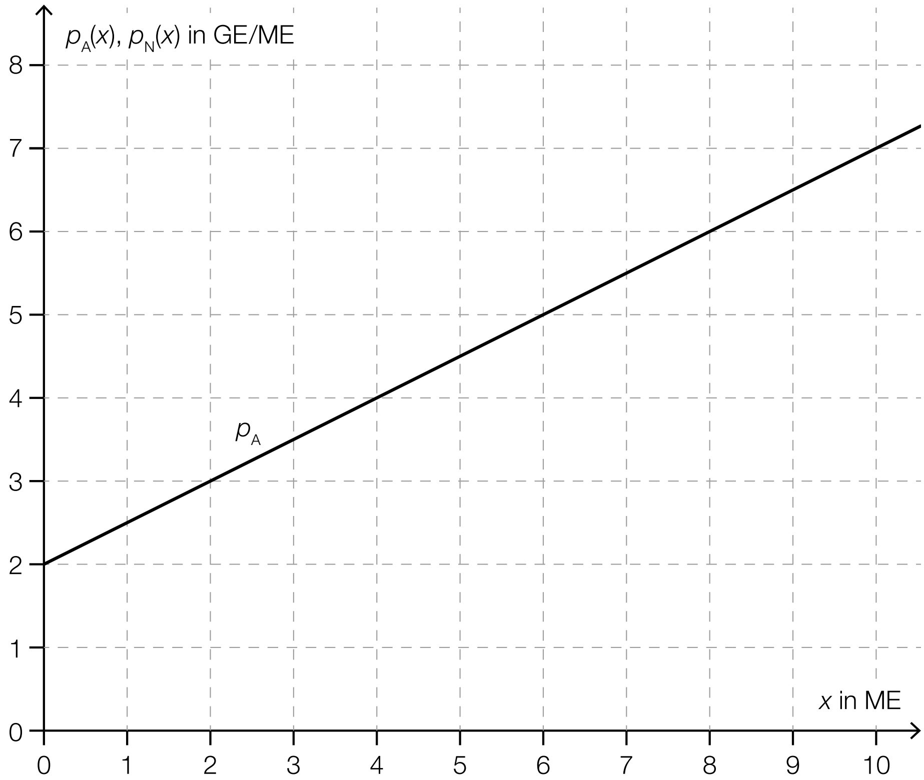
b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K, der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Gewinnfunktion G für die Zeitschrift *Adventure* dargestellt.



Bei einer bestimmten Absatzmenge ist der Gewinn maximal.

1) Ermitteln Sie den Preis der Zeitschrift *Adventure* bei dieser Absatzmenge. *[1 Punkt]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Preisfunktion des Angebots p_A für ein Produkt dargestellt.



Hinsichtlich der Nachfrage ist bekannt: Bei einem Preis von 6 GE/ME können 2 ME abgesetzt werden. Bei einem Preis von 3 GE/ME können 6 ME abgesetzt werden.

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N soll durch eine lineare Funktion modelliert werden.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen von p_N ein. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie die 2. Koordinate des Schnittpunkts von p_A und p_N im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

d) Von einer linearen Preisfunktion der Nachfrage kennt man den Höchstpreis p_h und die Sättigungsmenge x_s.

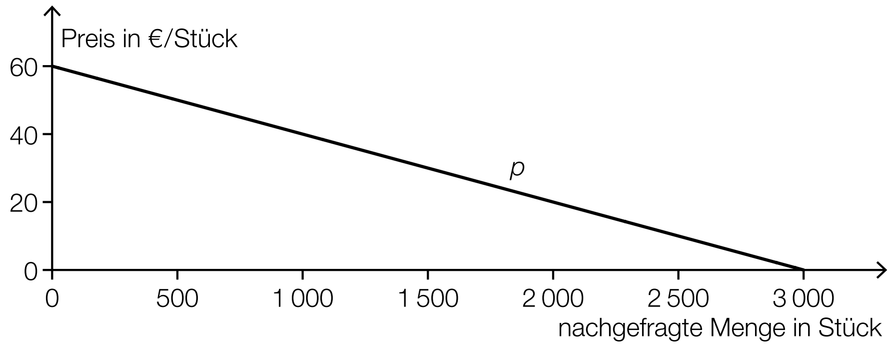
1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck für die Steigung der Preisfunktion der Nachfrage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$\frac{p_h}{x_s}$	☐
$-\frac{p_h}{x_s}$	☐
$\frac{x_s}{p_h}$	☐
$-\frac{x_s}{p_h}$	☐
$\frac{p_h - x_s}{x_s}$	☐

Aufgabe 6 (Teil B)

Betonrohre

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p für Betonrohre des Modells A dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von p im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Die Betonrohre des Modells A werden um € 32 pro Stück verkauft.

3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells A. *[1 Punkt]*

b) Für Betonrohre des Modells B geht man von einer kubischen Gewinnfunktion G aus.

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Gleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

c) Für Betonrohre des Modells C geht man von einer kubischen Kostenfunktion K aus.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Die Fixkosten betragen 150 GE.
Bei einer Produktion von 20 ME ergeben sich Kosten von 530 GE.
Bei einer Produktion von 10 ME ergeben sich Grenzkosten von 17 GE/ME.
Bei einer Produktion von 30 ME ergeben sich Stückkosten von 22 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d. *[3 Punkte]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[1 Punkt]*

d) Der Durchmesser von Betonrohren des Modells D kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 100 mm angenommen werden. Bei 3 % der Rohre ist der Durchmesser kleiner als 98 mm.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Küchenkauf

Frau Tomić will eine neue Küche um € 30.000 kaufen.

a) Um sich die Küche leisten zu können, hat sie vor 7 Jahren, vor 4 Jahren und vor 1 Jahr jeweils € 3.000 auf ein Sparbuch mit fixem Zinssatz eingezahlt. Nun befinden sich € 10.000 auf dem Sparbuch.

1) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Jahreszinssatz. *[1 Punkt]*

Bei diesem Sparvorgang wurden jährlich 25 % Kapitalertragssteuer (KESt) abgezogen.

2) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Sparbuchs vor Abzug der KESt. *[1 Punkt]*

b) Frau Tomić benötigt für den Kauf der Küche einen Kredit in Höhe von € 20.000. Ein Bekannter von Frau Tomić bietet an, ihr das Geld zu einem fixen Zinssatz von 4 % p. a. zu leihen. Für die Rückzahlung vereinbaren sie, dass am Ende des 1. Semesters nur die Zinsen zu bezahlen sind, danach sind Semesterraten in Höhe von jeweils € 2.000 fällig.

1) Berechnen Sie den äquivalenten Semesterzinssatz. *[1 Punkt]*

2) Vervollständigen Sie die Zeilen für die Semester 1 und 2 des nachstehenden Tilgungsplans. *[2 Punkte]*

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1				
2				

3) Erklären Sie, warum die folgende Behauptung richtig ist: „Eine Verdoppelung der Semesterrate führt nicht zu einer Verdoppelung des Tilgungsanteils.“ *[1 Punkt]*

c) Für einen Kredit in Höhe von € 20.000 holt Frau Tomić ein Angebot von einer Bank ein. Die Bank schlägt für die Rückzahlung nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 3.000 bei einem Jahreszinssatz i vor.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Restschuld S nach t Jahren.

S = ____ *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Speiseeis

Ein Restaurant stellt nach eigener Rezeptur Speiseeis für Nachspeisen her.

Aus den 6 Rohstoffen Milch, Obers, Eier, Zucker, Schokolade und Vanille werden die 2 Zwischenprodukte Schokoladeeis und Vanilleeis hergestellt.
Die Mengen in Gramm für die Herstellung jeweils einer Portion Eis sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Schokoladeeis Z_1	Vanilleeis Z_2
Milch R_1	10	25
Obers R_2	40	30
Eier R_3	20	15
Zucker R_4	5	10
Schokolade R_5	20	0
Vanille R_6	0	10

Das Schokoladeeis und das Vanilleeis werden für die Nachspeisen Früchtebecher und Bananensplit verwendet.
Die dazu jeweils benötigten Eisportionen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Früchtebecher E_1	Bananensplit E_2
Schokoladeeis Z_1	2	0
Vanilleeis Z_2	1	3

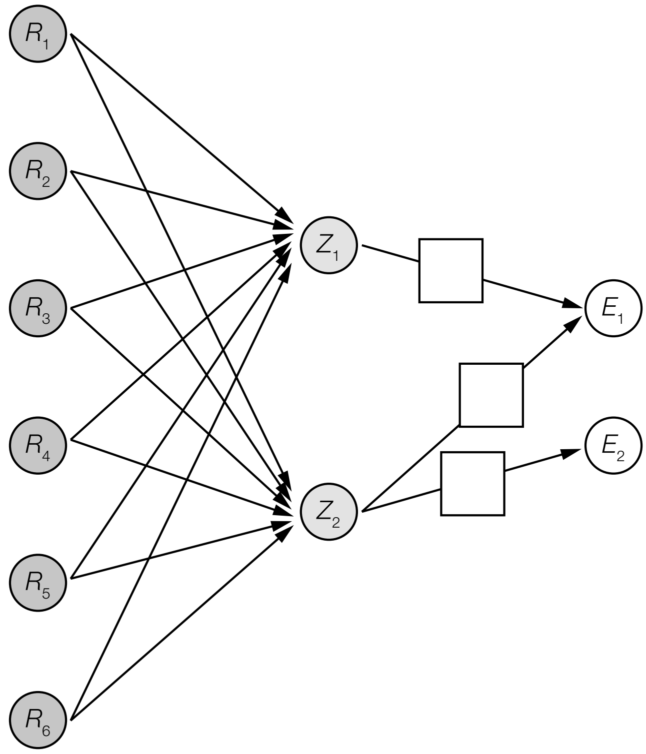
Die Verflechtung, die den Bedarf an Rohstoffen für jeweils eine Nachspeise angibt, kann durch die Verflechtungsmatrix $\boldsymbol{V}$ beschrieben werden.

a) 1) Ermitteln Sie die Verflechtungsmatrix $\boldsymbol{V}$. *[1 Punkt]*

Das Restaurant benötigt täglich 50 Früchtebecher und 30 Bananensplits.

2) Ermitteln Sie denjenigen Vektor, der den täglichen Bedarf an Rohstoffen angibt. *[1 Punkt]*

b) Die Verflechtung kann auch durch einen Gozinto-Graphen dargestellt werden.



1) Tragen Sie im obigen unvollständigen Gozinto-Graphen die fehlenden Zahlen in die entsprechenden Kästchen ein. *[1 Punkt]*

c) Die Preise für die Rohstoffe können in einem Vektor $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden.

1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\vec{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. *[1 Punkt]*

2) Kreuzen Sie die richtige Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrix $\vec{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V}$ an. *[1 aus 5] [1 Punkt]*

1×2-Matrix	☐
2×1-Matrix	☐
2×6-Matrix	☐
6×1-Matrix	☐
6×2-Matrix	☐

d) Nach einer längeren Lagerung der Milch und der Eier besteht die Gefahr, dass diese Rohstoffe zu einem bestimmten Zeitpunkt t verdorben sind.

A bezeichnet das Ereignis, dass die Milch zum Zeitpunkt t verdorben ist. Das Ereignis A tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % ein.
B bezeichnet das Ereignis, dass die Eier zum Zeitpunkt t verdorben sind. Das Ereignis B tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % ein.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % sind beide Rohstoffe zum Zeitpunkt t verdorben.

Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse können in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[1 Punkt]*

	A	nicht A	Summe
B			
nicht B			
Summe			

2) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B voneinander abhängig sind. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Werbung

Der Campus einer Universität beherbergt 1200 Studierende. Eine Fast-Food-Kette möchte eine Filiale mit neuen, spezifisch auf Studierende abgestimmten Produkten am Campusgelände eröffnen. Es kursiert ein Gerücht, dass ein berühmter Hollywoodstar bei der Eröffnung der Filiale anwesend sein wird.

Die Funktion N_G beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben:

$$N_G(t) = \frac{1200}{1 + 1199 \cdot e^{-0{,}99 \cdot t}}$$

t ... Zeit nach Aufkommen des Gerüchts in Tagen
$N_G(t)$ ... Anzahl der Studierenden, die vom Gerücht bis zum Zeitpunkt t erfahren haben

a) 1) Berechnen Sie, wie viele Studierende nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben. *[1 Punkt]*

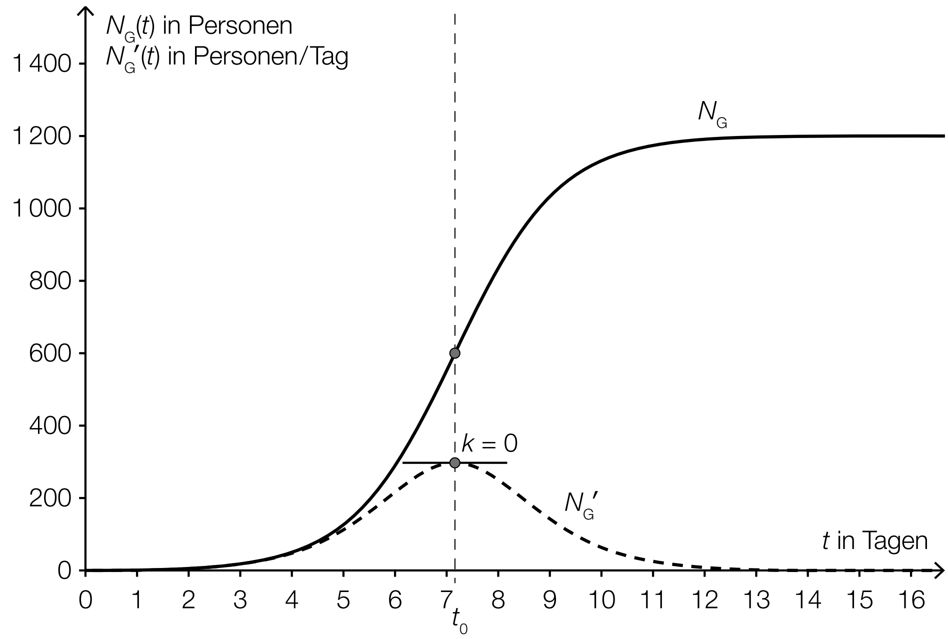
b) Auf einem anderen vergleichbaren Campus wird gleichzeitig eine Werbekampagne mit Plakaten gestartet.
Die Funktion N_W beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne erreicht werden:

$$N_W(t) = 1200 \cdot (1 - e^{-0{,}077 \cdot t})$$

t ... Zeit nach Beginn der Werbekampagne in Tagen ($t \geq 1$)
$N_W(t)$ ... Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne bis zum Zeitpunkt t erreicht wurden

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t ($t \geq 1$), zu dem gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren haben, wie von der Werbekampagne erreicht wurden. *[2 Punkte]*

c) In der nachstehenden Grafik sind der Graph der Funktion N_G und der Graph ihrer Ableitung N_G' dargestellt.



1) Beschreiben Sie, welche Eigenschaft die Ableitungsfunktion N_G' und welche Eigenschaft die Funktion N_G an der dargestellten Stelle t_0 hat. *[2 Punkte]*

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Stelle t_0 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Eine Studierende behauptet, dass die 2. Ableitung der Funktion N_G für alle $t \geq 0$ positiv ist.

3) Argumentieren Sie, warum diese Behauptung falsch ist. *[1 Punkt]*

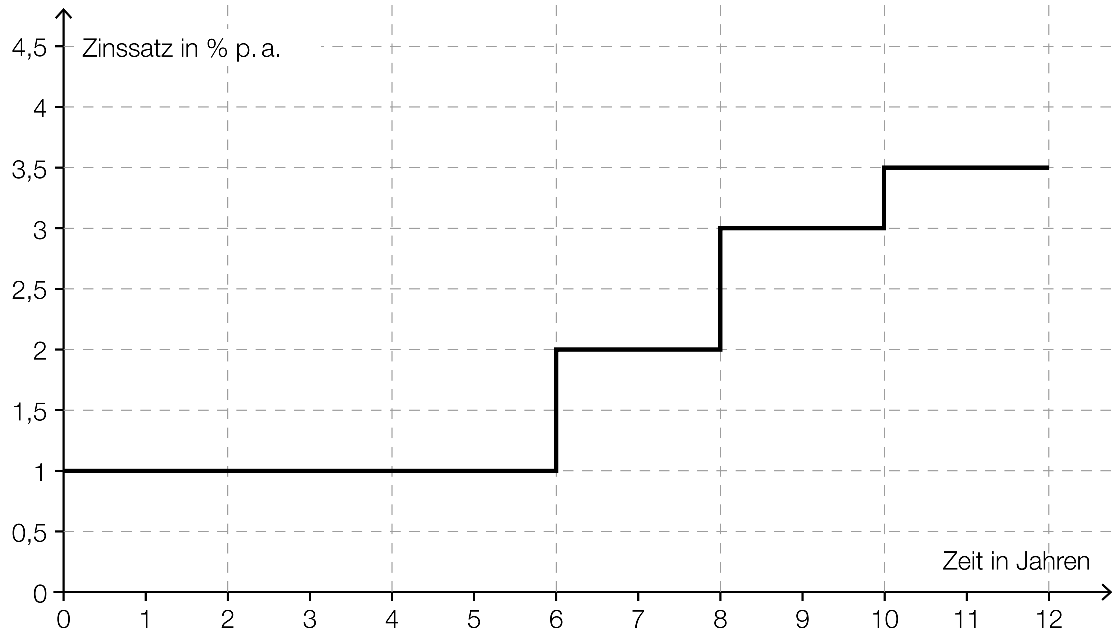
Aufgabe 8 (Teil B)

Ansparplan

Monika möchte in den nächsten 12 Jahren € 20.000 ansparen.

Im Folgenden wird die Kapitalertragssteuer nicht berücksichtigt.

a) Monika betrachtet das Angebot einer Bank für eine Wohnbauanleihe mit einer Laufzeit von 12 Jahren (siehe nachstehende Grafik). Die jährliche Verzinsung steigt dabei im Laufe der Jahre an.



1) Lesen Sie aus der obigen Grafik die Höhe und die Dauer der jährlichen Zinssätze ab. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie den mittleren jährlichen Zinssatz. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, den Monika jetzt anlegen muss, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen. *[1 Punkt]*

b) Auf einem Sparbuch bietet die Bank für 12 Jahre einen fixen Zinssatz von 2 % p. a.
Um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen, könnte Monika sofort € 8.000 einlegen und 2 gleich hohe Einzahlungen Z nach 3 Jahren und nach insgesamt 8 Jahren tätigen.

1) Veranschaulichen Sie Monikas Zahlungsplan und das Sparziel auf einer Zeitachse. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Höhe der Einzahlung Z. *[2 Punkte]*

c) Monika überlegt, 12 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres einen gleich hohen Betrag einzuzahlen, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren bei einem fixen Zinssatz von 2 % p. a. zu erreichen.

1) Berechnen Sie die Höhe des jährlichen Einzahlungsbetrags R. *[1 Punkt]*

Sie überlegt, nicht zu Beginn jedes Jahres den Jahresbetrag einzuzahlen, sondern zu Beginn jedes Monats $\frac{1}{12}$ des Jahresbetrags.

2) Argumentieren Sie, dass sie ihr Sparziel damit nicht in der vorgesehenen Zeit erreicht. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Verkehrsbetriebe

Städtische Verkehrsbetriebe analysieren ihre Einnahmen.

a) In der Stadt A können die Einnahmen der Verkehrsbetriebe durch den Verkauf von Einzelfahrscheinen modellhaft durch die folgende Erlösfunktion E beschrieben werden:

$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 6{,}6 \cdot x$

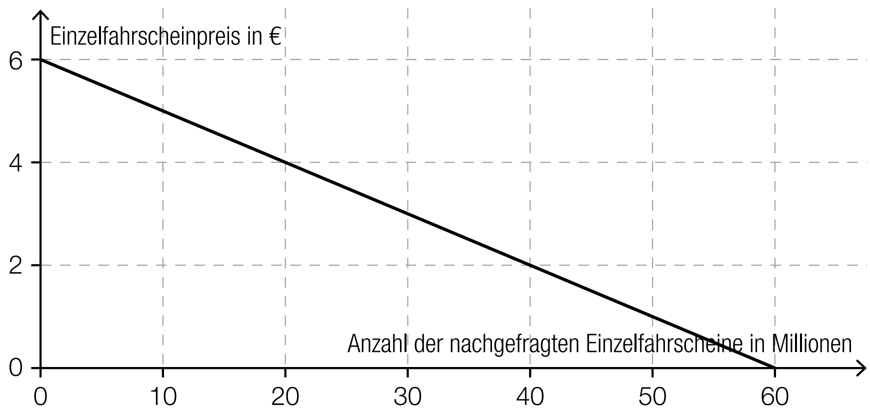
x ... Anzahl der verkauften Einzelfahrscheine in Millionen
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x Einzelfahrscheinen in Millionen Euro

1) Berechnen Sie den maximal möglichen Erlös in Euro. *[1 Punkt]*

2) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage. *[1 Punkt]*

3) Ermitteln Sie den zum maximalen Erlös führenden Einzelfahrscheinpreis in Euro. *[1 Punkt]*

b) In der Stadt B wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen angenommen. Dieser Zusammenhang ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Höchstpreis ab. *[1 Punkt]*

2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) In der Stadt C wird modellhaft angenommen, dass der Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden kann.

$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen
$p(x)$ ... Einzelfahrscheinpreis bei x nachgefragten Einzelfahrscheinen in Euro

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,60 werden 50 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,80 werden 48 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Der Höchstpreis wird mit € 7,80 angenommen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten von p. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

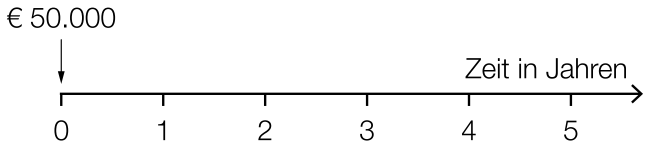
Erbschaft

a) Armin erhält ein Erbe in Höhe von € 50.000, das in Form von 3 Beträgen in den nächsten 5 Jahren ausbezahlt wird.
Die Höhe der Auszahlungen Z kann mit der nachstehenden Gleichung berechnet werden:

$$50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$$

1) Lesen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz ab. *[1 Punkt]*

2) Veranschaulichen Sie alle in der Gleichung vorkommenden Auszahlungen auf der nachstehenden Zeitachse. *[1 Punkt]*



3) Berechnen Sie die Höhe der Auszahlungen Z. *[1 Punkt]*

b) Jutta hat € 50.000 geerbt. Diesen Betrag legt sie mit einer Verzinsung von 3 % p. a. an.

In den nächsten 5 Jahren will sie nun jeweils am Ende jedes Monats einen gleich hohen Betrag abheben, sodass nach diesen 5 Jahren vom angelegten Geld ein Betrag in Höhe von € 20.000 vorhanden ist.

Jutta überlegt, dass sie monatlich rund $\frac{€\,50.000 - €\,20.000}{60} = €\,500$ abheben kann.

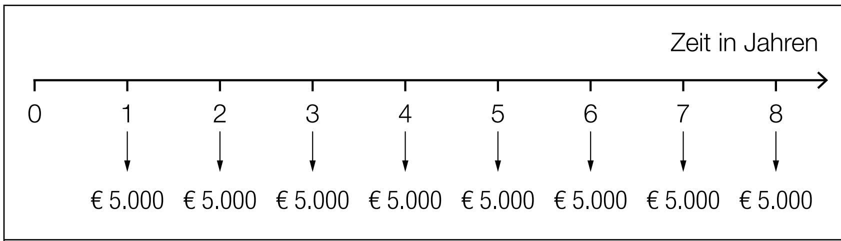
1) Begründen Sie, warum die tatsächlichen Monatsraten größer als € 500 sind. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz. *[1 Punkt]*

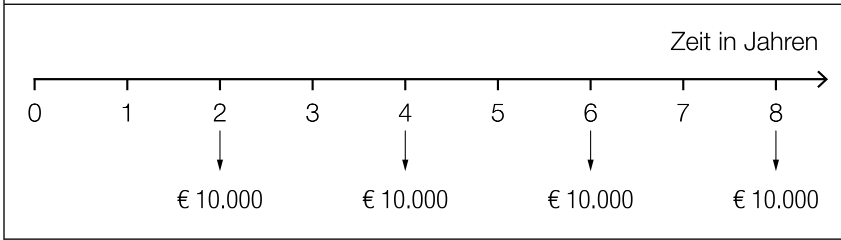
3) Berechnen Sie die Höhe dieser tatsächlichen Monatsraten. *[1 Punkt]*

c) Auf den unten stehenden Zeitachsen sind Erbschaftsauszahlungen dargestellt.

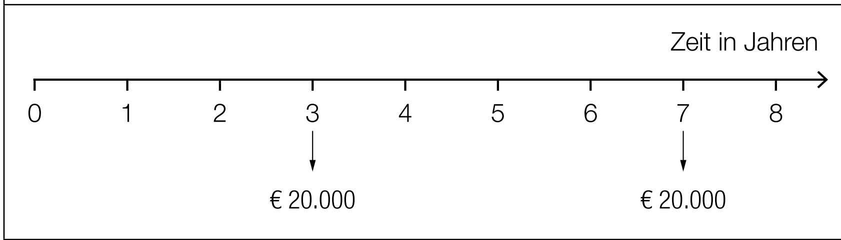
1) Kreuzen Sie diejenige Auszahlungsvariante an, die bei einem positiven Zinssatz den größten Barwert hat. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*



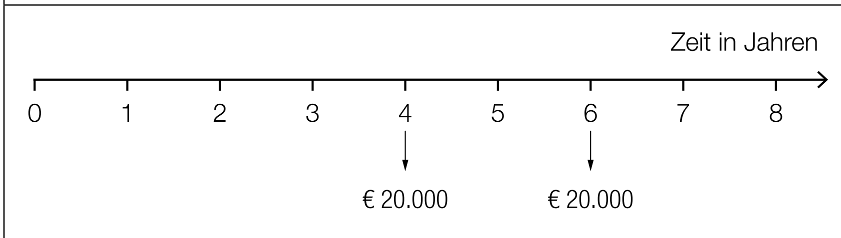
☐



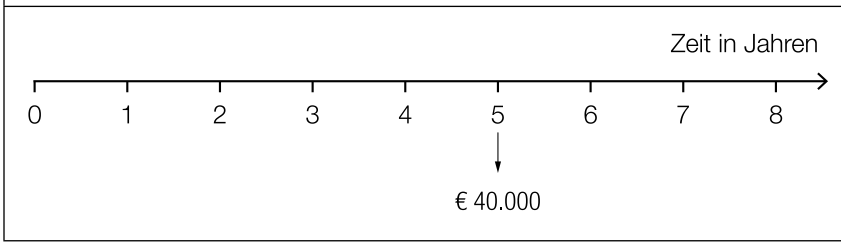
☐



☐



☐



☐

Aufgabe 7 (Teil B)

Kaffeeautomat

Der Elternverein einer Schule entschließt sich, einen Kaffeeautomaten für Schüler/innen und Lehrer/innen anzuschaffen.

a) Die Kosten für den Kaffeeautomaten betragen € 5.500.

Der Elternverein erhält folgendes Leasingangebot:

- Anzahlung: € 1.000 bei Vertragsabschluss
- 48 Monatsraten zu je € 100
- Die Ratenzahlungen beginnen einen Monat nach Vertragsabschluss.
- Der Restwert in Höhe von € 900 ist gleichzeitig mit der letzten Rate zu bezahlen.

1) Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Angebot. *[2 Punkte]*

b) Der Elternverein zahlt die Kosten für den Kaffeeautomaten in Höhe von € 5.500 sofort und darf dafür die Einnahmen behalten.

Der Kassier des Elternvereins legt seiner Berechnung folgende Annahmen zugrunde:

- Er rechnet mit 150 Bechern Kaffee pro Tag für 40 Schulwochen zu je 5 Tagen.
- Wareneinsatz pro Becher Kaffee: 30 Cent
- Verkaufspreis pro Becher Kaffee: 45 Cent
- Wartungskosten: € 1.400 pro Jahr
- Nach 4 Jahren soll der Kaffeeautomat um € 900 verkauft werden.

1) Tragen Sie die Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in die nachstehende Tabelle ein.
[1 Punkt]

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro	Rückflüsse in Euro
0			
1			
2			
3			
4			

Der Kassier nimmt einen kalkulatorischen Zinssatz von 1,8 % p. a. an.

2) Berechnen Sie den Kapitalwert. *[1 Punkt]*

c) An 80 von insgesamt 200 Schultagen hat Chiara Nachmittagsunterricht.

An Schultagen mit Nachmittagsunterricht trinkt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % Kaffee, an Schultagen ohne Nachmittagsunterricht beträgt diese Wahrscheinlichkeit 20 %.

1) Erstellen Sie für diesen Sachverhalt ein mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschriftetes Baumdiagramm. *[1 Punkt]*

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird:
$P(E) = \frac{120}{200} \cdot 0{,}8 = 0{,}48$ *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Chiara heute Nachmittagsunterricht hat unter der Voraussetzung, dass sie heute Kaffee getrunken hat. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Mixer

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Typen von Mixern her.

a) Bei einem Stückpreis von € 65 können 2 000 Stabmixer pro Jahr verkauft werden.
Bei einem Verkauf von 2 500 Stabmixern kann ein Erlös in Höhe von € 131.250 pro Jahr erzielt werden.

Der Erlös beim Verkauf der Stabmixer kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Anzahl der verkauften Stabmixer
$E(x)$ … Erlös bei x verkauften Stabmixern in €

1) Begründen Sie, warum in der Gleichung der Erlösfunktion der Parameter c gleich null sein muss. *[1 Punkt]*

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b der Erlösfunktion. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b. *[1 Punkt]*

4) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[1 Punkt]*

b) Der Gewinn beim Verkauf der Handmixer kann durch die Funktion G beschrieben werden.

$G(x) = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie die Gewinngrenzen. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn. *[1 Punkt]*

Durch Veränderungen im Unternehmen können die Fixkosten um 200 GE gesenkt werden.

3) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1. *[1 Punkt]*

c) Die Kosten bei der Produktion von Standmixern können durch die Funktion K beschrieben werden.

$K(x) = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Kostenverlauf bei einer Produktion von 25 ME progressiv oder degressiv ist. *[1 Punkt]*

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsoptimum ist. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$0 = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$	☐
$0 = 0{,}12 \cdot x^2 - 4{,}8 \cdot x + 63$	☐
$0 = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$	☐
$0 = 0{,}04 \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 63 + \frac{940}{x}$	☐
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☐

Aufgabe 7 (Teil B)

Smartphones

a) Der Akku eines Smartphones entlädt sich aufgrund von Hintergrundanwendungen auch dann, wenn das Gerät nicht aktiv benützt wird.

Für ein bestimmtes Smartphone wird die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent beobachtet. Zur Zeit $t = 0$ ist der Akku vollständig aufgeladen.

Zeit *t* in Stunden	Akku-Ladestand in Prozent
0	100
3	94
6	81
10	71
18	43

Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent soll beschrieben werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. *[1 Punkt]*

Bei einem Akku-Ladestand von 15 % sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

– Berechnen Sie, wie viele Stunden nach dem vollständigen Aufladen dies gemäß diesem linearen Regressionsmodell der Fall ist. *[1 Punkt]*

b) Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands beim Aufladen lässt sich näherungsweise durch die Funktion A beschreiben:

$A(t) = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn des Aufladens in h
$A(t)$ … Akku-Ladestand zur Zeit t in Prozent
λ … positiver Parameter

– Argumentieren Sie mathematisch, dass sich die Funktionswerte von A mit wachsendem t dem Wert 100 annähern. *[1 Punkt]*

2 Stunden nach Beginn des Aufladens beträgt der Akku-Ladestand 80 %.

– Berechnen Sie λ. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie, zu welcher Zeit nach Beginn des Aufladens der Akku-Ladestand 90 % beträgt. *[1 Punkt]*

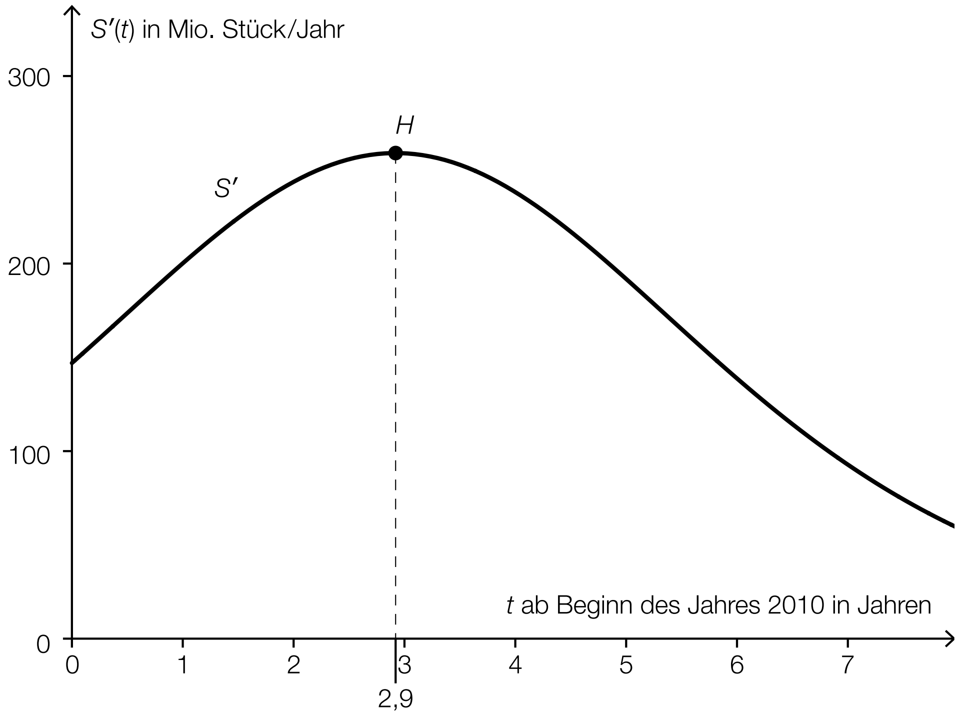
c) Die Entwicklung der weltweiten Verkaufszahlen von Smartphones kann modellhaft durch die Funktion S beschrieben werden:

$$S(t) = \frac{1918}{1 + 4{,}84 \cdot e^{-0{,}54 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010)
$S(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften Smartphones in Millionen Stück

– Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells die Anzahl der bis zum Beginn des Jahres 2020 insgesamt verkauften Smartphones. *[1 Punkt]*

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Ableitungsfunktion S' dargestellt. Auf dem Graphen von S' ist der Hochpunkt H markiert.



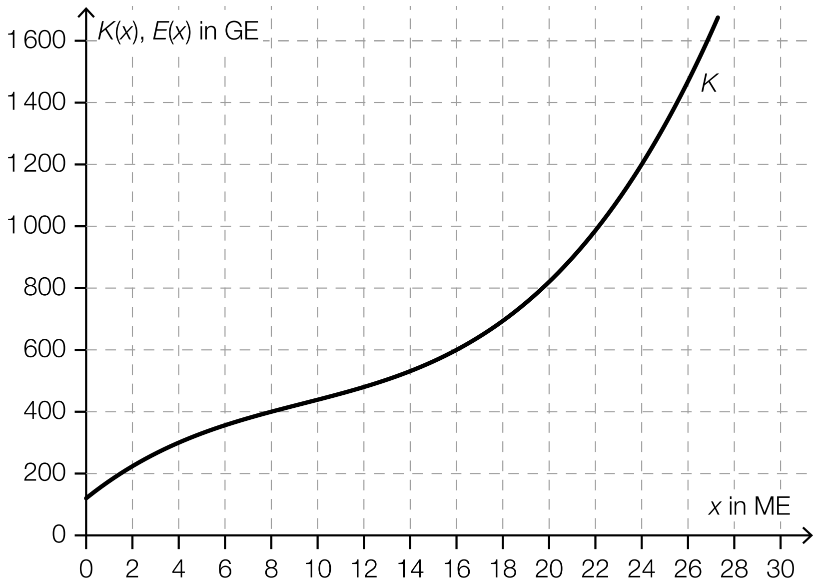
– Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Stelle $t = 2{,}9$ in Bezug auf die Funktion S. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Rohrproduktion

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffrohre her, die zu einem fixen Preis verkauft werden.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung der Kunststoffrohre dargestellt.



Der Break-even-Point liegt bei einer Produktion von 8 ME. Die Kosten betragen dabei 400 GE.

– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im obigen Diagramm ein. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie den zugehörigen Marktpreis. *[1 Punkt]*
– Ergänzen Sie in der nachstehenden Wertetabelle die fehlenden Werte für die zugehörige Gewinnfunktion G. *[1 Punkt]*

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE		0	

b) Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von Kunststoffrohren ist gegeben durch:

$$K'(x) = \frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60$$

x … produzierte Menge in ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der produzierten Menge x in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K mit $K(16) = 600$. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die Kostenkehre. *[1 Punkt]*

c) Ein anderes Unternehmen stellt Keramikrohre her.

Von der quadratischen Erlösfunktion E ist für den Absatz von 10 ME bekannt:

$E(10) = 15$
$E'(10) = -1{,}5$
$E''(10) = -0{,}6$

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über den Erlös bei einem Absatz von 11 ME an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$E(11) = 13{,}2$	☐
$E(11) = 13{,}5$	☐
$E(11) = 14{,}1$	☐
$E(11) = 16{,}2$	☐
$E(11) = 16{,}5$	☐

d) Die Erlösfunktion E für Betonrohre ist gegeben durch:

$$E(x) = -3{,}2 \cdot x \cdot (x - 25)$$

x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie den Höchstpreis. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Hotelerweiterung

Ein Hotel plant die Errichtung zusätzlicher Zimmer.

a) Das Hotel plant mit einer Investitionssumme von € 1.650.000 die Errichtung 15 zusätzlicher Zimmer.

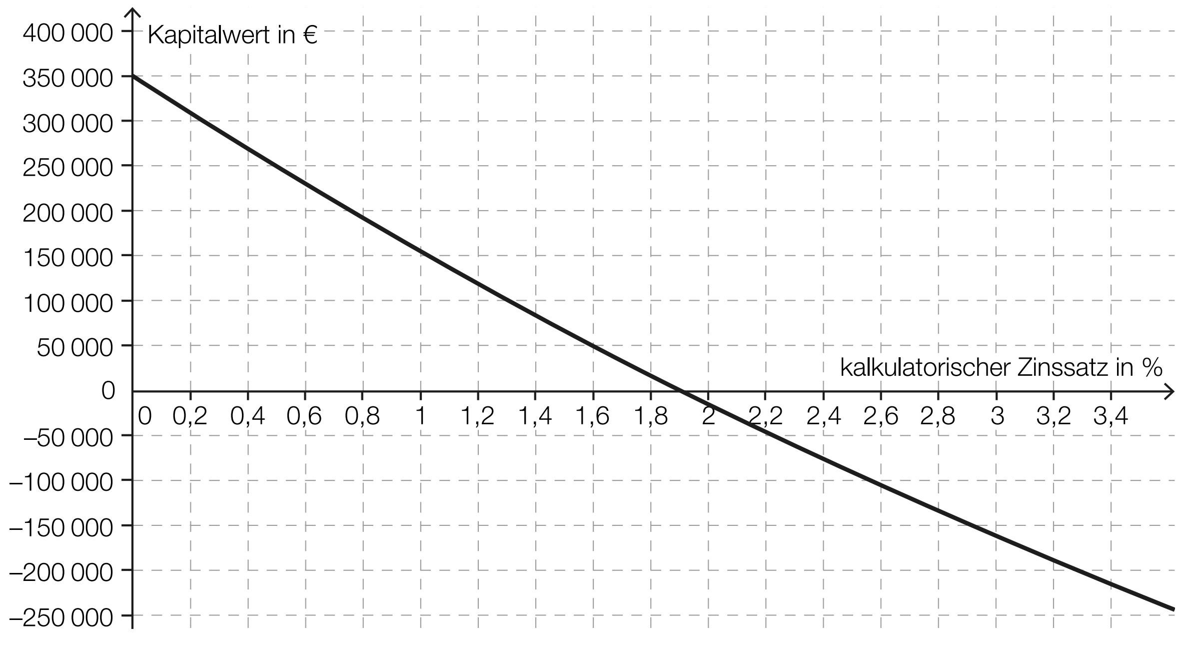
Für jedes dieser neuen Zimmer wird im 1. Jahr mit einem Erlös in Höhe von € 87 pro Nächtigung kalkuliert. Gleichzeitig rechnet der Betrieb damit, dass 13 % des Erlöses für Warenverbrauch, 31 % für Personalaufwand und 28 % für Betriebskosten aufgewendet werden.

Im 1. Jahr rechnet man damit, dass diese zusätzlichen Zimmer für jeweils 165 Nächtigungen gebucht werden.

– Tragen Sie die prognostizierten Einnahmen und Ausgaben für diese zusätzlichen Zimmer in die nachstehende Tabelle ein. *[1 Punkt]*

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro
0		
1		

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert einer Investition in Höhe von € 1.650.000 in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt. Es werden gleich hohe jährliche Rückflüsse und eine Nutzungsdauer von 20 Jahren angenommen.



– Lesen Sie aus dem Funktionsgraphen ab, bis zu welchem kalkulatorischen Zinssatz die Investition vorteilhaft ist. *[1 Punkt]*

– Bestimmen Sie die Höhe der jährlichen Rückflüsse. *[1 Punkt]*

c) Bei einer bestimmten Kalkulation geht man bei einer Investitionssumme in Höhe von € 1.650.000 davon aus, dass 20 Jahre lang gleich hohe jährliche Rückflüsse in Höhe von jeweils € 78.000 zu erwarten sind. Die Rückflüsse können zu einem Wiederveranlagungszinssatz von 1,5 % p. a. angelegt werden.

– Berechnen Sie den Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse. *[1 Punkt]*
– Überprüfen Sie nachweislich mithilfe des modifizierten internen Zinssatzes, ob diese Investition vorteilhaft ist. *[1 Punkt]*
– Argumentieren Sie, dass der modifizierte interne Zinssatz bei einem höheren Wiederveranlagungszinssatz höher wäre. *[1 Punkt]*

d) Um die Investition durchführen zu können, ist ein Bankkredit in Höhe von € 800.000 notwendig. Für die Rückzahlung werden eine Laufzeit von 15 Jahren und nachschüssige Semesterraten in Höhe von jeweils € 38.100 vereinbart.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Finanzierungsmodell. *[1 Punkt]*