Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

junij 2016

Matematika

Kompenzacijski izpit 9
Podatki za izpraševalce / izpraševalke

BM|BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Premice v $\mathbb{R}^3$

Dani sta dve premici, g in h, v $\mathbb{R}^3$.

Premica g poteka skozi točko $P = (3|1|5)$ in je vzporedna z navpično osjo y.

Zastavitev naloge:

Navedite parametrično predstavitev za g.

Utemeljite, zakaj koordinat y_Q in z_Q točke $Q = (1|y_Q|z_Q)$ ni možno določiti tako, da bi točka Q ležala na premici g.

Nadaljevalno vprašanje:

Podajte pregled vseh možnih medsebojnih leg dveh premici v $\mathbb{R}^3$!

Premica h je podana v parametrični obliki $X = \begin{pmatrix} x_h \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ y_h \\ 1 \end{pmatrix}$ pri $s, x_h, y_h \in \mathbb{R}$.

Ali je možno številski vrednosti x_h in y_h določiti tako, da sta premici g in h med seboj pravokotni in se sekata v točki P?
Če ne, utemeljite s pomočjo računov, zakaj to ni možno.
Če ja, navedite ustrezni vrednosti za x_h in y_h.

Rešitev naloge 1

Premice v $\mathbb{R}^3$

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možna parametrična predstavitev:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pri } t \in \mathbb{R}$$

Možna utemeljitev:
Za vse točke na premici g velja:
$x = 3$; $y = 1 + t$; $z = 5$ (pri $t \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Neka točka z $x = 1$ ne more ležati na premici g.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je podana pravilna parametrična predstavitev za g in navedena pravilna utemeljitev.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Dve premici v $\mathbb{R}^3$ sta lahko identični, vzporedni, se sekata ali sta mimobežni.

Številski vrednosti x_h in y_h je možno določiti tako, da sta izpolnjena oba navedena pogoja:

$x_h = -1$ (dobimo pri vrednosti parametra $s = 2$)

$y_h = 0$ (dobimo iz $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$)

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko so navedene vse možne lege in pravilno podane vrednosti za x_h in y_h.

Naloga 2

Kvadratna funkcija

Dana je funkcija f z $f(x) = r \cdot x^2 + s$ pri $r, s \in \mathbb{R}, r \neq 0$.

Zastavitev naloge:

Pojasnite, kako vpliva sprememba vrednosti parametrov r in s na potek grafa funkcije f.

Nadaljevalno vprašanje:

Graf funkcije f poteka skozi obe točki, $B = (a|b)$ in $E = (0|e)$ pri $a \neq 0$.

S pomočjo koordinat a, b, e danih točk navedite parametra r in s.

Navedite, za katero vrednost b funkcija f ni kvadratna funkcija.

Rešitev naloge 2

Kvadratna funkcija

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Pri $r > 0$ gre za navzgor odprto parabolo, pri $r < 0$ gre za navzdol odprto parabolo. Čim večja je absolutna vrednost r, tem bolj »strmo« poteka graf funkcije f.

Sprememba parametra s povzroči vzporedni premik parabole vzdolž navpične osi.

ali:

Teme parabole je v točki $(0|s)$.

ali:

$(0|s)$ je presečišče grafa z navpično osjo.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je učinek spremembe vrednosti parametrov r in s na potek grafa funkcije f (smiselno) pravilno utemeljen (pojasnjen).

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Ker ležita B in E na grafu funkcije f in je E teme, velja:

$$s = e$$

$$b = r \cdot a^2 + e \;\Rightarrow\; r = \frac{b - e}{a^2}$$

Pri $b = e$ funkcija f ni kvadratna funkcija.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko sta parametra r in s pravilno navedena in je pravilno utemeljena, da mora veljati $b = e$, tako da f ni kvadratna funkcija.

Naloga 3

Sila vzmeti

Če raztegnemo vzmet, je sila, ki mora biti uporabljena za raztegovanje vzmeti premosorazmerna raztezku. Funkcija F opisuje silo, ki jo je potrebno uporabiti, v odvisnosti od raztezka x.

Velja: $F(x) = k \cdot x$.

Pri tem je x podan v metrih (m) in $F(x)$ v Njutnih (N). Konstanta k se označuje kot konstanta vzmeti in navaja »trdoto« vzmeti.

Zastavitev naloge:

Skicirajte enega od možnih grafov funkcije F in na Vaši skici označite k.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite izraz v odvisnosti od k, s katerim lahko izračunamo delo, ki je potrebno, da vzmet raztegnemo za dolžino x_0.

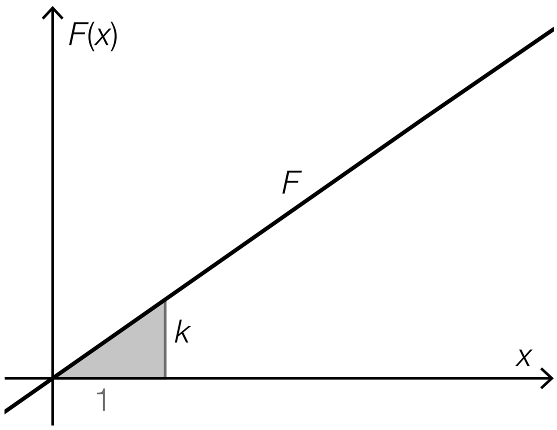
Navedite, kako se delo spremeni, če vzmet raztegnemo za dolžino $2 \cdot x_0$.

Rešitev naloge 3

Sila vzmeti

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možna skica:



Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je predložena ustrezna skica homogene linearne funkcije in je *k* pravilno označen.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$$W = \int_0^{x_0} k \cdot x \,\mathrm{d}x = \frac{k \cdot x_0^{\,2}}{2}$$

V primeru dvojnega raztezka velja:

$$W = \int_0^{2x_0} k \cdot x \,\mathrm{d}x = \frac{k \cdot (2x_0)^2}{2}$$

Delo naraste na štirikratnik.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je izraz za izračun dela pravilno naveden in pravilno opisana sprememba dela.
Ekvivalentne izraze je vrednotiti kot pravilne.

Naloga 4

Mejni stroški

Od nekega podjetja poznamo za izdelavo nekega produkta funkcijo stroškov K pri
$K(x) = 4 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 400 \cdot x + 1\,000$. Pri tem podaja $K(x)$ proizvodne stroške v denarnih enotah (DE) pri proizvodnji x količinskih enot (KE).

Pod mejnimi stroški (v DE/KE) razumemo stroške, ki dodatno nastanejo pri povečanju proizvodnje za 1 KE.

Zastavitev naloge:

Približnostni izračun mejnih stroškov pri neki določeni proizvodni količini x_0 dobimo s prvim odvodom $K'(x_0)$.

S pomočjo odvoda funkcije K izračunajte mejne stroške pri proizvodni količini 15 KE.

Nadaljevalno vprašanje:

Izračunajte, za koliko DE se vrednost približno izračunanih mejnih stroškov pri obsegu proizvodnje 15 KE razlikuje od dejanskega prirastka stroškov, če se obseg proizvodnje poveča od 15 KE na 16 KE.

Funkcija odvoda K' je od $x = 5$ KE dalje strogo monotono naraščajoča.
Navedite pomen te izjave za proizvodne stroške, če proizvodna količina narašča

Rešitev naloge 4

Mejni stroški

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$K'(x) = 12 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 400$
$K'(15) = 1\,300$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je $K'(15)$ pravilno izračunan.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$K'(15) = 1\,300$

$K(16) - K(15) = 8\,424 - 7\,000 = 1\,424$

Vrednost približnostno izračunanih mejnih stroškov se pri $x_0 = 15$ KE razlikuje od dejanskega prirastka stroškov pri 1 KE za 124 DE.

Ta izjava pomeni, da je od proizvodne količine $x = 5$ naprej prirast stroškov progresiven (to pomeni, stroški pri naraščajoči proizvodni količini vedno močneje naraščajo).

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno izračunana razlika stroškov in (smiselno) pravilno naveden pomen izjave.

Naloga 5

Diskretna slučajna spremenljivka

Za neko diskretno slučajno spremenljivko X je predložena preglednica, v kateri so navedene vse možne vrednosti k te slučajne spremenljivke in pripadajoče verjetnosti. Parameter n je naravno število z $n \neq 0$.

k	1	4	7	10	15
$P(X = k)$	0,2	$\frac{2}{n}$	$\frac{6}{n}$	0,1	0,3

Zastavitev naloge:

Določite parameter n in pričakovano vrednost $E(X)$ slučajne spremenljivke X.
Pojasnite svoj postopek reševanja.

Nadaljevalno vprašanje:

Standardni odklon σ ima pri zgoraj navedeni slučajni spremenljivki vrednost $\sigma = 5{,}2$.

Spremenite v preglednici navedene verjetnosti $P(X = k)$ za vsaj dve vrednosti k tako, da se bo standardni odklon zmanjšal in bo pri tem še vedno predložena veljavna porazdelitev verjetnosti. Vrednosti slučajne spremenljivke (v prvi vrstici preglednice) pa naj ostanejo nespremenjene.
Pojasnite svoj postopek reševanja.

Rešitev naloge 5

Diskretna slučajna spremenljivka

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Ker znaša vsota vseh verjetnosti 1, sledi: $\frac{8}{n} = 0{,}4$. Iz tega sledi: $n = 20$.

$E(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot 0{,}3 = 8{,}2$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta tako n kot tudi $E(X)$ pravilno določena in je postopek pravilno pojasnjen.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možen postopek:
V preglednici navedene verjetnosti moramo za vsaj dve vrednosti k spremeniti tako, da sta obe zahtevi – manjši standardni odklon, veljavna porazdelitev verjetnosti, torej vsota vseh verjetnosti je enaka 1 – na vsak način izpolnjeni.
Smiselna strategija je, verjetnosti na robovih intervala možnih izidov zmanjšati in tiste v sredini povečati.

Možen primer:

k	1	4	7	10	15
$P(X = k)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko sta navedeni pravilna strategija za zmanjšanje standardnega odklona in veljavna porazdelitev verjetnosti.
Izračun novega standardnega odklona pri tem ni potreben.