Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2015

Mathematik

Kompensationsprüfung
Angabe für **Prüfer/innen**

BM|BF Bundesministerium für Bildung und Frauen
Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

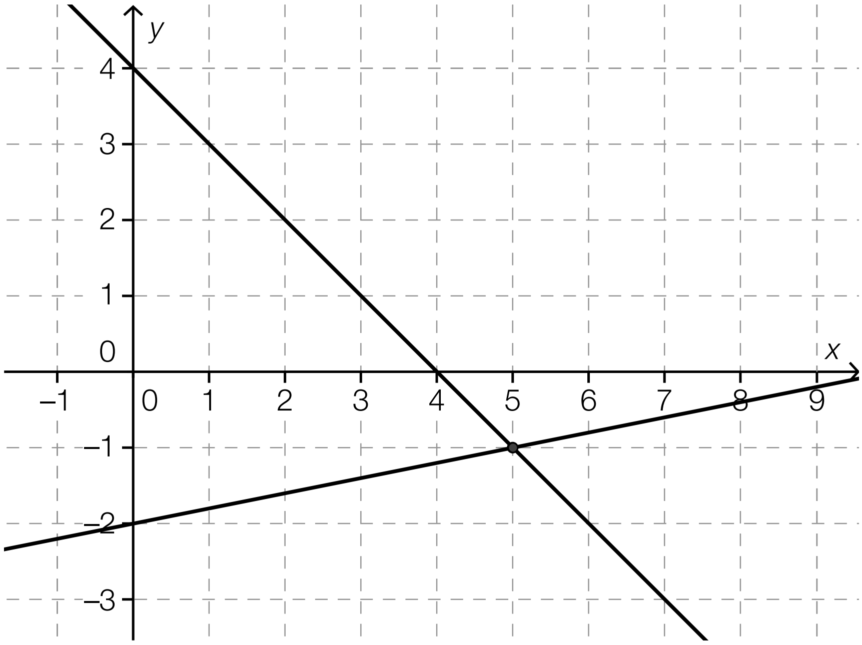
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Gleichungssysteme und ihre Lösungsfälle

Gegeben ist folgende grafische Darstellung:



Aufgabenstellung:

Geben Sie ein dieser Grafik entsprechendes lineares Gleichungssystem mit den Variablen x und y sowie die Lösung des Gleichungssystems an!

Leitfrage:

Ändern Sie eine der beiden Gleichungen so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!
Begründen Sie Ihre Vorgehensweise und erklären Sie, welche Auswirkung diese Änderung auf die Lagebeziehung der beiden Geraden hat!

Lösung zur Aufgabe 1

Gleichungssysteme und ihre Lösungsfälle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

I: $y = -x + 4$
II: $y = \frac{1}{5}x - 2$

oder:

I: $x + y \quad = 4$
II: $x - 5y = 10$

Lösung: $x = 5$ und $y = -1$ bzw. $L = \{ (5|-1) \}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl ein richtiges Gleichungssystem als auch die richtige Lösung angegeben wird.
Äquivalente Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Änderung:
I: $x + y \quad = 4$
II: $2x + 2y = 8$

Mögliche Begründung:
Die Gleichungen sind äquivalent.

Die Geraden sind dann ident.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Gleichung entsprechend geändert, die Vorgehensweise (sinngemäß) korrekt begründet und die Identität angegeben wird.

Aufgabe 2

Formel als Funktion interpretieren

Gegeben ist folgende Formel:

$F = \frac{5 \cdot a^2 \cdot b}{3}$ mit $F, a, b \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie sowohl

- F in Abhängigkeit von a bei konstantem b mit $b < 0$

als auch

- F in Abhängigkeit von b bei konstantem a mit $a \neq 0$

als Funktion und geben Sie jeweils an, um welchen Funktionstyp es sich dabei handelt!

Skizzieren Sie den Verlauf des jeweiligen Graphen!

Leitfrage:

Beschreiben Sie für die obigen zwei Funktionen die folgenden Eigenschaften:

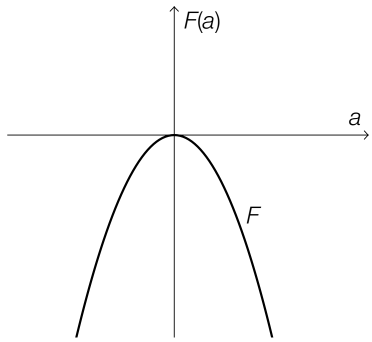
- Monotonieverhalten
- Achsensymmetrie
- Achsenschnittpunkte

Lösung zur Aufgabe 2

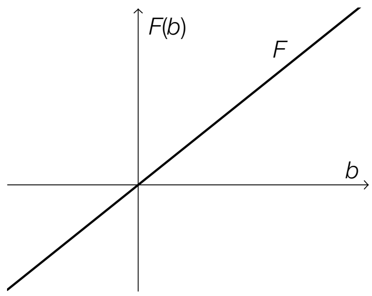
Formel als Funktion interpretieren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

- *F* in Abhängigkeit von *a* beschreibt eine quadratische Funktion (bei konstantem *b*).



- *F* in Abhängigkeit von *b* beschreibt eine lineare Funktion (bei konstantem *a*).



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Funktionstypen richtig erkannt und skizziert werden.
Der Graph von *F* muss im ersten Fall als eine zur senkrechten Achse symmetrische, nach unten offene Parabel durch den Ursprung erkennbar sein.
Der Graph von *F* muss im zweiten Fall als eine Gerade durch den Ursprung mit positiver Steigung erkennbar sein.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für *F* in Abhängigkeit von *a* gilt:
- Die Funktion wechselt an der Stelle $a = 0$ das Monotonieverhalten von streng monoton steigend auf streng monoton fallend.
- Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur senkrechten Achse.
- Der Graph der Funktion schneidet beide Achsen im Punkt $(0|0)$.

Für *F* in Abhängigkeit von *b* gilt:
- Die Funktion ist streng monoton steigend.
- Der Graph der Funktion ist nicht achsensymmetrisch.
- Der Graph der Funktion schneidet beide Achsen im Punkt $(0|0)$.

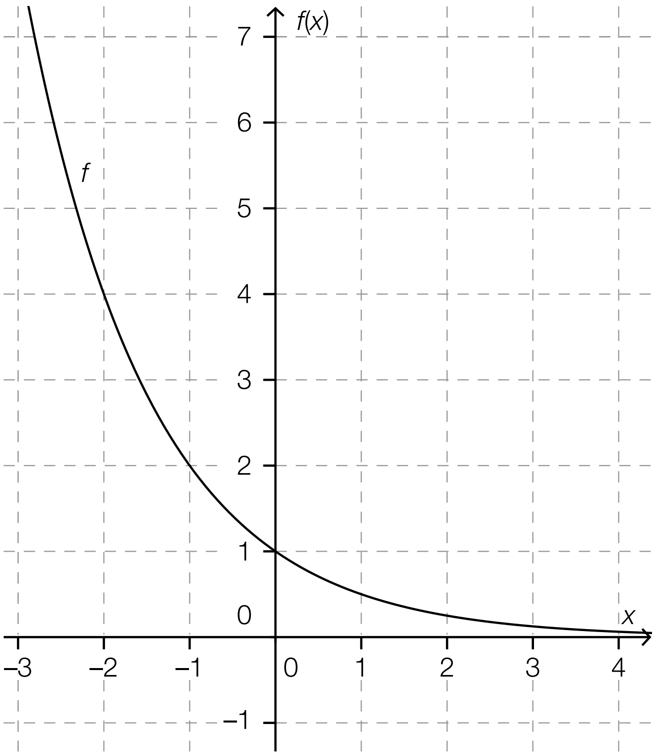
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Eigenschaften für beide Funktionen beschrieben werden und (sinngemäß) der Lösungserwartung entsprechen.

Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Parameter a und begründen Sie, warum Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x$ jedenfalls den Punkt $P = (0|1)$ enthalten!

a = ____

Leitfrage:

Erklären Sie, wie der Parameter a zu ändern ist, damit die Funktion streng monoton steigend ist! Geben Sie an, wie sich eine Spiegelung des Graphen der Funktion f an der senkrechten Achse auf den Funktionsterm auswirkt!

Lösung zur Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a = 0{,}5$

Diese Funktionen gehen durch $P = (0|1)$, da $a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ gilt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl ein korrekter Wert für a als auch eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für Werte $a > 1$ ist die Funktion streng monoton steigend.

Eine Spiegelung an der senkrechten Achse erzeugt man, wenn der Exponent mit (–1) multipliziert wird oder statt a der Kehrwert $\frac{1}{a}$ als Basis verwendet wird.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn $a > 1$ und die Auswirkung der Spiegelung auf den Funktionsterm genannt werden.

Aufgabe 4

Bremsweg

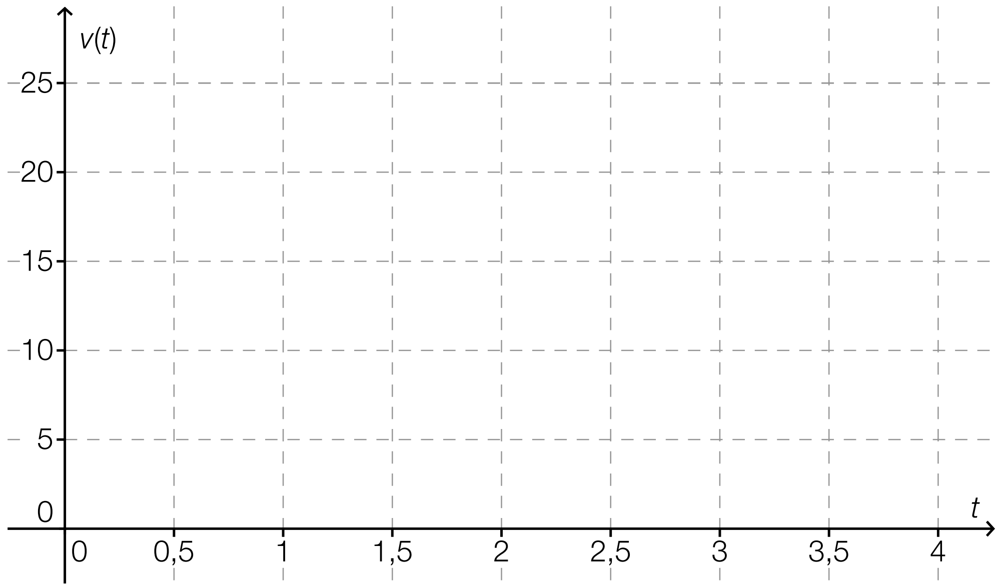
Ein PKW beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichmäßig zu bremsen.
Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit $v(t)$ des PKW zum Zeitpunkt t ($v(t)$ in Metern pro Sekunde, t in Sekunden).
Es gilt: $v(t) = 20 - 8t$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den der PKW während des gleichmäßigen Bremsvorgangs bis zum Stillstand zurücklegt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Stellen Sie den Graphen der Funktion v und die Länge des berechneten Bremsweges im nachstehenden Koordinatensystem grafisch dar!



Erklären Sie, wie sich der Graph von v und die Länge des Bremsweges verändern, wenn

- die Geschwindigkeit am Beginn des Bremsvorgangs höher ist und die Geschwindigkeitsänderung bei diesem gleichmäßigen Bremsvorgang gleich bleibt,
- die Geschwindigkeit am Beginn des Bremsvorgangs gleich ist und die Geschwindigkeitsänderung bei diesem gleichmäßigen Bremsvorgang geringer ist!

Lösung zur Aufgabe 4

Bremsweg

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Berechnung:
$v(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 2{,}5$
$\int_0^{2,5} (20 - 8t)\,\mathrm{d}t = (20t - 4t^2)\Big|_0^{2,5} = 25$
Die Länge des Bremsweges beträgt 25 m.

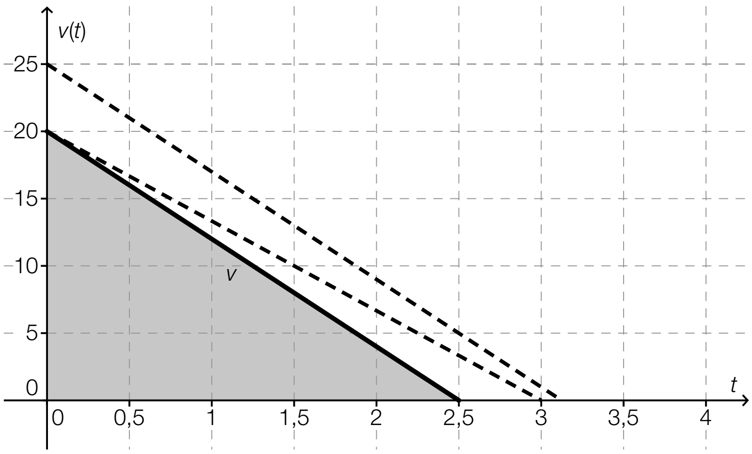
Mögliche Erklärung:
$s(t)$ ist eine Stammfunktion von $v(t)$, daher muss $v(t)$ integriert werden.
Der Bremsvorgang ist nach 2,5 s beendet, da $v(2{,}5) = 0$, daher ist 2,5 die obere Grenze des bestimmten Integrals.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge des Bremsweges richtig berechnet und die Vorgehensweise (sinngemäß) richtig erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Länge des Bremsweges ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von v und der t-Achse.



- Bei höherer Anfangsgeschwindigkeit und gleichbleibender Geschwindigkeitsänderung verläuft der Graph von v parallel zum ursprünglichen Fall und die Länge des Bremsweges nimmt zu.
- Bei gleicher Geschwindigkeit und geringerer Geschwindigkeitsänderung ist der Graph von v flacher und die Länge des Bremsweges nimmt zu.

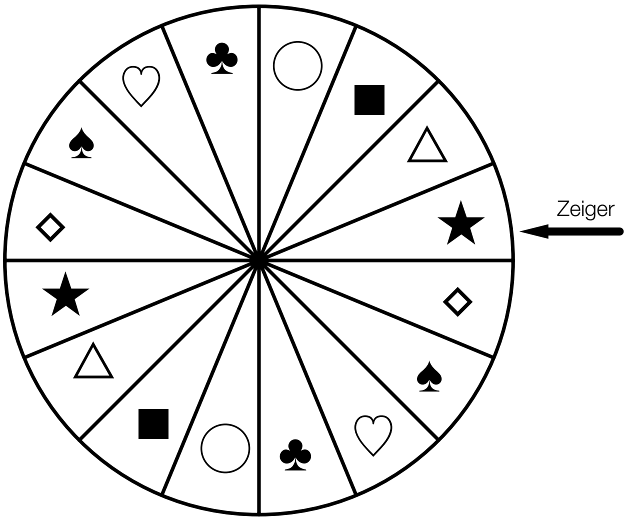
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph von v und die Länge des Bremsweges richtig dargestellt werden. <u>Beide</u> Veränderungen müssen anhand des Graphen von v (sinngemäß) richtig erklärt werden.

Aufgabe 5

Glücksrad

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Glücksrad mit 16 gleich großen Sektoren. Wenn das Glücksrad zum Stillstand gekommen ist und der Zeiger auf ein Sternsymbol zeigt (siehe nachstehende Abbildung), hat man gewonnen.
Das Glücksrad wird bei einem Glücksspiel genau dreimal gedreht.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten und erklären Sie den von Ihnen verwendeten rechnerischen Ansatz!

- Bei dreimaligem Drehen gewinnt man genau dreimal.
- Bei dreimaligem Drehen gewinnt man genau zweimal.

Leitfrage:

Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Drehen des Glücksrades immer zu gewinnen, wenn anstatt des abgebildeten Glücksrades Glücksräder mit folgenden Veränderungen verwendet werden?

- Glücksrad *A*: 12 zusätzliche Sektoren mit einem zusätzlichen Sternsymbol; alle Sektoren des Glücksrades sind gleich groß.
- Glücksrad *B*: 16 Sektoren; die Größe der Sektoren mit dem Sternsymbol ist unverändert so wie in obiger Abbildung, die restlichen Sektoren sind unterschiedlich groß.

Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung zur Aufgabe 5

Glücksrad

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Gewinnwahrscheinlichkeit beim einmaligen Drehen: $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, Verlustwahrscheinlichkeit: $\frac{7}{8}$

- Wahrscheinlichkeiten werden multipliziert („und"-Verknüpfung): $\left(\frac{1}{8}\right)^3 \approx 0{,}00195$
- Es gibt drei Möglichkeiten, bei welchen zwei der drei Versuche der Gewinn erzielt wird: $\left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot 3 \approx 0{,}041$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Wahrscheinlichkeiten korrekt berechnet werden und der jeweilige Rechenansatz (auch über Baumdiagramm oder Binomialverteilung) korrekt erklärt wird.
Toleranzintervalle: [0,0019; 0,002] bzw. [0,04; 0,0411]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Glücksrad *A*: Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einmaligem Drehen beträgt $\frac{3}{28}$.
Da $\frac{3}{28} < \frac{1}{8}$, ist auch $\left(\frac{3}{28}\right)^3 < \left(\frac{1}{8}\right)^3$ und daher nimmt die Wahrscheinlichkeit, bei dreimaligem Drehen jedes Mal zu gewinnen, ab.

Glücksrad *B*: Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einmaligem Drehen beträgt unverändert $\frac{1}{8}$.
Das Ergebnis bei dreimaligem Drehen bleibt daher unverändert $\left(\frac{1}{8}\right)^3$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Fälle die Auswirkung auf die Wahrscheinlichkeit, jedes Mal zu gewinnen, (sinngemäß) richtig begründet wird.