Modellschularbeit

Mathematik

März 2014

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Druckmessung in einem Behälter

a) Lösungserwartung:

Momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 12$:

$p(t) = \frac{1}{64} \cdot t^3 - \frac{3}{16} \cdot t^2 + 6$

$p'(t) = \frac{3}{64} \cdot t^2 - \frac{6}{16} \cdot t$

$p'(12) = 2{,}25$ bar/min

Mögliche Lösungswege:

(1) $p^* = p(12) + 3 \cdot 2{,}25 \Rightarrow p^* = 12{,}75$ bar

oder

(2) Tangente in $P = (12|6)$: $y = 2{,}25 \cdot t - 21$
$t = 15 \Rightarrow p^* = 2{,}25 \cdot 15 - 21 = 12{,}75 \Rightarrow p^* = 12{,}75$ bar

Unter der genannten Annahme würde der Druck am Ende des Experiments 12,75 bar betragen.

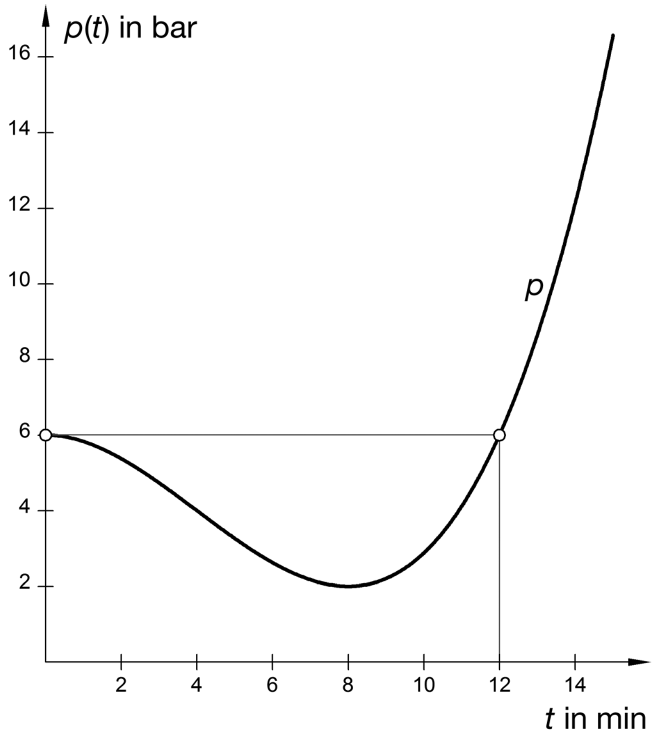
Lösungsschlüssel:

– 1 Ausgleichspunkt für die richtige Berechnung der momentanen Änderungsrate
– 1 Punkt für die richtige Berechnung des Drucks am Ende des Experiments
Die Lösung gilt als richtig, wenn der richtige Zahlenwert von 12,75 angegeben wird. Die Angabe der Tangentengleichung ist nicht erforderlich.

b) Lösungserwartung:

$p(t) = 6 \Rightarrow 6 = \frac{1}{64} \cdot t^3 - \frac{3}{16} \cdot t^2 + 6 \Rightarrow t_0 = 0; t_1 = 12$

Aus den Lösungen der Gleichung $p(t) = 6$ folgt, dass am Beginn des Experiments und 12 Minuten nach Beginn des Experiments (d. h. zum Zeitpunkt $t = 12$) ein Druck von $p = 6$ bar gemessen wird.



Lösungsschlüssel:

- 1 Punkt für die korrekte Angabe der beiden Lösungen der Gleichung $p(t) = 6$. Der Lösungsweg ist frei wählbar, d. h., die Lösungen können auch aus dem Diagramm abgelesen werden. Die Angabe der Einheit ist nicht unbedingt erforderlich.
- 1 Punkt wird vergeben, wenn alle nachstehenden Bedingungen erfüllt sind: Die Darstellung der Lösungen der Gleichung $p(t) = 6$ im Diagramm muss korrekt sein. Ein Abweichen von den ganzzahligen Lösungen wird nicht akzeptiert.
  Die Interpretation der Lösungen der Gleichung muss auf den Druck im Behälter $p = 6$ bar zu den Zeitpunkten $t = 0$ min und $t = 12$ min verweisen. Auch die Einheiten (Minuten und Bar) müssen angegeben sein.

Aufgabe 2

Der Weltrekordlauf von Usain Bolt

a) Lösungserwartung:

$s_1(t) = \frac{100}{9{,}58} \cdot t = 10{,}44 \cdot t$

Mithilfe der Funktion s_1 wird die tatsächliche Bewegung Usain Bolts durch eine sog. *gleichförmige Bewegung* ersetzt, das heißt durch eine Bewegung, die mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt. Die Steigung der Funktion s_1 entspricht der durchschnittlichen oder mittleren Geschwindigkeit $v \approx 10{,}44$ m/s der Bewegung im Zeitintervall [0 s; 9,58 s].

Lösungsschlüssel:

- 1 Ausgleichspunkt: Der Punkt wird vergeben, wenn die Gleichung der Funktion s_1 entsprechend der Lösungserwartung (oder in einer dazu äquivalenten Form) korrekt angegeben wird. Der Zahlenwert des Parameters muss richtig gerundet sein.
- 1 Punkt: Der Punkt kann nur dann vergeben werden, wenn bei der Interpretation der Steigung des Graphen der Funktion s_1 eindeutig auf die mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit verwiesen wird. Der Hinweis, die Steigung der linearen Funktion entspreche der mittleren Änderungsrate, sowie jede andere mathematisch korrekte Interpretation, die nicht auf die Bewegung Bezug nimmt, ist als falsch zu werten.

b) Lösungserwartung:

$s'(t) = -0{,}198 \cdot t^2 + 2{,}642 \cdot t + 3{,}789 \Rightarrow$
$k_1 = s'(7{,}92) = v(7{,}92) = 12{,}2938$ m/s $\approx 12{,}29$ m/s

Die Werte der ersten Ableitung der Funktion an den Stellen $t_1 = 7{,}92$ und $t_2 = 9{,}58$ (d. h. die Steigungen der Tangenten an den Graphen in den genannten Stellen) im Zeit-Weg-Diagramm entsprechen den jeweiligen Momentangeschwindigkeiten (Zahlenwert und Einheit siehe oben). Aus der Steigung der Modellfunktion folgt, dass die Momentangeschwindigkeit v_1 an der 80-m-Messstelle größer war als die Momentangeschwindigkeit v_2 an der Messstelle im Ziel (bei 100 m). Usain Bolts Laufgeschwindigkeit hat im letzten Streckenabschnitt wieder abgenommen. Diese Tatsache folgt auch aus den realen Messwerten (wenngleich aus diesen nur mittlere Geschwindigkeiten folgen).

Lösungsschlüssel:

- 1 Punkt: Der Punkt wird vergeben, wenn der Zahlenwert der Steigung k_1 korrekt angegeben wird, d. h., wenn der Zahlenwert im Intervall [12; 13] liegt.
- 1 Punkt: Der Punkt wird nur dann vergeben, wenn alle nachstehenden Bedingungen erfüllt sind: Der Zusammenhang zwischen der Steigung der Tangente an einer Stelle im t-s-Diagramm und der Momentangeschwindigkeit muss klar zum Ausdruck gebracht werden. Die Argumentation muss in korrekter Weise auf die Zahlenwerte und Einheiten für die Momentangeschwindigkeit Bezug nehmen (Einheit: m/s oder ggf. die korrekte Umrechnung in die

Einheit km/h ⇔ v_1 = 44,26 km/h, v_2 = 39,35 km/h). Auf die Abnahme der Geschwindigkeit im letzten Streckenabschnitt muss verwiesen werden. (Ein Hinweis auf die Übereinstimmung mit den tatsächlichen mittleren Geschwindigkeiten kann unterbleiben.)

c) Lösungserwartung:

$$v_{\text{ungew}} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5}{5} = 10{,}96\text{ m/s}$$

$$v_{\text{gew}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2 + v_3 \cdot \Delta t_3 + v_4 \cdot \Delta t_4 + v_5 \cdot \Delta t_5}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 + \Delta t_5} = \frac{100\text{ m}}{9{,}58\text{ s}} = 10{,}44\text{ m/s}$$

Da die Zeitintervalle, in denen die einzelnen (gleich langen) Wegabschnitte (Δs = 20 m) zurückgelegt werden, unterschiedlich lang sind, tragen die einzelnen Durchschnittsgeschwindigkeiten verschieden stark zur mittleren Geschwindigkeit (= gewogenes arithmetisches Mittel) bei. In der Startphase, die das längste Zeitintervall umfasst, ist die durchschnittliche Geschwindigkeit gering, daher ist das gewogene arithmetische Mittel (= mittlere Geschwindigkeit) kleiner als das ungewogene arithmetische Mittel, bei dem alle Durchschnittsgeschwindigkeiten mit der gleichen Gewichtung eingehen.

Oder: Da es sich bei der Zeit-Weg-Funktion um keine lineare Funktion handelt, können die beiden Mittelwerte nicht übereinstimmen.

Oder: Die Beschleunigung ändert sich während des Laufes.

Oder: Die Geschwindigkeit ändert sich unregelmäßig.

Lösungsschlüssel:

– 1 Punkt wird vergeben für die korrekte Angabe des arithmetischen Mittels der fünf Durchschnittsgeschwindigkeiten. Die Angabe der Einheit ist ebenfalls erforderlich.
– 1 Punkt: Zur Vergabe des Punktes sind die Fachausdrücke *gewogenes* und *ungewogenes arithmetisches Mittel* nicht erforderlich, jedoch muss klar zum Ausdruck gebracht werden, dass die Zeitintervalle, während der mit der jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeit gelaufen wird, unterschiedlich lang sind.